

ПРИМЕНЕНИЕ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ ИНТЕГРАЛОВ

В. Е. КОРНИЛОВ

(Представлена научным семинаром кафедр высшей математики
и инженерно-вычислительной математики ТПИ)

В статье применяются параметры $a > 0$, $b \geq 0$, $0 \leq \gamma < 1$; $x > 0$,
 $c = a + bi$, $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$,

где

$$a = |c| \cos \varphi, \quad b = |c| \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Вводится обозначение

$$(\lambda)_k = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1) = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)}, \quad (\lambda)_0 = 1.$$

Рассмотрим применение цепных дробей для приближенного вычисления интегралов вида $I = \int_x^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct} dt$.

После n -кратного интегрирования по частям получим

$$I = \int_x^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct} dt = x^\gamma e^{-cx} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(1-\gamma)_k}{(cx)^{k+1}} +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{(1-\gamma)_n}{c^n} \int_x^\infty t^{\gamma-n-1} e^{-ct} dt,$$

откуда при $n \rightarrow \infty$ получается ряд для I

$$I = \int_x^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct} dt = x^\gamma e^{-cx} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(1-\gamma)_k}{(cx)^{k+1}} =$$

$$= \frac{x^\gamma e^{-cx}}{cx} F\left(1-\gamma, -\frac{1}{cx}\right), \quad |cx| \gg 1,$$

к тому же нетрудно проверить, что

$$F\left(1-\gamma, -\frac{1}{cx}\right) = 1 - \frac{1-\gamma}{(cx)} + \frac{(1-\gamma)_2}{(cx)^2} F\left(3-\gamma, -\frac{1}{cx}\right).$$

По отношению к ряду $\frac{1}{cx} F\left(3-\gamma, -\frac{1}{cx}\right)$ соответствующая цепная дробь ([1], стр. 229) следующая ([1], стр. 301, 269):

$$I = \int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-ct} dt = x^{\gamma} e^{-cx} \frac{1}{cx} \left\{ 1 - \frac{1-\gamma}{cx} + \right. \\ \left. + \frac{(1-\gamma)_2}{cx} \left[\frac{P_{2k}(cx)}{Q_{2k}(cx)} + R_{2k}(cx) \right] \right\} = \frac{x^{\gamma} e^{-cx}}{(cx)^2} \cdot \frac{p_{2k}(cx)}{Q_{2k}(cx)} + r_{2k}(cx),$$

где

$$\frac{P_n(cx)}{Q_n(cx)} = \frac{1}{\alpha_1 + \dots + \alpha_n},$$

$$R_{2k}(cx) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\alpha_{2n+2}}{Q_{2n}(cx) Q_{2n+2}(cx)} \quad ([2], \text{ стр. 34}),$$

$$\alpha_1 = cx, \quad \alpha_{2k} = \frac{(k-1)!}{(3-\gamma)_k}, \quad \alpha_{2k+1} = \frac{(3-\gamma)_k}{k!} cx; \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Для знаменателей подходящих дробей с четными индексами известно рекуррентное соотношение ([2], стр. 14)

$$Q_{2k+2}(cx) = (\alpha_{2k+2} \alpha_{2k+1} + \frac{\alpha_{2k+2}}{\alpha_{2k}} + 1) Q_{2k}(cx) - \frac{\alpha_{2k+2}}{\alpha_{2k}} Q_{2k-2}(cx). \quad (3)$$

Далее предполагается, что

$$Q_{2k}(cx) = \sum_{n=0}^k C_k^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n}, \quad k=1, 2, \dots \quad (4)$$

После непосредственного вычисления цепной дроби (2) убеждаемся, что равенство (4) справедливо при $k=1, 2$. На основании метода математической индукции нетрудно установить, что если многочлены (4) будут удовлетворять соотношению (3), тогда они будут справедливы и для $k=3, 4, \dots$

На основании (2)–(4) получается

$$Q_{2k+2}(cx) = \left(\frac{cx}{3-\gamma+k} + \frac{k}{3-\gamma+k} + 1 \right) \sum_{n=0}^k C_k^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n} - \\ - \frac{k}{3-\gamma+k} \sum_{n=0}^{k-1} C_{k-1}^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n} = \\ = 1 + \frac{k}{3-\gamma+k} \cdot \frac{(cx)^k}{(3-\gamma)_{k-1}} + \frac{(cx)^{k+1}}{(3-\gamma)_{k+1}} + \frac{(cx)^k}{(3-\gamma)_k} + \\ + k \frac{(cx)^k}{(3-\gamma)_{k+1}} + \sum_{n=1}^k \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_{n-1}} \left[\frac{1}{3-\gamma+k} C_k^{n-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2-\gamma+n} C_k^n + \frac{k}{(2-\gamma+n)(3-\gamma+k)} C_{k-1}^{n-1} \right] = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{k-1} C_{k+1}^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n} + (k+1) \frac{(cx)^k}{(3-\gamma)_k} + \\ + \frac{(cx)^{k+1}}{(3-\gamma)_{k+1}} = \sum_{n=0}^{k+1} C_{k+1}^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n},$$

тем самым равенство (4) доказано.

К тому же ввиду (2) числитель $P_{2k}(cx)$ будет следующий:

$$P_{2k}(cx) = \sum_{n=1}^k C_k^n \frac{(cx)^n}{(3-\gamma)_n} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{(3-\gamma)_m}{(cx)^{m+1}}. \quad (5)$$

Далее, после применения равенств (2), (4), (5), вычисляется и преобразуется числитель $p_{2k}(cx)$:

$$\begin{aligned} p_{2k}(cx) &= (1-\gamma)_2 P_{2k}(cx) + (cx-1+\gamma) Q_{2k}(cx) = \\ &= (1-\gamma)_2 \sum_{n=0}^k C_k^n \sum_{m=0}^{n+1} \frac{(-1)^m (cx)^{n+1-m}}{(1-\gamma+m)_{n+2-m}} = \\ &= (1-\gamma)_2 \left\{ C_k^0 \left[\frac{cx}{(1-\gamma)_2} - \frac{1}{2-\gamma} \right] + \right. \\ &+ C_k^1 \left[\frac{(cx)^2}{(1-\gamma)_3} - \frac{cx}{(2-\gamma)_2} + \frac{1}{3-\gamma} \right] + \dots \\ &\dots \left. + C_k^\kappa \left[\frac{(cx)^{\kappa+1}}{(1-\gamma)_{\kappa+2}} - \dots + (-1)^{\kappa+1} \frac{1}{2-\gamma+k} \right] \right\}, \\ p_{2k}(cx) &= (1-\gamma)_2 \sum_{n=0}^{\kappa+1} (cx)^n \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} \frac{C_\kappa^m (-1)^{\kappa+1-n-m}}{(2-\gamma+k-n-m)_{n+1}}. \quad (6) \end{aligned}$$

Учитывая равенства (2), (4), (6), получаем

$$\begin{aligned} I &= \int_x^\infty t^{\gamma-1} e^{-ct} dt = \\ &= \frac{(1-\gamma)_2 x^\gamma}{e^{cx}} \sum_{n=1}^{\kappa+1} (cx)^n \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} \frac{C_\kappa^m (-1)^{\kappa+1-n-m}}{(2-\gamma+k-n-m)_{n+1}} + \\ &+ \frac{\sum_{n=0}^{\kappa} C_\kappa^n \frac{(cx)^{n+2}}{(3-\gamma)_n}}{e^{cx}} + \\ &+ r_{2k}(cx), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7) \end{aligned}$$

Далее согласно (2) и (4) и ввиду $|Q_{2k}(cx)| < |Q_{2k+2}(cx)|$ ([2], стр. 14) вычисляется остаточный член $R_{2k}(cx)$ по модулю

$$\begin{aligned} |R_{2k}(cx)| &\leq \sum_{n=k}^\infty \left| \frac{n!}{(3-\gamma)_{n+1} Q_{2n}(cx) Q_{2n+2}(cx)} \right| < \\ &< \frac{k!}{(3-\gamma)_{\kappa-1} |Q_{2k}(cx)|^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{(k+1)_n}{(2-\gamma+k)_{n+2}} < \\ &< \frac{k!}{(3-\gamma)_{\kappa-1} |Q_{2k}(cx)|^2} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2-\gamma+k+n)_2} = \frac{k!}{(3-\gamma)_k |Q_{2k}(cx)|^2} \end{aligned}$$

или ввиду (2)

$$|r_{2k}(cx)| < \frac{(1-\gamma)_2 k! |x^\gamma e^{-cx}|}{|cx|^2 (3-\gamma)_k |Q_{2k}(cx)|^2}. \quad (8)$$

Аналогичная оценка остаточного члена была получена Марковым А. А. (3) только в случае вещественного переменного $ax = z > 0$ ($b=0, c=a$).

После отделения вещественной и мнимой частей интеграла (7) получаются формулы для вычисления нижеследующих интегралов:

$$\int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \cos bt dt = \frac{AC + BD}{A^2 + B^2} + \operatorname{Re} [r_{2k}(cx)], \quad (9)$$

а также

$$\int_x^{\infty} t^{\gamma-1} e^{-at} \sin bt dt = \frac{BC - AD}{A^2 + B^2} - \operatorname{Im} [r_{2k}(cx)], \quad (10)$$

где

$$A = \sum_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{|c|^{n+2} x^{n+2}}{(3-\gamma)_n} \cos(n+2)\varphi, \quad (11)$$

$$B = \sum_{n=0}^{\kappa} C_{\kappa}^n \frac{|c|^{n+2} x^{n+2}}{(3-\gamma)_n} \sin(n+2)\varphi, \quad (12)$$

$$C = \frac{(1-\gamma)_2 x^{\gamma}}{e^{ax}} \sum_{n=0}^{\kappa+1} \frac{\cos(n\varphi - bx)}{|c|^{-n} x^{-n}} \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} \frac{C_{\kappa}^m (-1)^{\kappa+1-n-m}}{(2-\gamma+k-n-m)_{n+1}}, \quad (13)$$

$$D = \frac{(1-\gamma)_2 x^{\gamma}}{e^{ax}} \sum_{n=0}^{\kappa+1} \frac{\sin(n\varphi - bx)}{|c|^{-n} x^{-n}} \sum_{m=0}^{\kappa+1-n} \frac{C_{\kappa}^m (-1)^{\kappa+1-n-m}}{(2-\gamma+k-n-m)_{n+1}}. \quad (14)$$

Остаточные члены формул (9) и (10) могут быть оценены на основании формулы (8), так как

$$|\operatorname{Re} [r_{2k}(cx)]| \leq |r_{2k}(cx)|$$

и

$$|\operatorname{Im} [r_{2k}(cx)]| \leq |r_{2k}(cx)|.$$

Путем последовательного применения рекуррентных формул ([4], стр. 211) к интегралам (9) преобразуются следующие интегралы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^{\gamma+n-1} e^{-ax} \cos(bx - n\varphi) dx = \\ &= -e^{-ax} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\gamma+n-k)_k}{|c|^{\kappa+1}} x^{\gamma+n-1-\kappa} \cos[(k+1-n)\varphi + bx] + \\ &\quad + \frac{(\gamma)_n}{|c|^n} \int x^{\gamma-1} e^{-ax} \cos bx dx, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\int x^{\gamma-n-1} e^{-ax} \cos(bx + n\varphi) dx = \\ &= -e^{-ax} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(-1)^k |c|^k}{(-\gamma+n-k)_{\kappa+1}} x^{\gamma-n+1-\kappa} \cos[(n-k)\varphi + bx] + \\ &\quad + (-1)^n \frac{|c|^n}{(1-\gamma)_n} \int x^{\gamma-1} e^{-ax} \cos bx dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Для доказательства соотношения (15) от его правой части берется производная

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{dx} &= e^{-ax} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\gamma+n-k)_k}{|c|^{\kappa+1}} x^{\gamma+n-1-\kappa} \{a \cos[(k+1-n)\varphi + bx] + \\ &\quad + b \sin[(k+1-n)\varphi + bx]\} - \end{aligned}$$

$$-e^{-ax} \sum_{\kappa=0}^{n-1} \frac{(\gamma + n - 1 - \kappa)_{\kappa+1}}{|c|^{\kappa+1}} x^{\gamma+n-\kappa-2} \cos [(k+1-n)\varphi + bx] +$$

$$+ \frac{(\gamma)_n}{|c|^n} x^{\gamma-1} e^{-ax} \cos bx.$$

На основании (1) выражение в фигурных скобках равно $|c| \cos [(k-n)\varphi + bx]$, далее последние два слагаемых сокращаются и затем выделяется первое слагаемое первой суммы и вводится индекс $m=k-1$

$$\frac{dI_1}{dx} = x^{\gamma+n-1} e^{-ax} \cos (bx - n\varphi) +$$

$$+ e^{-ax} \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(\gamma + n - 1 - m)_{m+1}}{|c|^{m+1}} x^{\gamma+n-2-m} \cos [(m+1-n)\varphi + bx] -$$

$$- e^{-ax} \sum_{\kappa=0}^{n-2} \frac{(\gamma + n - 1 - \kappa)_{\kappa+1}}{|c|^{\kappa+1}} x^{\gamma+n-2-\kappa} \cos [(k+1-n)\varphi + bx] =$$

$$= x^{\gamma+n-1} e^{-ax} \cos (bx - n\varphi).$$

Формула (15) доказана.

Аналогично доказывается соотношение (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Данилов, А. Н. Иванова и др. Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби). М., Физматгиз, 1961.
2. Т. И. Стилтьес. Исследования о непрерывных дробях. М., ОНТИ, 1936.
3. А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
4. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.