ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

ОБЩИЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ОСНОВНЫХ РАСЧЕТНЫХ ЗАДАЧ НА ЗЕМНОМ СФЕРОИДЕ

Б. Ф. КРУТОЙ

(Представлена маркшейдерско-геодезической секцией Юбилейной конференции ТПИ в феврале 1961 г.)

Главной целью настоящей статьи является изложение общих, преимущественно новых способов решения в геодезических координатах основных расчетных задач на земном сфероиде: вычисление положений точек, кратчайших расстояний, направлений по кратчайшему пути, прямых лучевых засечек, площадей координатных трапеций и некоторых других задач.

Дел. 1. Постановка вопроса

1. Введем прежде всего новые, уточненные наименования для некоторых понятий, возникающих при изучении поверхностей.

Назовем **поверхностной нитью** непрерывное одномерное множество точек поверхности.

Среди поверхностных нитей выделим в силу их особых качеств те нити Γ, в каждой точке которых главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности. Такие нити Γ принято называть **геодезическими**, так как они широко применяются при решении различных задач геодезии. Однако подобное наименование этих нитей является чисто случайным, ибо оно не отражает ряда их замечательных внутренних свойств:

а) Если дуга $\Delta\Gamma_{ij}$ геодезической нити Γ_{ij} на поверхности S, проведенная между некоторыми двумя точками i, j этой поверхности, не содержит вершин нити O_{ij}, то эта дуга $\Delta\Gamma_{ij}$ является кратчайшей на поверхности S между указанными точками i, j;

б) Если на гладкой поверхности S один конец i гибкой вещественной нити закрепить, а другой конец пропустить через малое колечко во второй точке j поверхности S, то под действием натяжения, приложенного к ее свободному концу, гибкая вещественная нить между указанными точками i, j поверхности S расположится по геодезической кривой и в то же время будет наиболее **выравненной** нитью между этими точками;

в) Если в каждой точке геодезической нити Γ_{ij} на поверхности S провести касательную плоскость к поверхности S и затем построить огибающую поверхность $Д$ для этих плоскостей, то геодезическая нить Γ_{ij} поверхности S будет геодезической и для поверхности $Д$. Поэтому при развертывании поверхности Д на плоскость геодезическая нить поверхности $S(Д)$ перейдет в геодезическую нить плоскости, т. е. превратится в прямую.

Приведенные соображения говорят достаточно убедительно о том, что поверхностные нити с совпадающими главной и поверхностной нормалями более обосновано будет называть не геодезическими, а **выравненными** нитями поверхности. Такого наименования для поверхностных нитей подобного рода мы и будем придерживаться в дальнейшем.

2. Заметим также, что геодезические координаты B, L поверхностных точек земного сфероида являются частным случаем поверхностных координат u, v, в качестве которых здесь взяты две угловые величины: широта B и долгота L. В указанной отсчетной опоре положения поверхностных точек i земного сфероида определяются пересечением двух семейств координатных нитей: меридианов $L=L_i$ и параллелей $B=B_j$. Легко установить, что нити первого семейства $L=L_i$ являются выравненными на сфероиде, а нити второго семейства $B=B_j$ не будут выравненными, причем всякие две нити $L=L_i$ и $B=B_j$ этих семейств пересекаются под прямым углом. Поэтому геодезическая отсчетная опора B, L на сфероиде может быть отнесена к разряду **прямоугольных полувыравненных** отсчетных опор.

Отметим еще, что две пары координатных нитей $L=L_i$, $L=L_h$ и $B=B_j$, $B=B_k$ сфероида, взятых парами из каждого семейства, образуют при своем пересечении **сфероидическую координатную трапецию** $ihkj$ с четырьмя прямыми углами. Определение площади S_{ij}^{hk} такой координатной трапеции входит в число основных расчетных задач на сфероиде.

3. Введем теперь для поверхности земного сфероида ряд обозначений:

B_i, L_i — геодезическая широта и долгота точки i земного сфероида;

A_{ij} — геодезический азимут в точке i выравненной нити Γ_{ij}, проведенной на сфероиде через точку i и соседнюю точку j;

s_{ij} — длина дуги $\Delta\Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij} между точками i, j сфероида;

ΔL_{ij} — разность долгот L_i, L_j точек i, j сфероида;

x_{ij} — длина дуги ΔX_{ij} меридиана X_{ij} между точками i, j сфероида с широтами B_i, B_j;

$п_{ij}$ — длина дуги $\Delta\Pi_{ij}$ параллели Π_{ij} между точками i, j сфероида с широтами B_i, B_j и разностью долгот ΔL_{ij};

$S_{ij}^{hк}$ — площадь сфероидической трапеции, ограниченной двумя меридианами X_{ih}, $X_{iк}$ с разностью долгот $\Delta L_{ij}=\Delta L_{hк}$ и двумя параллелями Π_{ij}, $\Pi_{hк}$ с широтами $B_i=B_j$, $B_h=B_к$.

Приведенные здесь обозначения и связанные с ними понятия требуют некоторых уточнений и дополнений, которые вызваны в основном тем, что выравненные кривые Γ_{ij} сфероида не являются вообще замкнутыми и касаются своими последовательными вершинами двух граничных параллелей: северной $\Pi^{(ij)}$ и южной $\overline{\Pi}^{(ij)}$, равноудаленных от плоскости экватора. На этих уточнениях и дополнениях мы сейчас и остановимся.

а) Так как между двумя точками i, j сфероида можно провести две выравненные дуги: кратчайшую $\Delta\Gamma_{ij}$ и более длинную $\Delta\check{\Gamma}_{ij}$, то расстояние по дуге $\Delta\Gamma_{ij}$ обозначим через s_{ij}, а по дуге $\Delta\check{\Gamma}_{ij}$ — через $\check{s}_{ij}$, причем s_{ij} и $\check{s}_{ij}$ будем считать положительными. В соответствии с этим геодезические азимуты в точке i дуг $\Delta\Gamma_{ij}$, $\Delta\check{\Gamma}_{ij}$ обозначим через A_{ij} и $\check{A}_{ij}$; как правило, $A_{ij} \neq \check{A}_{ij} \pm 180°$, что будет установлено ниже [Дел. 7].

б) Геодезические широты точек i сфероида отсчитываем в обе стороны от плоскости экватора, от 0 до $\pm\frac{\pi}{2}$. Для северной половины сфероида широты точек i обозначим через B_i и примем положительными; для южной половины широты точек i обозначим через $\overline{B}_i$ и примем отрицательными. Таким образом, широты B_i, $\overline{B}_i$ изменяются в следующих пределах:

$$1)\ 0 \leqslant B_i \leqslant +\frac{\pi}{2}; \quad 2)\ 0 \geqslant \overline{B}_i \geqslant -\frac{\pi}{2}.$$

в) Геодезические долготы точек i сфероида отсчитываем двояко: к востоку и к западу от Гринича, от 0 до $\pm 2\pi$, и обозначим соответственно через L_i и $\overset{\circ}{L}_i$, полагая при этом, что $L_i > 0$, а $\overset{\circ}{L}_i < 0$. Отсюда будем иметь для точки i две разности долгот:

$$1)\ \Delta L_{ij} = L_j - L_i, \quad 2)\ \Delta\overset{\circ}{L}_{ij} = \overset{\circ}{L}_j - \overset{\circ}{L}_i = \overset{\Delta}{L}_{ij}.$$

Такой двойной способ счета долгот и их разностей удобен при решении прямых засечек на сфероиде, а также в некоторых других случаях.

г) Северные и южные вершины выравненной кривой Γ_{ij}, т. е. точки на этой кривой с наименьшим абсолютным значением широты, обозначим: к востоку от начала i—через $O_{ij}^{(s)}$, $\overline{O}_{ij}^{(s)}$, к западу от начала—через $\overset{\circ}{O}_{ij}^{(s)}$, $\overset{\circ}{\overline{O}}{}_{ij}^{(s)}$, где $s=1, 2, \ldots$ есть порядок удаленности вершины данного вида относительно начальной точки i. Соответственно этому широту северных вершин $O_{ij}^{(s)}$, $\overset{\circ}{O}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $B_0^{(ij)}$, а широту южных вершин $\overline{O}_{ij}^{(s)}$, $\overset{\circ}{\overline{O}}{}_{ij}^{(s)}$ — через $\overline{B}_{\overline{0}}^{(ij)}$, причем очевидно $B_0^{(ij)} = -\overline{B}_{\overline{0}}^{(ij)}$. Долготы L точек $O_{ij}^{(s)}$ и $\overline{O}_{ij}^{(s)}$ будем обозначать $L_0^{(ij.s)}$ и $\overline{L}_{\overline{0}}^{(ij.s)}$, долготы $\overset{\circ}{L}$ точек $\overset{\circ}{O}_{ij}^{(s)}$, $\overset{\circ}{\overline{O}}{}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $\overset{\circ}{L}{}_0^{(ij.s)}$, $\overset{\circ}{\overline{L}}{}_0^{(ij.s)}$.

д) Точки пересечения выравненной кривой Γ_{ij} с экватором обозначим: к востоку от начала i — через $Э_{ij}^{(s)}$, а к западу от i—через $\overset{\circ}{Э}{}_{ij}^{(s)}$, где $s = 1, 2, \ldots$ есть порядок удаленности точки пересечения относительно начальной точки i. Соответственно этому долготы L восточных точек $Э_{ij}^{(s)}$ обозначим через $L_э^{(ij.s)}$, а долготы $\overset{\circ}{L}$ западных точек $\overset{\circ}{Э}{}_{ij}^{(s)}$ — через $\overset{\circ}{L}{}_э^{(ij.s)}$. Постоянный же азимут выравненной кривой Γ_{ij} в точках $Э_{ij}^{(s)}$, $\overset{\circ}{Э}{}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $A_э^{(ij)}$.

е) Иногда для точек i, j северной и южной частей сфероида мы будем вводить особые обозначения: точки северной части обозначим через i, j, точки южной части—через $\overline{i}$, $\overline{j}$. Эти и все приведенные выше обозначения различных точек на выравненной кривой Γ_{ij} показаны на рис. 1.

Используя указанные выше обозначения, запишем теперь кратко условия шести расчетных задач, которые можно считать основными для поверхности земного сфероида:

1. Прямая задача для дуги $\Delta\Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij}. Даны B_1, L_1, $A_{1.2}$, $s_{1.2}$; найти B_2, L_2, $s_{1.2}$.

2. Обратная задача для дуги $\Delta\Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij}. Даны B_1, L_1 и B_2, L_2; найти $A_{1.2}$, $A_{2.1}$ и $s_{1.2}$.

3. Прямая выравненнолучевая засечка ($i = 1, 2$; $j = 3$). Даны B_1, L_1, $A_{1.3}$ и B_2, L_2, $A_{2.3}$; найти B_3, L_3, а также $A_{3.1}$, $s_{1.3}$ и $A_{3.2}$, $s_{2.3}$.

4. Прямая задача для дуги $\Delta\Pi_{ij}$ параллели Π_{ij} ($i = 1$, $j = 2$). Даны $B_1 = B_2$ и $\Delta L_{1.2}$; найти $п_{1.2}$.

б) Геодезические широты точек i сфероида отсчитываем в обе стороны от плоскости экватора, от 0 до $\pm\frac{\pi}{2}$. Для северной половины сфероида широты точек i обозначим через B_i и примем положительными; для южной половины широты точек i обозначим через $\overline{B}_i$ и примем отрицательными. Таким образом, широты B_i, $\overline{B}_i$ изменяются в следующих пределах:

$$1)\ 0 \leqslant B_i \leqslant +\frac{\pi}{2}; \quad 2)\ 0 \geqslant \overline{B}_i \geqslant -\frac{\pi}{2}.$$

в) Геодезические долготы точек i сфероида отсчитываем двояко: к востоку и к западу от Гринича, от 0 до $\pm 2\pi$, и обозначим соответственно через L_i и $\mathring{L}_i$, полагая при этом, что $L_i > 0$, а $\mathring{L}_i < 0$. Отсюда будем иметь для точки i две разности долгот:

$$1)\ \Delta L_{ij} = L_j - L_i, \quad 2)\ \Delta\mathring{L}_{ij} = \mathring{L}_j - \mathring{L}_i = \overset{\Delta}{L}_{ij}.$$

Такой двойной способ счета долгот и их разностей удобен при решении прямых засечек на сфероиде, а также в некоторых других случаях.

г) Северные и южные вершины выравненной кривой Γ_{ij}, т. е. точки на этой кривой с наименьшим абсолютным значением широты, обозначим: к востоку от начала i—через $O_{ij}^{(s)}$, $\overline{O}_{ij}^{(s)}$, к западу от начала—через $\mathring{O}_{ij}^{(s)}$, $\mathring{\overline{O}}_{ij}^{(s)}$, где $s=1, 2, \ldots$ есть порядок удаленности вершины данного вида относительно начальной точки i. Соответственно этому широту северных вершин $O_{ij}^{(s)}$, $\mathring{O}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $B_0^{(ij)}$, а широту южных вершин $\overline{O}_{ij}^{(s)}$, $\mathring{\overline{O}}_{ij}^{(s)}$ — через $\overline{B}_{\overline{0}}^{(ij)}$, причем очевидно $B_0^{(ij)} = -\overline{B}_{\overline{0}}^{(ij)}$. Долготы L точек $O_{ij}^{(s)}$ и $\overline{O}_{ij}^{(s)}$ будем обозначать $L_0^{(ij.s)}$ и $\overline{L}_{\overline{0}}^{(ij.s)}$, долготы $\mathring{L}$ точек $\mathring{O}_{ij}^{(s)}$, $\mathring{\overline{O}}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $\mathring{L}_0^{(ij.s)}$, $\mathring{\overline{L}}_0^{(ij.s)}$.

д) Точки пересечения выравненной кривой Γ_{ij} с экватором обозначим: к востоку от начала i — через $Э_{ij}^{(s)}$, а к западу от i—через $\mathring{Э}_{ij}^{(s)}$, где $s = 1, 2, \ldots$ есть порядок удаленности точки пересечения относительно начальной точки i. Соответственно этому долготы L восточных точек $Э_{ij}^{(s)}$ обозначим через $L_э^{(ij.s)}$, а долготы $\mathring{L}$ западных точек $\mathring{Э}_{ij}^{(s)}$ — через $\mathring{L}_э^{(ij.s)}$. Постоянный же азимут выравненной кривой Γ_{ij} в точках $Э_{ij}^{(s)}$, $\mathring{Э}_{ij}^{(s)}$ обозначим через $A_э^{(ij)}$.

е) Иногда для точек i, j северной и южной частей сфероида мы будем вводить особые обозначения: точки северной части обозначим через i, j, точки южной части—через $\overline{i}$, $\overline{j}$. Эти и все приведенные выше обозначения различных точек на выравненной кривой Γ_{ij} показаны на рис. 1.

Используя указанные выше обозначения, запишем теперь кратко условия шести расчетных задач, которые можно считать основными для поверхности земного сфероида:

1. Прямая задача для дуги $\Delta\Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij}. Даны B_1, L_1, $A_{1.2}$, $s_{1.2}$; найти B_2, L_2, $s_{1.2}$.

2. Обратная задача для дуги $\Delta\Gamma_{ij}$ выравненной нити Γ_{ij}. Даны B_1, L_1 и B_2, L_2; найти $A_{1.2}$, $A_{2.1}$ и $s_{1.2}$.

3. Прямая выравненнолучевая засечка ($i = 1, 2$; $j = 3$). Даны B_1, L_1, $A_{1.3}$ и B_2, L_2, $A_{2.3}$; найти B_3, L_3, а также $A_{3.1}$, $s_{1.3}$ и $A_{3.2}$, $s_{2.3}$.

4. Прямая задача для дуги $\Delta\Pi_{ij}$ параллели Π_{ij} ($i = 1$, $j = 2$). Даны $B_1 = B_2$ и $\Delta L_{1.2}$; найти $п_{1.2}$.

а) конечное

$$S_{ij}^{h\kappa} = b^2 \cdot \Delta L_{ij} \int\limits_{B_i}^{B_h} \frac{\cos B\, dB}{(1-e^2 \sin^2 B)^2} =$$

$$= \frac{b^2}{2} \cdot \Delta L_{ij} \left[\frac{\sin B}{1 - e^2 \sin^2 B} + \frac{1}{2e} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right] \Bigg|_{B_i}^{B_h}. \tag{3}$$

б) в виде сходящегося ряда

$$S_{ij}^{h\kappa} = b^2 \cdot \Delta L_{ij} \int\limits_{B_i}^{B_h} \sum_{\lambda=0}^{n} \binom{-2}{\lambda} (- e^2 \sin^2 B)^{\lambda} \cos B dB =$$

$$= b^2 \cdot \Delta L_{ij} \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^{\lambda} \frac{\binom{-2}{\lambda}}{\lambda + 1} e^{2\lambda} \sin^{2\lambda+1} B \Bigg|_{B_i}^{B_h}, \tag{4}$$

где a и b — большая и малая полуоси земного сфероида, а

$$1)\ e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad 2) \binom{m}{\lambda} = \frac{m\,(m-1) \ldots [m - (\lambda - 1)]}{1.2 \ldots, \lambda},$$

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1. \tag{5}$$

Отсюда видно, что основное внимание должно быть уделено первым трем задачам (1) — (3), над усовершенствованием и обобщением решения которых трудится немало геодезистов во всех странах.

Дел. 3. Получение общих выражений, лежащих в основе решения первых трех задач

1. Для решения первых двух задач (1), (2) было предложено более десятка частных способов, пригодных для расстояний $s_{1.2}$ не более 1000 — 3000 *км*, и один общий способ, принадлежащий Бесселю [1], — для любых расстояний $s_{1.2}$. Что касается третьей задачи (3), то пока не было найдено достаточно простых и одновременно совершенно общих способов ее решения.

Учитывая сказанное, мной открыт и разработан еще один общий способ решения первых двух задач (1), (2), в котором вопрос о возможных соотношениях между исходными и определяемыми величинами рассмотрен с предельной полнотой. На основе выведенных при решении этих задач рабочих выражений найдены два независимых способа решения последней задачи—прямой сфероидической засечки. Сущность предлагаемых способов рассматривается ниже, причем вначале мы получим свод исходных замкнутых выражений, из которого выведем затем соответствующие рабочие выражения для решения упомянутых трех основных задач (1) — (3).

2. В основу новых способов положен свод трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, который определяет выравненную нить Γ земного сфероида, проведенную через точку $C(B,\ L)$ под азимутом A:

$$\left\{\begin{aligned} &M\,dB + 0\cdot dL - \cos A\,ds + 0\cdot dA = 0,\\ &0\cdot dB + r\,dL - \sin A\,ds + 0\cdot dA = 0,\\ &0\cdot dB + \sin A dL + 0.ds - 1\cdot dA = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Кроме того, используется вытекающее из этого свода известное уравнение Клеро

$$r \sin A = h = r_0 = \text{пост.} \tag{7}$$

Здесь M и r суть радиусы кривизны меридиана и параллели в переменной точке C заданной выравненной нити Γ сфероида, выходящей из C под азимутом A; постоянная h есть, очевидно, радиус параллели r_0 в вершине O выравненной кривой Γ, т. е. в точке, где азимут $A = A_0 = 90^\circ$ или 270°.

3. Используя указанную совокупность равенств (6), (7), найдем сначала значения ds, dL и dA в функции широты B. Имеем прежде всего:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \sin A = \frac{h}{r}; \quad 2)\ \cos A = \frac{\cos A}{|\cos A|}\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{r};\\ &3)\ \beta = \frac{\cos A}{|\cos A|} = \frac{dB}{|dB|} = \pm 1;\\ &4)\ \beta\,ds = Mr\frac{dB}{\sqrt{r^2-h^2}}; \quad 5)\ \beta\,dL = h\frac{M}{r}\frac{dB}{\sqrt{r^2-h^2}};\\ &6)\ dA = h\frac{M}{r}\frac{\sin B\,dB}{\sqrt{r^2-h^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Множитель $\beta = \pm 1$ введен здесь потому, что ds принимаем всегда $\geqslant 0$, $\sqrt{r^2-h^2}$ считаем здесь $\geqslant 0$, и, следовательно, при этих условиях имеем:

Таблица 1

$0 \leqslant A < \frac{\pi}{2}$	$\sin A \geqslant 0$	$\cos A \geqslant 0$	$dB \geqslant 0$	$dL \geqslant 0$	$dA \geqslant 0$
$\frac{\pi}{2} \leqslant A < \pi$	$\sin A \geqslant 0$	$\cos A \leqslant 0$	$dB \leqslant 0$	$dL \geqslant 0$	$dA \geqslant 0$
$\pi \leqslant A < \frac{3}{2}\pi$	$\sin A \leqslant 0$	$\cos A \leqslant 0$	$dB \leqslant 0$	$dL \leqslant 0$	$dA \leqslant 0$
$\frac{3}{2}\pi \leqslant A < 2\pi$	$\sin A \leqslant 0$	$\cos A \geqslant 0$	$dB \geqslant 0$	$dL \leqslant 0$	$dA \leqslant 0$

Учитывая теперь, что

$$\left.\begin{aligned} &1)\ M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}; \quad 3)\ e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2};\\ &2)\ r = \frac{a\cos B}{W} = \frac{a\cos B}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}}; \quad 4)\ e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

подсчитаем отдельно величины

$$Mr, \quad \frac{M}{r}, \quad \sqrt{r^2-h^2},$$

входящие в (8). Мы получим после простых преобразований

$$1)\ Mr = a(1-e^2)\frac{\cos B}{W^4};\qquad 2)\ \frac{M}{r} = \frac{1-e^2}{W^2\cos B};$$
$$3)\ \sqrt{r^2-h^2} = \frac{a}{W}\sqrt{\cos^2 B - \frac{h^2}{a^2}W^2}. \tag{10}$$

В (10.3) введем обозначение:

$$\frac{r^2}{a^2}\sin^2 A = \frac{h^2}{a^2} = \sin^2 A_э = \nu^2 \leqslant 1, \tag{11}$$

где $A_э$ есть, очевидно, азимут выравненной кривой Γ в точке $Э$ ее пересечения с экватором. Тогда вместо (10.3) получим:

$$\sqrt{r^2-h^2} = \frac{a\sqrt{1-\nu^2}}{W}\sqrt{1-\frac{1-e^2\nu^2}{1-\nu^2}\sin^2 B}.$$

Если затем введем новое обозначение

$$\frac{1-e^2\nu^2}{1-\nu^2} = \tau^2 \geqslant 1, \tag{12}$$

то для $\sqrt{r^2-h^2}$ будем иметь окончательно:

$$\sqrt{r^2-h^2} = \frac{a\sqrt{1-\nu^2}}{W}\sqrt{1-\tau^2\sin^2 B}. \tag{13}$$

Вставим теперь найденные для Mr, $\frac{M}{r}$ и $\sqrt{r^2-h^2}$ выражения (10.1), (10.2) и (13) в исходные равенства (8). Тогда с учетом обозначений (11), (12) получим:

$$\left\{\begin{aligned} &1)\ \beta\, ds = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-\nu^2}}\cdot\frac{\cos B\, dB}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}\sqrt{1-\tau^2\sin^2 B}}.\\ &2)\ \beta\, dL = \frac{\nu(1-e^2)}{\sqrt{1-\nu^2}}\cdot\frac{dB}{\cos B\sqrt{(1-e^2\sin^2 B)(1-\tau^2\sin^2 B)}},\\ &3)\ dA = \frac{\nu(1-e^2)}{1-\nu^2}\cdot\frac{\operatorname{tg} B\, dB}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 B)(1-\tau^2\sin^2 B)}}.\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Равенства (14) являются искомым развернутым представлением дифференциалов ds, dL и dA в функции широты B текущей точки C на выравненной нити Γ сфероида. Входящие в эти равенства величины ν^2 и τ^2 определяются согласно (7), (11) и (12).

4. Выразим еще ds и dL в функции азимута A выравненной нити Γ в той же текущей точке C сфероида. Из (6.1) и (6.2) прежде всего найдем:

$$1)\ ds = \frac{r\,dL}{\sin A} = a\frac{r}{a}\sin A\,\frac{dL}{\sin^2 A} = a\nu\operatorname{cosec}^2 A\, dL;$$
$$2)\ dL = \frac{dA}{\sin B}. \tag{15}$$

Но из того же равенства (11) получим более развернуто:

$$\nu^2 = \frac{r^2}{a^2}\sin^2 A = \frac{\sin^2 A\cos^2 B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}},$$

откуда обратно

$$\sin B = \sqrt{\frac{\sin^2 A - \nu^2}{\sin^2 A - e^2 \nu^2}}. \tag{16}$$

Таким образом, окончательно

$$\begin{cases} 1)\ ds = a\nu \sqrt{\dfrac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}} \operatorname{cosec}^2 A\, dA, \\ 2)\ dL = \sqrt{\dfrac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}}\, dA. \end{cases} \tag{17}$$

Равенства (17) являются искомыми.

5. Равенства (14), выражающие ds, dL и dA в функции широты B, имеют сложный вид и потому перед интегрированием должны быть упрощены путем введения новых переменных.

Упростим сначала равенства (14.1) и (14.2) для ds и dL. Введя вместо широты B новое переменное φ с помощью подстановки

$$\tau \sin B = \sin \varphi, \tag{18}$$

получим отсюда, имея в виду строение равенств (14.1) и (14.2):

$$\begin{aligned} &1)\ \cos B\, dB = \frac{1}{\tau} \cos \varphi\, d\varphi; && 4)\ \frac{dB}{\cos B} = \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{\tau^2 \cos^2 B}; \\ &2)\ \sqrt{1 - \tau^2 \sin^2 B} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \cos \varphi; && 5)\ \cos^2 B = 1 - \sin^2 B = \\ &3)\ 1 - e^2 \sin^2 B = 1 - \frac{e^2}{\tau^2} \sin^2 \varphi. && = 1 - \frac{1}{\tau^2} \sin^2 \varphi. \end{aligned} \tag{19}$$

Вставляя теперь выражения (19) в равенства (14.1), (14.2) и учитывая (12), найдем:

$$1)\ \beta\, ds = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \nu^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\left(1 - \dfrac{e^2}{\tau^2} \sin^2 \varphi\right)^{3/2}}; \tag{20}$$

$$2)\ \beta\, dL = \frac{\nu(1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \nu^2}} \cdot \frac{d\varphi}{\left(1 - \dfrac{1}{\tau^2} \sin^2 \varphi\right) \sqrt{1 - \dfrac{e^2}{\tau^2} \sin^2 \varphi}}.$$

Введем в (20) обозначения:

$$1)\ \frac{1 - e^2}{\sqrt{1 - e^2 \nu^2}} = \mu; \quad 2)\ \frac{e^2}{\tau^2} = \kappa^2 \leqslant e^2; \quad 3)\ \frac{1}{\tau^2} = m^2 \leqslant 1. \tag{21}$$

Тогда вместо (20) получим следующие окончательные выражения для ds и dL в функции нового переменного φ, определяемого соотношением (18):

$$\begin{cases} 1)\ \beta\, ds = a\mu \dfrac{d\varphi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}; \\ 2)\ \beta\, dL = \nu\mu \dfrac{d\varphi}{(1 - m^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}}. \end{cases} \tag{22}$$

6. Упростим теперь найденное выше выражение (14.3) дифференциала dA через широту B. С этой целью введем подстановку

$$\sec^2 B = y. \tag{23}$$

Тогда после простых преобразований равенства (14.3) получим следующее окончательное выражение дифференциала dA в зависимости от нового переменного y:

$$dA = \frac{\nu(1-e^2)}{2\sqrt{1-\nu^2}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\lambda_1 y^2 + 2\lambda_2 y + \lambda_3}}, \tag{24}$$

где введены обозначения:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \lambda_1 = (1-e^2)(1-\tau^2) = -\frac{\nu^2(1-\nu^2)^2}{1-\nu^2} \leqslant 0,\\ &2)\ 2\lambda_2 = (1-e^2)\tau^2 + (1-\tau^2)e^2 = \frac{(1-e^2)(1-2e^2\nu^2)}{1-\nu^2},\\ &3)\ \lambda_3 = e^2\tau^2 = \frac{e^2(1-e^2\nu^2)}{1-\nu^2}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

7). Найдя окончательные выражения (14.1), (14.2) для ds и dL, а также получив выражение (24) с учетом (23), (25) для dA, перейдем от них, наконец, к соответствующим интегральным соотношениям. Такой же интегральный переход произведем с равенствами (17) для ds и dL. Осуществляя тогда попутное решение простого алгебраического интеграла, вытекающего из равенства (24), и используя также уравнение Клеро (7), получим следующую совокупность замкнутых выражений для дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ выравненной нити $\Gamma_{1.2}$ земного сфероида:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \beta\cdot s_{1.2} = a\rho\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{(1-\kappa^2\sin^2\varphi)^{3/2}};\\ &2)\ s_{1.2} = a\nu\int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu^2}{\sin^2 A-\nu^2}}\operatorname{cosec} A\,dA\\ &3)\ \beta\cdot\Delta L_{1.2} = \nu\mu\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{(1-m^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi}};\\ &4)\ \Delta L_{1.2} = \int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu^2}{\sin^2 A-\nu^2}}\,dA\\ &5)\ 2\cdot\Delta A_{1.2} = \arcsin\left[2\nu^2(1-\nu^2)\sec^2 B - (1-2e^2\nu^2)\right]\Big|_{B_1}^{B_2};\\ &5a)\ 2\cdot\Delta A_{1.2} = \arcsin(1-2\sin^2 A_{1.2}) - \arcsin(1-2g^2\sin^2 A_{1.2});\\ &6)\ \operatorname{ctg} A_{1.2} = \frac{V_2\cos B_1 - V_1\cos B_2\cos\Delta A_{1.2}}{V_2\cos B_1\sin\Delta A_{1.2}} = \frac{g-\cos\Delta A_{1.2}}{\sin\Delta A_{1.2}}; \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned}
&7)\ -\operatorname{ctg} A'_{2.1}=\frac{V_1\cos B_2-V_2\cos B_1\cos\Delta A_{1.2}}{V_1\cos B_2\sin\Delta A_{1.2}}=\\
&\qquad=\frac{(1:g)-\cos\Delta A_{1.2}}{\sin\Delta A_{1.2}};\\
&8)\ \sin A_{1.2}=\frac{a\nu}{r_1}=\sqrt{1-e^2}\,\frac{\nu V_1}{\cos B_1};\\
&9)\ \sin A'_{2.1}=\frac{a\nu}{r_2}=\sqrt{1-e^2}\,\frac{\nu V_2}{\cos B_2};\\
&10)\ L_2=L_1+\Delta L_{1.2};\ 11)\ A_{2.1}=A'_{2.1}\pm180^\circ=(A_{1.2}+\Delta A_{1.2})\pm180^\circ.
\end{aligned}\right| \tag{26}$$

В равенствах (26) введены обозначения:

$$\left\{\begin{aligned}
&1)\ V=\sqrt{1+e'^2\cos^2 B}; && 6)\ m^2=1:\tau^2=m^2_{1.2};\\
&2)\ \nu=\frac{r_1}{a}\sin A_{1.2}= && 7)\ \sin\varphi=\tau\sin B;\\
&=\sqrt{1+e'^2}\,\frac{\cos B_1\sin A_{1.2}}{V_1}=\nu_{1.2}; &&\\
&3)\ \mu=\frac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2\nu^2}}=\mu_{1.2}; && 8)\ g=\frac{V_2\cos B_1}{V_1\cos B_2};\\
&4)\ \tau^2=\frac{1-e^2\nu^2}{1-\nu^2}=\tau^2_{1.2}; && 9)\ e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2};\\
&5)\ \kappa^2=e^2:\tau^2=\kappa^2_{1.2}; && 10)\ e'^2=\frac{a^2-b^2}{b^2};\\
&11)\ \beta=\frac{\cos A_{1.2}}{|\cos A_{1.2}|}=\frac{B_2-B_1}{|B_2-B_1|}=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{|\varphi_2-\varphi_1|}=\beta_{1.2}=\pm1. &&
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

a и b — большая и малая полуоси земного сфероида.

Свод (26) обладает двумя примечательными особенностями:

а) равенство (26.1) имеет тот же вид, что и известное выражение для длины $x_{1.2}$ дуги меридиана $\Delta X_{1.2}$:

$$\beta x_{1.2}=a(1-e^2)\int_{B_1}^{B_2}\frac{dB}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}. \tag{28}$$

Легко видеть, что (28) получится из (26.1), если в (27.2) — (27.7) внести азимут $A_{1.2}$ выравненной дуги $\Delta X_{1.2}$, равный 0;

б) величины $s_{1.2}$ и $\Delta L_{1.2}$ выражены не только через широту B в текущей точке C дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ выравненной нити $\Gamma_{1.2}$ сфероида, но и в зависимости от азимута A дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ в той же текущей точке C. Это дает возможность осуществить поверку искомых величин несколькими путями.

8. Свод (26) является единой основой для предложенных мной новых общих способов решения первых трех расчетных задач (1)—(3) на земном сфероиде. Не имея возможности по недостатку места дать подробное решение входящих в этот свод эллиптических интегра-

лов (26.1) — (26.4), я ограничусь в дальнейшем лишь применением в указанных выше задачах (1) — (3) соответствующих рабочих выражений для интегралов (26.1) — (26.4). Здесь же только очень кратко намечу пути получения этих рабочих выражений.

Интегралы (26.1) и (26.3) являются частными случаями приведенного по Лежандру эллиптического интеграла 3 рода $\Pi(\varphi, \kappa, n)$:

$$\Pi(\varphi, \kappa, n) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n\sin^2\varphi)\sqrt{1 - \kappa^2\sin^2\varphi}} \quad (n \gtrless 0,\ 0 \leqslant \kappa^2 \leqslant 1), \tag{29}$$

решение которого согласно [2] может быть представлено в следующем конечном виде через эллиптические функции Якоби и тэта-функции:

$$\Pi(\varphi, \kappa, n) = \int_0^u \frac{du}{1 + n\,\mathrm{sn}^2 u} = u + \frac{\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta}\left[\frac{\vartheta_4'(\beta)}{\vartheta_4(\beta)} + \frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_4(u-\beta)}{\vartheta_4(u+\beta)}\right],$$

где (30)

$$1)\ u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2\,\mathrm{sn}^2\varphi}} = F(\varphi, \kappa); \quad 2)\ \mathrm{sn}^2\beta = -n : \kappa^2. \tag{31}$$

Однако применение выражений (30) и (31) к решению интегралов (26.1) и (26.3) при очень малом значении κ^2 ($\kappa^2 \leqslant e^2 = 0.0066934$ для сфероида Красовского) оказывается крайне невыгодным:

а) требуется предварительный подсчет некоторых вспомогательных величин;

б) для интеграла (26.1) равенство (30) приобретает неопределенный вид $\frac{0}{0}$, раскрытие которого еще более осложняет это равенство;

в) для интеграла (26.3) решение его согласно (30) будет неточным, так как при $-n = m^2 \gg \kappa^2$ значение $\mathrm{sn}\,\beta$ определится из (31) весьма ненадежно ($\mathrm{sn}\,\beta$ становится в этом случае очень большим по модулю).

Учитывая сказанное, а также малость κ^2 для земного сфероида, целесообразнее будет интеграл (26.1) найти разложением в ряд по степеням κ^2.

По тем же соображениям интеграл (26.3), после разложения в ряд по степеням κ^2, решим по способу, предложенному в 1935 году проф. В. П. Ветчинкиным в [3].

Что касается остальных двух интегралов (26.2) и (26.4), то они являются эллиптическими интегралами общего вида, и их преобразование к выражению, содержащему только приведенные по Лежандру эллиптические интегралы 1 — 3 рода $F(\varphi, \kappa)$, $E(\varphi, \kappa)$ и $\Pi(\varphi, \kappa, n)$, потребует большой затраты вычислительного труда. Поэтому интегралы (26.2), (26.4) получим разложением числителя $(\sin^2 A - e^2\nu^2)^{1/2}$ в ряд по степеням малой величины $e^2\nu^2$, или же найдем численным интегрированием по Гауссу.

Наконец, отметим то важное обстоятельство, что при заданном e^2 интегралы (26.1) и (26.3) содержат только два параметра: интеграл (26.1) — параметры φ и κ^2, интеграл (26.3) — параметры φ и m^2. Поэтому указанные интегралы могут быть представлены в виде таблиц с двумя входами, наподобие приведенного эллиптического интеграла 1 рода $F(\varphi, \kappa)$. Наличие таких таблиц существенно облегчает решение задач, в которых используются эти интегралы (см. дальше).

Дел. 4. Решение прямой задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ на сфероиде

Приведем лишь с очень краткими пояснениями совокупности расчетных выражений для решения предлагаемым способом прямой задачи (1) при различных условиях относительно значений величин, входящих в эту задачу.

Условие задачи: Даны B_1, L_1, $A_{1.2}$, $s_{1.2}$. Найти B_2, $A_{2.1}$, L_2.

1. Определение B_2

1) $V_1 = \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 B_1}$ — из геодезических таблиц;

2) $\nu = \sqrt{1+e'^2}\,\dfrac{\cos B_1 \sin A_{1.2}}{V_1}$; 5) $\kappa^2 = \dfrac{e^2}{\tau^2} \leqslant e^2$;

3) $\rho = \dfrac{1-e^2}{\sqrt{1-e^2\nu^2}}$; 4) $\tau^2 = \dfrac{1-e^2\nu^2}{1-\nu^2} \geqslant 1$; 6) $\sin\varphi_1 = \tau \sin B_1$;

$$7)\quad C_0 = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^{\lambda} \frac{\begin{pmatrix} -3/2 \\ \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}}{2^{2\lambda}} \kappa^{2\lambda} = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} c_{0.2\lambda} \kappa^{2\lambda};$$

$$8)\quad C_{2u} = \sum_{\lambda=u}^{n} (-1)^{\lambda-u} \frac{\begin{pmatrix} -3/2 \\ \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda-u \end{pmatrix}}{2^{2\lambda}\cdot u} \kappa^{2\lambda} = \sum_{\lambda=u}^{n} c_{2u,2\lambda} \kappa^{2\lambda};$$

$$9)\quad \frac{C_{2u}}{C_0} = D_{2u}; \quad (u=1,2,\ldots,n);$$

$$10)\quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{1.2} = \frac{\beta\cdot s_{1.2}}{C_0 a\rho} - \sum_{u=1}^{n} D_{2u}(\sin 2u\varphi_2 - \sin 2u\varphi_1); \quad \frac{\beta\cdot s_{1.2}}{C_0 a\rho} = Q;$$

11) $\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_{1.2}$; 12) $\sin B_2 = \dfrac{1}{\tau}\sin\varphi_2$.

Расчет $\Delta\varphi_{1.2}$ согласно (10) мы производим из-за незнания φ_2 путем последовательных приближений, а еще быстрее — следующим образом:

а) $\varphi_2^{(0)} = \varphi_1 + \dfrac{\beta s_{1.2}}{C_0 a\rho}$; *б)* $\Delta\varphi_{1.2}^{(0)} = \dfrac{\beta s_{1.2}}{C_0 a\rho} - \displaystyle\sum_{u=1}^{n} D_{2u}(\sin 2u\,\varphi_2^{(0)} - \sin 2u\varphi_1)$;

в) $\dfrac{\partial}{\partial\varphi_2}\Delta\varphi_2^{(0)} = \varkappa = \displaystyle\sum_{u=1}^{n} 2u\, D_{2u}\cos 2u\,\varphi_2^{(0)}$; *г)* $\Delta\varphi_{1.2} = \dfrac{\Delta\varphi_{1.2}^{(0)}}{1-\varkappa}$.

Если $\Delta\varphi_{1.2}$ мало, то от $\Delta\varphi_{1.2}$ переходим сначала к $\Delta B_{1.2}$, затем — к B_2.

$$11a)\quad \Delta B''_{1.2} = (\operatorname{tg} B_1 \operatorname{ctg}\varphi_1)\Delta\varphi''_{1.2} - \frac{\operatorname{tg} B_1}{2\rho}(\Delta\varphi^2_{1.2} - \Delta B^2_{1.2})'' - \frac{1}{6\rho^2}\left[(\operatorname{tg} B_1 \operatorname{ctg}\varphi_1)\Delta\varphi^3_{1.2} - \Delta B^3_{1.2}\right]'';$$

12*a*) $B_2 = B_1 + \Delta B_{1.2}$; $\rho = 206264.8$.

При $\Delta\varphi_{1.2}$ малом можно вычислять $\Delta\varphi_{1.2}$ иначе:

$$10a)\ \Delta\varphi''_{1.2} = \beta\rho'' \frac{s_{1.2} W_1^3}{a\mu} - \frac{3\kappa^2}{4W_1^2}\left[\sin 2\varphi_1 + \frac{2}{3}\left(\cos 2\varphi_1 + \frac{5\kappa^2 \sin^2\varphi_1}{4W_1^2}\right)\cdot \frac{\Delta\varphi''_{1.2}}{\rho}\right]\frac{(\Delta\varphi''_{1.2})^2}{\rho},$$

где

13) $W_1 = \sqrt{1-\kappa^2\sin^2\varphi_1} = \sqrt{1-e^2\sin^2 B_1} = \dfrac{V_1}{\sqrt{1+e'^2}}$ — из геодезических таблиц.

2. Определение $A_{2.1}$

$$1)\ \sin A'_{2.1} = \sqrt{1-e^2}\ \frac{\nu V_2}{\cos B_2};$$

$$2)\ A_{2.1} = A'_{2.1} \pm 180^\circ = (A_{1.2} + \Delta A_{1.2}) \pm 180^\circ.$$

а) Если $A'_{2.1}$ близко к 90° или 270°, но $B_2 - B_1 = \Delta B_{1.2}$ велико, то вместо $A'_{2.1}$ вычисляют $\Delta A_{1.2}$:

$$3)\ g = \frac{V_2\cos B_1}{V_1 \cos B_2};$$

$$4)\ 2\cdot\Delta A_{1.2} = \arcsin(1 - 2\sin^2 A_{1.2}) - \arcsin(1 - 2g^2\sin^2 A_{1.2}).$$

б) Если $B_2 - B_1 = \Delta B_{1.2}$ мало, то вместо $A'_{2.1}$ можно также вычислить $\Delta A_{1.2}$:

$$4a)\ 2\cdot\Delta A''_{1.2} = \rho''\frac{\varepsilon}{\sin 2A_{1.2}}\left[1 + \frac{\cos 2A_{1.2}}{2\sin^2 2A_{1.2}}\varepsilon + \frac{1+2\cos^2 2A_{1.2}}{6\sin^4 2A_{1.2}}\varepsilon^2\right],$$

где $\quad 5)\ \varepsilon = 2(g^2 - 1)\sin^2 A_{1.2}.$

3. Поверка вычисления B_2 и $A_{2.1}$

Так как согласно (26.1) и (26.9) обратный азимут $A_{2.1} = A'_{2.1} \pm 180^\circ = F(s_{1.2}, \nu, B_2)$, то вычисленные B_2 и $A_{2.1}$ поверяются совместно равенством (26.2) — вторым выражением для $s_{1.2}$:

$$s_{1.2} = a\nu\int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}}\sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}}\operatorname{cosec}^2 A\, dA.$$

Подсчитывая этот интеграл тремя различными путями:

а) разложением числителя $(\sin^2 A - e^2\nu^2)^{1/2}$ в ряд по степеням малой величины $e^2\nu^2$,

б) численным интегрированием по Гауссу,

в) разложением интеграла вблизи среднего значения $\overline{A}_{1.2} = \dfrac{1}{2}(A_{1.2} + A'_{2.1})$ в ряд по степеням разности $\Delta A_{1.2} = A'_{2.1} - A_{1.2}$

получим три соответствующих способа поверки B_2 и $A_{2.1}$.

4. Определение L_2

1) $\sqrt{1-m^2} = p$; 2) $\varphi_{1.2} = \dfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$; 3) $\Delta\varphi_{1.2} = \varphi_2 - \varphi_1$;

4) $\operatorname{tg}\varphi = t$; 5) $\beta = \dfrac{\Delta\varphi_{1.2}}{|\Delta\varphi_{1.2}|}$; 6) $\operatorname{arc\,tg}(pt) = \vartheta$;

7) $\nu\mu = \dfrac{\nu}{|\nu|} p\sqrt{1-e^2}$; 8) $\dfrac{\nu}{|\nu|} p = \dfrac{\nu\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\nu^2}}$; 9) $\nu = \dfrac{\nu}{|\nu|}\dfrac{p}{\sqrt{(1-e^2)-p^2}}$;

10) $g(\lambda) = (-1)^{\lambda}\begin{pmatrix}-1/2\\ \lambda\end{pmatrix}\kappa^{2\lambda}$; 11) $\Phi(\lambda) = \displaystyle\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi}{1-m^2\sin^2\varphi}$;

$$12)\ F(\lambda) = g(\lambda)\,\Phi(\lambda);$$
$$(\lambda = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Из (10) — (12) найдем последовательно:

$$13)\ F(0) = \Phi(0) = \frac{1}{p}\left[\operatorname{arc\,tg}(pt_2) - \operatorname{arc\,tg}(pt_1)\right] = p\left[\vartheta_2 - \vartheta_1\right].$$

$$14)\ F(\lambda) = E(\lambda)\left[S(\lambda-1) - \Phi(\lambda-1)\right],\quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

где обозначено:

$$15)\ E(\lambda) = -\frac{g(\lambda)}{m^2} = (-1)^{\lambda+1}\begin{pmatrix}-1/2\\ \lambda\end{pmatrix}\frac{\kappa^{2\lambda}}{m^2};$$

$$16)\ S(\lambda-1) = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sin^{2(\lambda-1)}\varphi\, d\varphi.$$

Интегрируя (16), получим для функции $S(\lambda-1)$, входящей в (14):

$$17)\ S(0) = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{1.2},\quad (\lambda = 1);$$

$$18)\ S(\lambda-1) = S(\omega) = \frac{1}{2^{2\omega}}\left\{\begin{pmatrix}2\omega\\ \omega\end{pmatrix}(\varphi_2-\varphi_1) + (-1)^{\omega}\sum_{\varkappa=0}^{\omega-1}(-1)^{\varkappa}\frac{\begin{pmatrix}2\omega\\ \omega\end{pmatrix}}{\omega-\varkappa}\times\right.$$
$$\left.\times\Big[\sin 2(\lambda-\varkappa)\varphi_2 - \sin 2(\lambda-\varkappa)\varphi_1\Big]\right\},\qquad (\lambda - 1 = \omega = 1, 2, \ldots, n).$$

После определения функций $F(\lambda)$ искомые значения $\Delta L_{1.2}$ и L_2 подсчитаем так:

$$19)\ \beta\cdot\Delta L_{1.2} = \nu\mu\sum_{\lambda=0}^{n}F(\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{n}\nu\mu\,F(\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{n}R(\lambda);\quad 20)\ L_2 = L_1 + \Delta L_{1.2}.$$

Ниже даются рабочие выражения для первых пяти членов $\nu\mu F(\lambda) = R(\lambda)$ в равенстве (19):

$$20)\ \nu\mu\,F(0) = \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\left[\operatorname{arc\,tg}(pt_2) - \operatorname{arc\,tg}(pt_1)\right] =$$
$$= \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\left[\vartheta_2 - \vartheta_1\right] = \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\,\Delta\vartheta_{1.2} = R(0);$$

но если $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi_{1.2}$ невелико или если одна из величин φ_1, φ_2 близка к $\dfrac{\pi}{2}$, то лучше

$$20a)\ \nu\mu\,F(0) = \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{p\sin\Delta\varphi_{1.2}}{\cos\Delta\varphi_{1.2} - m^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2}.$$

$$21)\ \nu\wp F(1) = -\frac{e^2}{2}\nu\mu(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{1}{2}e^2 R(0) =$$

$$= \frac{\nu}{|\nu|}\frac{e^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,[(\vartheta_2-\vartheta_1)-p(\varphi_2-\varphi_1)] = R(1);$$

$$22)\ \nu\wp F(2) = -\frac{3}{16}e^2\kappa^2\nu\wp\left[(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right]+$$

$$+\frac{3}{4}e^2 R(1) = R(2);$$

$$23)\ \nu\wp F(3) = -\frac{5}{16}e^2\kappa^4\nu\wp\left[\frac{3}{8}(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{32}(\sin 4\varphi_2-\sin 4\varphi_1)\right]+\frac{5}{6}e^2 R(2) = R(3);$$

$$24)\ \nu\wp F(4) = -\frac{35}{128}e^2\kappa^6\nu\wp\left[\frac{5}{16}(\varphi_2-\varphi_1)-\frac{15}{64}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{64}(\sin 4\varphi_2-\sin 4\varphi_1)-\frac{1}{192}(\sin 6\varphi_2-\sin 6\varphi_1)\right]+\frac{7}{8}e^2 R(3) = R(4).$$

5. Заключительная поверка

Заключительную поверку найденных B_2, $A_{1.2}$ и $\Delta L_{1.2}$ производим, используя равенство [Дел. 3; (26.4)]:

$$\Delta L_{1.2} = \int_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2\nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}}\,dA.$$

Здесь так же, как и выше в разд. 3 для $s_{1.2}$, возможны три способа поверки.

Дел. 5. Решение обратной задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ на сфероиде

Как и в прямой задаче, здесь будут даны в основном только последовательности рабочих выражений, вытекающие из начального свода [Дел. 3; (26)] и определяющие совокупность искомых величин в обратной задаче; будут также указаны пределы годности этих последовательностей в различных случаях.

Условие задачи: даны B_1, L_1 и B_2, L_2; найти $A_{1.2}$, $A_{2.1}$ и $s_{1.2}$.

1. Первый способ определения $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$ (при $s_{1.2} > 1000$ км)

Прежде всего решаем 2 приближениями уравнение [Дел. 4, 4; (19)]

$$1)\ \beta\cdot\Delta L_{1.2} = \nu\wp\sum_{\lambda=0}^{n}F(\lambda) = \sum_{\lambda=0}^{n}R(\lambda) = R(0)+\sum_{\lambda=1}^{n}R(\lambda),$$

где

$$R(0) = \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\,\left[\operatorname{arc\,tg}(p\,tg\,\varphi_2)-\operatorname{arc\,tg}(p\,tg\,\varphi_1)\right] =$$

$$= \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\,[\vartheta_2-\vartheta_1] = \frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\,\Delta\vartheta_{1.2};$$

$$R(1)=\frac{e^2}{2}R(0)-\frac{e^2}{2}\nu\mu(\varphi_2-\varphi_1)=\frac{e^2}{2}R(0)-\frac{e^2}{2}\nu\mu\,\Delta\varphi_{1.2}=$$

$$=\frac{\nu}{|\nu|}\frac{e^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,[\Delta\vartheta_{1.2}-p\cdot\Delta\varphi_{1.2}];$$

$$R(2)=\frac{3}{4}e^2R(1)-\frac{3}{16}e^2\kappa^2\nu\mu\left[\Delta\varphi_{1.2}-\frac{1}{2}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)\right];$$

$$R(3)=\frac{5}{6}e^2R(2)-\frac{5}{16}e^2\kappa^4\nu\mu\left[\frac{3}{8}\Delta\varphi_{1.2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}(\sin 2\varphi_2-\sin 2\varphi_1)+\frac{1}{32}(\sin 4\varphi_2-\sin 4\varphi_1)\right]$$

и т. д.

относительно неизвестного p, причем сумма $\sum\limits_{\lambda=1}^{n}R(\lambda)$ есть малость порядка e^2.

Начальное достаточно точное значение $A_{1.2}^{(0)}$ азимута $A_{1.2}$, входящего в вычисление p, находим из соотношения

$$2)\ \frac{\cos B_2\operatorname{tg}B_1-\cos\Delta L_{1.2}\sin B_1}{\sin\Delta L_{1.2}}=\frac{\text{п}_2-\text{п}_1}{\sin\Delta L_{1.2}}=\operatorname{ctg}\alpha_{1.2}=\operatorname{ctg}A_{1.2}^{(0)}.$$

Соответствующее приближенное значение $p^{(0)}$ неизвестного p и начальное значение $R^{(0)}$ для $R(0)$, а также последовательные значения величин $\nu\mu$, m, τ, κ^2, φ, входящих в $R(\lambda)$, определим тогда из соотношений:

$$3)\ p=\cos B_0\approx\sin A_{1.2}^{(0)}\cos B_1=p^{(0)};$$

$$4)\ R(0)=\frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\,\Delta\vartheta_{1.2}\approx\frac{\nu}{|\nu|}\sqrt{1-e^2}\,\Delta L_{1.2}=R^{(0)}(0);$$

$$5)\ \nu\mu=\frac{\nu}{|\nu|}p\sqrt{1-e^2};\quad 6)\ \sin B_0=m;\quad 7)\ \csc B_0=\tau;$$

$$8)\ \kappa^2=e^2(1-p^2)=e^2\sin^2B_0;\quad 9)\ \sin\varphi=\tau\sin B$$

при $A_{1.2}=A_{1.2}^{(0)}$ и $p=p^{(0)}, p^{(1)}, p^{(2)},\dots$, причем B_0 есть широта вершины $O_{1.2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$.

Улучшенное значение $p^{(s)}$ неизвестного p в итоге s-го приближения найдем так:

$$10)\ w^{(s-1)}=\beta\sum_{\lambda=0}^{n}R^{(s-1)}(\lambda)-\Delta L_{1.2}=\Delta L_{1.2}^{(s-1)}-\Delta L_{1,2},$$

$$11)\ \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial p}=\sqrt{1-e^2}\,\tau^2[\operatorname{tg}\varphi_2-\operatorname{tg}\varphi_1]=\varkappa^{(s-1)};$$

$$12)\ p^{(s)}=p^{(s-1)}-\frac{w^{(s-1)}}{\varkappa^{(s-1)}}=p^{(s-1)}+\Delta p^{(s-1)}.$$

Решив уравнение (1) двумя-тремя приближениями, вычисляем затем окончательные значения азимутов $A_{1.2}$, $A_{2.1}$:

$$13)\ \sin A_{1.2}=\frac{\nu}{|\nu|}\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\sqrt{\frac{1-e^2\sin^2B_1}{1-e^2\sin^2B_0}}=\frac{\nu}{|\nu|}\frac{p}{\cos B_1}\frac{V_1}{V_0};$$

$$14)\ \sin A'_{2.1} = \frac{\nu}{|\nu|} \frac{\cos B_0}{\cos B_2} \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B_2}{1 - e^2 \sin^2 B_0}} = \frac{\nu}{|\nu|} \frac{p}{\cos B_2} \frac{V_2}{V_0};$$

$$15)\ A_{2.1} = A'_{2.1} \pm 180^\circ.$$

Необходимая в дальнейшем при вычислении расстояния $s_{1.2}$ вспомогательная величина μ может быть выражена следующим образом через найденную выше величину $\kappa^2 = e^2(1 - p^2) = e^2 \sin^2 B_0$:

$$16)\ \mu = \sqrt{(1 - e^2)(1 - \kappa^2)} = \sqrt{(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 B_0)} =$$

$$= \sqrt{1 - e^2}\, W_0 = (1 - e^2)\, V_0.$$

Что касается величины ν, то она связана с величинами p и κ соотношением

$$17)\ \nu = \frac{\nu}{|\nu|} \frac{p}{\sqrt{1 - \kappa^2}} = \frac{\nu}{|\nu|} \frac{\cos B_0}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_0}} = \frac{\nu}{|\nu|} \frac{\cos B_0}{W_0} =$$

$$= \frac{\nu}{|\nu|} \frac{\cos B_0}{\sqrt{1 - e^2}\, V_0}.$$

2. Второй способ определения $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$ (при $s_{1.2} \leqslant 1000$ км)

$$1)\ \mathrm{tg} \frac{1}{2}(\alpha'_{2.1} + \alpha_{1.2}) = \frac{\cos \frac{1}{2}(B_2 + B_1)}{\sin \frac{1}{2}(B_2 - B_1)} \mathrm{tg} \frac{\Delta L_{1.2}}{2} = \mathrm{tg}\, \bar{\alpha}_{1.2};$$

$$2)\ \mathrm{tg} \frac{1}{2}(\alpha'_{2.1} - \alpha_{1.2}) = \frac{\sin \frac{1}{2}(B_2 + B_1)}{\cos \frac{1}{2}(B_2 - B_1)} \mathrm{tg} \frac{\Delta L_{1.2}}{2} = \mathrm{tg} \frac{\Delta\alpha_{1.2}}{2},$$

отсюда найти $\alpha_{1.2}$ и $\alpha'_{2.1}$ в отдельности.

$$3)\ Q = \frac{e^2}{\sin \Delta L_{1.2}} (V_1 \sin B_2 - V_2 \sin B_1);$$

$$4)\ \alpha_{2.1} = \alpha'_{2.1} \pm 180^\circ = (\alpha_{1.2} + \Delta\alpha_{1.2}) \pm 180^\circ;$$

$$5)\ \sin \sigma_{1.2} = \frac{\cos B_2}{\sin \alpha_{1.2}} \sin \Delta L_{1.2} = -\frac{\cos B_1}{\sin \alpha_{2.1}} \sin \Delta L_{1.2};$$

$$6)\ \mathrm{ctg}\, \tilde{A}_{1.2} = \mathrm{ctg}\, \alpha_{1.2} - Q \frac{\cos B_1}{V_1 \cos B_2};$$

$$7)\ \mathrm{ctg}\, \tilde{A}_{2.1} = \mathrm{ctg}\, \alpha_{2.1} - Q \frac{\cos B_2}{V_2 \cos B_1}; \qquad \text{(см. [4])}.$$

$$\left\{\begin{aligned} &8)\ \eta''_{1.2} = \frac{e^2}{6\rho''} (\sigma''_{1.2})^2 \sin \tilde{A}_{1.2} \cos^2 B_1 \left(\cos \tilde{A}_{1.2} - \frac{\sigma''_{1.2}}{4\rho''} \mathrm{tg}\, B_1\right); \\ &9)\ \eta''_{2.1} = \frac{e^2}{6\rho''} (\sigma''_{1.2})^2 \sin \tilde{A}_{2.1} \cos^2 B_2 \left(\cos \tilde{A}_{2.1} - \frac{\sigma''_{1.2}}{4\rho''} \mathrm{tg}\, B_2\right) \end{aligned}\right. \qquad \text{(см. [5])}.$$

$$10)\ A_{1.2} = \tilde{A}_{1.2} - \eta''_{1.2}; \qquad 11)\ A_{2.1} = \tilde{A}_{2.1} - \eta''_{2.1}.$$

3. Поверка вычисления $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$

Поверка вычисленных азимутов $A_{1.2}$ и $A_{2.1}$ производится их подстановкой в одно из следующих равенств:

$$1)\ \frac{\sin A_{1.2}}{\sin A'_{2.1}} = \frac{\cos B_2}{\cos B_1}\sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_2}} = \frac{V_2 \cos B_1}{V_1 \cos B_2} = g;$$

$$2)\ \Delta L_{1.2} = \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}}\, dA.$$

Действительное решение интеграла (2) производим одним из трех способов, примененных выше в заключительной части прямой задачи.

4. Вычисление $s_{1.2}$ четырьмя способами

Расстояние $s_{1.2}$ может быть вычислено четырьмя путями из двойного равенства

$$s_{1.2} = \beta a \rho \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = a\nu \int\limits_{A_{1.2}}^{A'_{2.1}} \sqrt{\frac{\sin^2 A - e^2 \nu^2}{\sin^2 A - \nu^2}}\, dA.$$

Из первой части этого двойного равенства имеем

$$\beta s_{1.2} = C_0 a \rho (\varphi_2 - \varphi_1) + a\rho \sum_{u=1}^{n} C_{2u} (\sin 2u\varphi_2 - \sin 2u\varphi_1),$$

где φ_1, φ_2 и κ^2 найдены выше при определении $p = \cos B_0$, величина ρ дана в [Дел. 5, 4; (14)], а коэффициенты C_0, C_{2u} указаны в [Дел. 3, 1; (7), (8)].

Вторую часть того же двойного равенства решаем одним из трех способов, упомянутых выше в прямой задаче.

Дел. 6. Решение прямой выравненнолучевой засечки на сфероиде

Прямой выравненнолучевой засечкой на сфероиде назовем задачу определения геодезических координат B_3, L_3 точки 3, если даны геодезические координаты B_1, L_1 и B_2, L_2 исходных точек 1, 2, а также даны геодезические азимуты $A_{1.3}$, $A_{2.3}$ засекающих точку 3 лучей $♂Л_{1.3}$, $♂Л_{2.3}$ с вершинами в исходных точках 1, 2.

При этом может быть поставлено дополнительное требование найти также длины $s_{1.3}$, $s_{2.3}$ засекающих сторон 1.3, 2.3 и обратные азимуты $A_{3.1}$, $A_{3.2}$ этих сторон в определяемой точке 3. Из сказанного вытекает следующее краткое:

Условие задачи: Даны B_1, L_1, $A_{1.3}$ и B_2, L_2, $A_{2.3}$. Найти B_3, L_3, а также $A_{3.1}$, $s_{1.3}$ и $A_{3.2}$, $s_{2.3}$.

В указанной постановке данная задача может быть решена двумя общими способами, в основе которых лежит очевидное соотношение

$$\Delta L_{1.2} = \Delta L_{1.3} - \Delta L_{2.3}. \tag{1}$$

Рассмотрим каждый из этих способов в отдельности.

А. Первый способ решения прямой засечки на сфероиде

Этот способ целесообразно применять, когда нам нужны только геодезические координаты B_3, L_3 определяемой точки 3. Сущность способа заключается в следующем.

Прежде всего из решения прямой засечки на шаре находим приближенные значения $\widetilde{B}_3^{(0)}$, $\widetilde{L}_3^{(0)}$ геодезических координат B_3, L_3 определяемой точки 3. Для указанного решения, которое выполняется с поверкой, применяются следующие рабочие выражения:

$$1)\ \operatorname{tg} \Delta\widetilde{L}_{1.3}^{(0)} =$$

$$= \frac{\cos(90^\circ - B_2)\cos\Delta L_{1.2} - \operatorname{ctg} A_{2.3}\sin\Delta L_{1.2} - \operatorname{ctg}(90^\circ - B_1)\sin(90^\circ - B_2)}{\operatorname{ctg} A_{1.3}\dfrac{\sin(90^\circ - B_2)}{\sin(90^\circ - B_1)} - \operatorname{ctg} A_{2.3}\cos\Delta L_{1.2} - \cos(90^\circ - B_2)\sin\Delta L_{1.2}};$$

$$2)\ \widetilde{L}_3^{(0)} = L_1 + \Delta\widetilde{L}_{1.3}^{(0)}; \qquad 3)\ \Delta\widetilde{L}_{2.3}^{(0)} = \widetilde{L}_3^{(0)} - L_2;$$

$$4)\ \operatorname{tg}\widetilde{B}_3^{(0)} = [\operatorname{ctg} A_{1.3}\sin\Delta\widetilde{L}_{1.3}^{(0)} + \cos(90^\circ - B_1)\cos\Delta\widetilde{L}_{1.3}^{(0)}] : \sin(90^\circ - B_1) =$$

$$= [\operatorname{ctg} A_{2.3}\sin\Delta\widetilde{L}_{2.3}^{(0)} + \cos(90^\circ - B_2)\cos\Delta\widetilde{L}_{2.3}^{(0)}] : \sin(90^\circ - B_2).$$

Вычисления производятся с точностью до 0,00001 для чисел и с точностью до $1''$ или до $0^r\cdot 0001$ для углов.

Далее вычисляем с окончательной точностью (например, с точностью до 10^{-8}) величины ν_{i3}, κ_{i3}^2, τ_{i3}, p_{i3}, $(\nu\rho)_{i3}$, φ_i^3 и ϑ_i^3 для обеих засекающих сторон $i3 = 1.3,\ 2.3$. Соответствующие расчетные выражения даны в дел. 4 ($\sin\varphi_i^3 = \tau_{i3}\sin B_i$; $\operatorname{tg}\vartheta_i^3 = p_{i3}\operatorname{tg}\varphi_i^3$).

Теперь приступаем к вычислению на сфероиде последовательных приближений $B_3^{(s)}$, $L_3^{(s)}$, $(s = 1, 2, \ldots)$, для геодезических координат B_3, L_3 определяемой точки 3.

Начиная первое приближение, берем в качестве исходного значение $\widetilde{B}_3^{(0)} = B_3^{(0)}$ широты точки 3, полученное из решения засечки на шаре. Затем решением обратных задач по сторонам $i3 = 1.3,\ 2.3$ при известных азимутах $A_{1.3}$, $A_{2.3}$ лучей $\sigma Л_{1.3}$, $\sigma Л_{2.3}$, вычисляем согласно [Дел. 5, 1] соответствующие приближенные значения $\Delta L_{1.3}^{(0)}$, $\Delta L_{2.3}^{(0)}$ на сфероиде разностей долгот $\Delta L_{1.3}$, $\Delta L_{2.3}$. При этом расчет ведем следующим образом:

$$1)\ \widetilde{B}_3^{(0)} = B_3^{(0)} \approx B_3, \qquad 2)\ \tau_{i3}\sin B_3 = \sin\varphi_3^i, \qquad 3)\ \varphi_3^i - \varphi_i^3 = \Delta\varphi_{i3},$$

$$4)\ p_{i3}\operatorname{tg}\varphi_3^i = \operatorname{tg}\vartheta_3^i, \qquad 5)\ \vartheta_3^i - \vartheta_i^3 = \Delta\vartheta_{i3}, \qquad 6)\ \frac{\nu_{i3}}{|\nu_{i3}|} = \omega_{i3},$$

$$7)\ \omega_{i3}\sqrt{1-e^2}\,\Delta\vartheta_{i3} = R_{i3}(0), \qquad 8)\ (\nu\mu)_{i3}\Delta\varphi_{i3} = \Delta R_{i3}(0), \tag{3.1}$$

$$9)\ \frac{e^2}{2}[R_{i3}(0) - \Delta R_{i3}(0)] = R_{i3}(1),$$

$$10)\ \frac{1}{4}(\kappa^2\nu\rho)_{i3}[\Delta\varphi_{i3} - (\sin 2\varphi_3^i - \sin 2\varphi_i^3) = \Delta R_{i3}(1),$$

$$11)\ \frac{3}{4}e^2[R_{i3}(1) - \Delta R_{i3}(1)] = R_{i3}(2), \qquad 12)\ \sum_{\lambda=0}^{2} R_{i3}(\lambda) = \beta_{i3}\Delta L_{i3}^{(0)}.$$

Эти расчеты производим, удерживая 6—7 знаков после запятой.

Подсчитав $\Delta L_{i3}^{(0)} = \Delta L_{1.3}^{(0)}$, $\Delta L_{2.3}^{(0)}$, вычисляем соответствующие приближенные значения $L_{\frac{1}{3}}^{(0)}$, $L_{\frac{2}{3}}^{(0)}$ долготы L_3 точки 3 сфероида, а также вычисляем возникающую при этом невязку $w_L^{(0)}$ по долготе:

$$1)\ L_{\frac{1}{3}}^{(0)} = L_1 + \Delta L_{1.3}^{(0)}, \quad 2)\ L_{\frac{2}{3}}^{(0)} = L_2 + \Delta L_{2.3}^{(0)}, \quad 3)\ w_L^{(0)} = L_{\frac{1}{3}}^{(0)} - L_{\frac{2}{3}}^{(0)}, \tag{4.1}$$

т. е. производим расчеты, вытекающие из основного соотношения (1) : $\Delta L_{1.2} = \Delta L_{1.3} - \Delta L_{2.3}$, если вместо точного значения B_3 широты точки 3 взять приближенное значение $\widetilde{B}_3^{(0)} = B_3^{(0)}$.

Найдя невязку $w_L^{(0)}$, вычисляем соответствующие поправки $\delta B_3^{(0)}$ и $\delta L_{\frac{1}{3}}^{(0)}$, $\delta L_{\frac{2}{3}}^{(0)}$, прибавляя которые к $B_3^{(0)}$, $L_{\frac{1}{3}}^{(0)}$, $L_{\frac{2}{3}}^{(0)}$, получим улучшенные в первом приближении значения $B_3^{(1)}$, $L_3^{(1)}$ широты и долготы точки 3. Выполняется это так:

$$1)\ \sin A'_{i3} = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\nu_{i3}\,V_3}{\cos B_3}; \quad 2)\ \frac{\partial L_3^i}{\partial B_3} = a_{i3} = \frac{\operatorname{tg} A'_{3i}}{V_3^2 \cos B_3};$$

$$3)\ \delta B_3^{(0)} = -\frac{w_L^{(0)}}{(a_{1.3} - a_{2.3})}; \tag{5.1}$$

$$4)\ a_{i3}\,\delta B_3^{(0)} = \delta L_{\frac{i}{3}}^{(0)}; \qquad 5)\ B_3^{(1)} = B_3^{(0)} + \delta B_3^{(0)};$$

$$6)\ L_3^{(1)} = L_{\frac{1}{3}}^{(0)} + \delta L_{\frac{1}{3}}^{(0)} = L_{\frac{2}{3}}^{(0)} + \delta L_{\frac{2}{3}}^{(0)}.$$

На этом первое приближение заканчивается.

Переходя ко в т о р о м у приближению, в качестве исходного берем значение $B_3^{(1)}$ широты точки 3, полученное в итоге первого приближения. При этом вычисления производим с полным числом знаков и определение $\Delta L_{i3}^{(1)}$ выполняем с учетом поправочного члена R_{i3} (3). Таким образом, во изменение и в дополнение к (3.1) будем иметь для второго приближения:

$$B_3^{(1)} \approx B_3; \quad 12)\ \frac{3}{8}\,(\kappa^2 \nu\mu)_{i3}\left[\frac{3}{8}\Delta\varphi_{i3} - \frac{1}{4}(\sin 2\varphi_3^i - \sin 2\varphi_i^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{32}(\sin 4\varphi_3^i - \sin 4\varphi_i^3)\right] = \Delta R_{i3}(2);$$

$$13)\ \frac{5}{6}\,e^2\,[R_{i3}(2) - \Delta R_{i3}(2)] = R_{i3}(3); \quad 14)\ \sum_{\lambda=0}^{3} R_{i3}(\lambda) = \beta_{i3}\cdot \Delta L_{\frac{i}{3}}^{(1)}. \tag{2.2}$$

Подсчитав $\Delta L_{\frac{i}{3}}^{(1)} = \Delta L_{\frac{1}{3}}^{(1)}$, $\Delta L_{\frac{2}{3}}^{(1)}$ в соответствии с (2.1) и (2.2), находим согласно (4.1) (с заменой $^{(0)}$ на $^{(1)}$) значения $L_{\frac{1}{3}}^{(1)}$, $L_{\frac{2}{3}}^{(1)}$ долготы точки 3 и невязку $w_L^{(1)}$, после чего вычисляем согласно (5.1) (с заменой$^{(\varkappa)}$ на $^{(\varkappa+1)}$) широту $B_3^{(2)}$ и долготу $L_3^{(2)}$ точки 3 в итоге второго приближения. При этих подсчетах значения $\operatorname{tg} A'_{3i}$ и $\dfrac{\partial L_3^i}{\partial B_3} = a_{i3}$ можно взять из первого приближения.

По окончании второго приближения производим поверочное т р е т ь е приближение, в котором ограничиваемся вычислением лишь величин $R_{i3}(0)$ и $R_{i3}(1)$ при $B_3 = B_3^{(2)}$. Остальные же члены $R_{i3}(2)$ и $R_{i3}(3)$ берем из второго приближения. Подсчитав затем соответствующие разности долгот $\Delta L_{i\,3}^{(2)}$, находим невязку $w_L^{(2)}$ третьего приближения. Если расчеты второго и третьего приближений выполнены правильно, то эта невязка $w_L^{(2)} \approx 0$ в пределах точности вычислений. Тогда в качестве окончательных координат B_3, L_3 определяемой точки 3 принимаем их значения $B_3^{(2)}$, $L_3^{(2)}$, полученные во втором приближении.

Найдя координаты B_3, L_3 точки 3, вычисляем в случае надобности также обратные азимуты A_{3i} и длины s_{i3}, что может быть выполнено согласно [Дел. 5].

Б. Второй способ решения прямой засечки на сфероиде

Применение этого способа целесообразно в том случае, когда кроме геодезических координат B_3, L_3 определяемой точки 3 нужно знать одновременно расстояния $s_{1.3}$, $s_{2.3}$ и, может быть, также обратные азимуты $A_{3.1}$, $A_{3.2}$. Решение прямой засечки по этому способу производится в следующем порядке.

Прежде всего по известным координатам B_1, L_1 и B_2, L_2 исходных точек 1, 2 и по известным азимутам $A_{1.3}$, $A_{2.3}$ засекающих лучей $\sigma Л_{1.3}$, $\sigma Л_{2.3}$ на этих точках решаем на шаре соответствующую прямую засечку, определяя из этого решения сферические расстояния $\sigma_{1.2}$, $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$ дуг $1^\circ 2^\circ$, $1^\circ 3^\circ$, $2^\circ 3^\circ$ и сферические углы γ_1, γ_2, γ_3 в вершинах 1°, 2°, 3° сферического треугольника $1^\circ 2^\circ 3^\circ$, отображающего данный сфероидический треугольник 123. Эти вычисления выполняются так:

$$1)\ 90^\circ - B_1 = \Theta_1, \qquad 2)\ 90^\circ - B_2 = \Theta_2;$$

$$3)\ \frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_2) = \Theta_{1.2}; \qquad 4)\ \frac{1}{2}(\Theta_2 - \Theta_1) = \delta\Theta_{1.2};$$

$$5)\ \frac{1}{2}\Delta L_{1.2} = \delta L_{1.2}; \qquad 6)\ \frac{\sin \delta\Theta_{1.2} \operatorname{ctg} \delta L_{1.2}}{\sin \Theta_{1.2}} = \operatorname{tg} \delta\alpha_{1.2};$$

$$7)\ \frac{\cos \Theta_{1.2} \operatorname{ctg} \delta L_{1.2}}{\cos \Theta_{1.2}} = \operatorname{tg} \alpha_{1.2}; \qquad 8)\ \alpha_{1.2} + \delta\alpha_{1.2} = \beta_1;$$

$$9)\ \alpha_{1.2} - \delta\alpha_{1.2} = \beta_2; \qquad 10)\ \beta_2 + A_{2.3} = \gamma_1;$$

$$11)\ \beta_1 - A_{1.3} = \gamma_2; \qquad 12)\ \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) = \gamma_{1.2}; \qquad (1)$$

$$13)\ \frac{1}{2}(\gamma_2 - \gamma_1) = \delta\gamma_{1.2};$$

$$14)\ \frac{\sin \Theta_1}{\sin \beta_2} \sin \Delta L_{1.2} = \frac{\sin \Theta_2}{\sin \beta_1} \sin \Delta L_{1.2} = \sin \sigma_{1.2};$$

$$15)\ \frac{1}{2}\sigma_{1.2} = \delta\sigma_{1.2}; \qquad 16)\ \frac{\sin \delta\gamma_{1.2}}{\sin \gamma_{1.2}} \operatorname{tg} \delta\sigma_{1.2} = \operatorname{tg} \delta\sigma_0;$$

$$17)\ \frac{\cos \delta\gamma_{1.2}}{\cos \gamma_{1.2}} \operatorname{tg} \delta\sigma_{1.2} = \operatorname{tg} \sigma_0; \qquad 18)\ \sigma_0 + \delta\sigma_0 = \sigma_{1.3};$$

$$19)\ \sigma_0 - \delta\sigma_0 = \sigma_{2.3}; \qquad 20)\ \frac{\sin \gamma_1}{\sin \sigma_{2.3}} \sin \sigma_{1.2} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \sigma_{1.3}} \sin \sigma_{1.2} = \sin \gamma_3;$$

$$21)\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + 180^\circ = \varepsilon.$$

Вычисления на шаре производятся с точностью до 0.00001 для чисел и с точностью до 1″ или до 0″.0001 для углов.

4*.

Далее мы вычисляем с полной точностью вспомогательные величины ν_{i3}, κ^2_{i3}, p_{i3}, C^i_0, C^i_{2u}, D^i_{2u}, Q_{i3}, φ_{i3}, ϑ_{i3}, $(\nu\mu)_{i3}$ для обеих засекающих сторон $i3 = 1.3$, 2.3, необходимые для решения соответствующих прямых задач согласно [Дел. 4.].

Чтобы начать затем решение указанных прямых задач по стороне 1.3 и по стороне 2.3, нам нужно каким-то образом найти приближенные длины $s^{(0)}_{1.3}$, $s^{(0)}_{2.3}$ этих сторон. Проще всего и, пожалуй, достаточно надежно это можно сделать следующим образом. Исходя из выполненного выше решения прямой засечки на шаре, произведем построение соответствующего сферического треугольника $1°2°3°$ на глобусе или построим равноугольное изображение $1'2'3'$ этого треугольника на карте. Разбив затем длины засекающих сторон $1°3°$, $2°3°$ или $1'3'$, $2'3'$ на равное число частей $(ек)_{i3}$, например — на 5, определим для каждой такой части $(ек)_{i3}$ среднюю широту $B^{(i3)}_{ек}$. Для каждой широты $B^{(i3)}_{ек}$ вычислим средний радиус кривизны $R^{(i3)}_{ек}$ и затем подсчитаем их среднее значение $R^{(i3)}$ по каждой засекающей стороне $i3$. Тогда можно принять, что

$$1)\ s^{(0)}_{1.3} = \sigma_{1.3} R^{(1.3)}, \quad 2)\ s^{(0)}_{2.3} = \sigma_{2.3} R^{(2.3)}, \tag{2}$$

где $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$ — найденные выше сферические расстояния.

Теперь переходим к последовательным приближениям, в которых вычисляются совместно улучшенные значения расстояний $s_{1.3}$, $s_{2,3}$ и координат B_3, L_3 определяемой точки 3. В качестве исходных для этих приближений берутся значения $s^{(0)}_{1.3}$, $s^{(0)}_{2.3}$ расстояний s_{i3}, полученные согласно (2). Каждое $\varkappa$-ое приближение распадается при этом на три ступени:

а) нахождение невязки $w^{(\varkappa-1)}_B$ в двух вычисленных значениях $B^{(\varkappa-1)}_{\frac{1}{3}}$, $B^{(\varkappa-1)}_{\frac{2}{3}}$ широты точки 3, которая была вызвана ошибочностью полученных в $(\varkappa-1)$-ом приближении значений $s^{(\varkappa-1)}_{1.3}$, $s^{(\varkappa-1)}_{2.3}$ для расстояний $s_{1.3}$, $s_{2.3}$;

б) нахождение невязки $w^{(\varkappa-1)}_L$ в двух вычисленных значениях $L^{(\varkappa-1)}_{\frac{1}{3}}$, $L^{(\varkappa-1)}_{\frac{2}{3}}$ долготы точки 3, которая была вызвана той же причиной, что и в (a);

в) составление свода двух плоскостных уравнений с поправками $\delta s^{(\varkappa-1)}_{1.3}$, $\delta s^{(\varkappa-1)}_{2.3}$ приближенных значений $s^{(\varkappa-1)}_{1.3}$, $s^{(\varkappa-1)}_{2.3}$ для расстояний s_{i3} и решение этого свода; вычисление соответствующих поправок $\delta B^{(\varkappa-1)}_{\frac{1}{3}}$, $\delta B^{(\varkappa-1)}_{\frac{2}{3}}$ и $\delta L^{(\varkappa-1)}_{\frac{1}{3}}$, $\delta L^{(\varkappa-1)}_{\frac{2}{3}}$; вычисление улучшенных в $\varkappa$-ом приближении значений $s^{(\varkappa)}_{1.3}$, $s^{(\varkappa)}_{2.3}$ для сторон s_{i3} и улучшенных значений $B^{(\varkappa)}_3$, $L^{(\varkappa)}_3$ для координат B_3, L_3 определяемой точки 3.

Рассмотрим более подробно каждое из этих основных действий, выполняемых в $\varkappa$-ом приближении.

Нахождение невязки $w^{(\varkappa-1)}_B$. Взяв в качестве исходных значения $s^{(\varkappa-1)}_{1.3}$, $s^{(\varkappa-1)}_{2.3}$ расстояний s_{i3}, полученные в предшествующем $(\varkappa-1)$-ом приближении, вычисляем согласно [Дел. 4.1] широту B_3 точки 3 дважды—по стороне 1.3 и по стороне 2.3. При этом мы используем указанный там прием резкого усиления сходимости при вычислении $\Delta\varphi^{(\varkappa-1)}_{i3}$. В итоге решения этих двух задач мы получаем два соответствующих значения $B^{(\varkappa-1)}_{\frac{1}{3}}$, $B^{(\varkappa-1)}_{\frac{2}{3}}$ для широты B_3 точки 3, и тогда

$$w^{(\varkappa-1)}_B = B^{(\varkappa-1)}_{\frac{1}{3}} - B^{(\varkappa-1)}_{\frac{2}{3}}. \tag{3}$$

Нахождение невязки $w_L^{(\varkappa-1)}$. Взяв в качестве исходных значения $\varphi_{\frac{1}{3}}^{(\varkappa-1)}$, $\varphi_{\frac{2}{3}}^{(\varkappa-1)}$ преобразованной широты φ_3 точки 3, которые были получены при вычислении двух значений $B_{\frac{1}{3}}^{(\varkappa-1)}$, $B_{\frac{2}{3}}^{(\varkappa-1)}$ широты B_3 этой точки, мы определяем затем согласно [Дел. 4.4] долготу L_3 точки 3 дважды— по стороне 1.3 и по стороне 2.3. В итоге решения этих двух частных задач мы получаем два значения $L_{\frac{1}{3}}^{(\varkappa-1)}$, $L_{\frac{2}{3}}^{(\varkappa-1)}$ для долготы L_3 точки 3, и тогда:

$$w_L^{(\varkappa-1)} = L_{\frac{1}{3}}^{(\varkappa-1)} - L_{\frac{2}{3}}^{(\varkappa-1)} . \tag{4}$$

Вычисление $s_{i3}^{(\varkappa)}$, $B_3^{(\varkappa)}$, $L_3^{(\varkappa)}$. Найдя невязки $w_B^{(\varkappa-1)}$, $w_L^{(\varkappa-1)}$, составляем свод двух плоскостных уравнений с искомыми поправками $\delta s_{1.3}^{(\varkappa-1)}$, $\delta s_{2.3}^{(\varkappa-1)}$ расстояний $s_{1.3}^{(\varkappa-1)}$, $s_{2.3}^{(\varkappa-1)}$ и свободными членами $w_B^{(\varkappa-1)}$, $w_L^{(\varkappa-1)}$:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial B_3^1}{\partial s_{1.3}}\, \delta s_{1.3}^{(\varkappa-1)} - \frac{\partial B_3^2}{\partial s_{2.3}}\, \delta s_{2.3}^{(\varkappa-1)} + w_B^{(\varkappa-1)} = 0; \\ &\frac{\partial L_3^1}{\partial s_{1.3}}\, \delta s_{1.3}^{(\varkappa-1)} - \frac{\partial L_3^2}{\partial s_{2.3}}\, \delta s_{2.3}^{(\varkappa-1)} + w_L^{(\varkappa-1)} = 0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Входящие сюда коэффициенты вычисляются так:

$$1)\ \sin A'_{3i} = \frac{\sqrt{1-e^2}\,\nu_{i3}\, V_3^i}{\cos B_3^i}; \qquad 2)\ \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}} = \frac{\rho''}{M_3} \cos A'_{3i};$$

$$3)\ \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}} = \frac{\rho''}{N_3} \sin A'_{3i}, \tag{6}$$

где

$$1)\ M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 B)^{3/2}}; \qquad 2)\ N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2 B)^{1/2}};$$

$$3)\ \rho'' = 206264.8. \tag{7}$$

Определив из решения свода (5) поправки $\delta s_{i3}^{(\varkappa-1)}$, вычисляем соответствующие поправки $\delta B_{\frac{i}{3}}^{(\varkappa-1)}$, $\delta L_{\frac{i}{3}}^{(\varkappa-1)}$:

$$1)\ \delta B_{\frac{i}{3}}^{(\varkappa-1)} = \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}}\, \delta s_{i3}^{(\varkappa-1)}; \qquad 2)\ \delta L_{\frac{i}{3}}^{(\varkappa-1)} = \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}}\, \delta s_{i3}^{(\varkappa-1)} \tag{8}$$

Теперь улучшенные в итоге $\varkappa$-го приближения значения $s_{i3}^{(\varkappa)}$, $B_3^{(\varkappa)}$, $L_3^{(\varkappa)}$ расстояний s_{i3} и координат B_3, L_3 найдутся так:

$$\begin{aligned} &1)\ s_{i3}^{(\varkappa)} = s_{i3}^{(\varkappa-1)} + \delta s_{i3}^{(\varkappa-1)}; \\ &2)\ B_3^{(\varkappa)} = B_{\frac{1}{3}}^{(\varkappa-1)} + \delta B_{\frac{1}{3}}^{(\varkappa-1)} = B_{\frac{2}{3}}^{(\varkappa-1)} + \delta B_{\frac{2}{3}}^{(\varkappa-1)}; \\ &3)\ L_3^{(\varkappa)} = L_{\frac{1}{3}}^{(\varkappa-1)} + \delta L_{\frac{1}{3}}^{(\varkappa-1)} = L_{\frac{2}{3}}^{(\varkappa-1)} + \delta L_{\frac{2}{3}}^{(\varkappa-1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

На этих трех основных действиях $\varkappa$-ое приближение заканчивается. Опыт показывает, что при длинах s_{i3} засекающих сторон до 10000 *км* достаточно двух приближений; в третьем же приближении путем сокращенного расчета нужно только убедиться, что новые значения $s_{i3}^{(2)}$, $B_3^{(2)}$, $L_3^{(2)}$ расстояний и координат дают невязки $w_B^{(2)} \approx 0$, $w_L^{(2)} \approx 0$ в пределах точности вычислений.

В случае надобности, после определения s_{i3}, B_3, L_3 могут быть найдены согласно [Дел. 4.2] также обратные азимуты A_{3i} лучей $\mathcal{Л}_{3i}$ на засекаемой точке 3.

Дел. 7. Некоторые обобщения и дополнения

Рассмотрим некоторые обобщения и дополнения, относящиеся к решению первых трех задач на земном сфероиде.

Дополнение 1. Прежде всего найдем значение преобразованной широты $\varphi_0 = -\bar{\varphi}_{\bar{0}}$ для северных $O^{(s)}$ и южных $\bar{O}^{(s)}$ вершин выравненной кривой Γ, исходя из введенных в делянке 3 обозначений ν, τ и подстановки

$$\sin\varphi = \tau \sin B.$$

Заметив, что в вершинах $O^{(s)}$, $\bar{O}^{(s)}$ выравненной кривой Γ соответствующий азимут $A_0 = A_{\bar{0}} \pm \pi = \dfrac{\pi}{2}$, найдем:

$$1)\ \nu^2 = \frac{r^2}{a^2}\sin^2 A = \frac{r_0^2}{a^2}\sin^2 A_0 = \frac{\cos^2 B_0}{1 - e^2\sin^2 B_0};$$

$$2)\ 1 - e^2\nu^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2\sin^2 B_0};$$

$$3)\ 1 - \nu^2 = \frac{(1 - e^2)\sin^2 B_0}{1 - e^2\sin^2 B_0};\quad 4)\ \tau^2 = \frac{1 - e^2\nu^2}{1 - \nu^2} = \operatorname{cosec}^2 B_0;\quad 5)\ \sin\varphi_0 = 1.$$

Отсюда следует, что независимо от значения геодезической широты $B_0 = -\bar{B}_{\bar{0}}$ для вершин $O^{(s)}$, $\bar{O}^{(s)}$ выравненной кривой Γ получим всегда

$$\varphi_0 = -\bar{\varphi}_{\bar{0}} = \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Обобщенные разложения. Используем равенство (1) для получения некоторых соотношений, имеющих более общий вид, чем в делянках 4—6.

Дело в том, что разложения, которые мы применяли при решении прямой и обратной задач для дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$ на земном сфероиде, а также для решения прямой сфероидической засечки, были получены из замкнутых выражений (26) делянки 3 в предположении, что вершины $O_{ij}^{(s)}$, $\bar{O}_{ij}^{(s)}$, $\mathring{O}_{ij}^{(s)}$, $\mathring{\bar{O}}_{ij}^{(s)}$ выравненной кривой Γ_{ij} расположены вне соответствующей дуги $\Delta\Gamma_{ij}$. В том же случае, когда на выравненной дуге $\Delta\Gamma_{ij}$ между концевыми ее точками i, j лежит одна из вершин $O_{ij}^{(s)}$, $\bar{O}_{ij}^{(s)}$, $\mathring{O}_{ij}^{(s)}$, $\mathring{\bar{O}}_{ij}^{(s)}$ или даже несколько таких вершин (рис. 1), то предшествующие разложения для решения указанных выше задач должны быть надлежащим образом обобщены.

Для получения соответствующих обобщений будем исходить из ранее найденных разложений для вычисления расстояния s_{ij} и разности долгот ΔL_{ij} между концевыми точками i, j выравненной дуги $\Delta\Gamma_{ij}$. Но только теперь мы разобьем всю дугу $\Delta\Gamma_{ij}$ на ряд частных дуг $\Delta\Gamma_{\varkappa.\varkappa+1}$, выбрав при этом в качестве промежуточных наиболее подходящие точки $\varkappa.\varkappa+1$, что будет сделано несколько позже. В таком случае разложения, приведенные в делянках 4, 5 и используемые также в делянке 6, при решении прямой сфероидической засечки, могут быть представлены в следующем обобщенном виде:

$$1)\ \frac{s_{ij}}{a} = \mu_{ij} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} \int\limits_{\varphi_\varkappa}^{\varphi_{\varkappa+1}} \frac{d\varphi}{(1-k_{ij}^2 \sin^2\varphi)^{3/2}} =$$

$$= \mu_{ij} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} \int\limits_{\varphi_\varkappa}^{\varphi_{\varkappa+1}} \left[\sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \binom{-3/2}{\lambda} k_{ij}^{2\lambda} \sin^{2\lambda}\varphi\, d\varphi \right] =$$

$$= (\mu\, C_0)_{ij} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} (\varphi_{\varkappa+1} - \varphi_\varkappa) + \qquad (2)$$

$$+ \mu_{ij} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} \left[\sum_{u=0}^{n} C_{2u} (\sin 2u\varphi_{\varkappa+1} - \sin 2u\, \varphi_\varkappa) \right]_{ij} =$$

$$= \mu_{ij} C_0^{(ij)} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} (\varphi_{\varkappa+1} - \varphi_\varkappa) +$$

$$+ \mu_{ij} \sum_{u=1}^{n} C_{2u}^{(ij)} \left[\sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} (\sin 2\, u\varphi_{\varkappa+1} - \sin 2\, u\varphi_\varkappa) \right].$$

$$2)\ \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} (\varphi_{\varkappa+1} - \varphi_\varkappa) = \frac{s_{ij}}{a\, (\mu\, C_0)_{ij}} -$$

$$- \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} \left[\sum_{u=1}^{n} D_{2u}^{(ij)} (\sin 2u\varphi_{\varkappa+1} - \sin 2u\varphi_\varkappa) \right] =$$

$$= \frac{s_{ij}}{a\, \mu_{ij}\, C_0^{(ij)}} - \sum_{u=1}^{n} D_{2u}^{(ij)} \left[\sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} (\sin 2\, u\varphi_{\varkappa+1} - \sin 2\, u\varphi_\varkappa) \right].$$

$$3)\ \Delta L_{ij} = (\nu\mu)_{ij} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} \int\limits_{\varphi_\varkappa}^{\varphi_{\varkappa+1}} \frac{d\varphi}{(1 - m_{ij}^2 \sin^2\varphi) \sqrt{1-k_{ij}^2 \sin^2\varphi}} =$$

$$= \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} \left[\sum_{\lambda=0}^{n} \nu_{ij} \mu_{ij} F_{\varkappa.\varkappa+1}(\lambda) \right] = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} \left[\sum_{\lambda=0}^{n} R_{\varkappa.\varkappa+1}(\lambda) \right] =$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} \left[\sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} R_{\varkappa.\varkappa+1}(\lambda) \right] = \sum_{\lambda=0}^{n} R_{ij}(\lambda), \qquad (2)$$

где

$$а)\ R_{ij}(0) = \frac{\nu_{ij}}{|\nu_{ij}|} \sqrt{1-e^2} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} \left[\operatorname{arc\,tg}(p_{ij} \operatorname{tg} \varphi_{\varkappa+1}) - \operatorname{arc\,tg}(p_{ij} \operatorname{tg} \varphi_\varkappa) \right] =$$

$$= \frac{\nu_{ij}}{|\nu_{ij}|} \sqrt{1-e^2} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} [\vartheta_{\varkappa+1} - \vartheta_\varkappa];$$

$$б)\ R_{ij}(1) = \frac{1}{2} e^2 R_{ij}(0) - \frac{e^2}{2} (\nu\mu)_{ij} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa.\varkappa+1} (\varphi_{\varkappa+1} - \varphi_\varkappa);$$

$$в)\ R_{ij}(2) = \frac{3}{4} e^2 R_{ij}(1) - \frac{3}{16} e^2 (k^2 \nu\rho)_{ij} \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \Big[\beta_{\varkappa,\varkappa+1} (\varphi_{\varkappa+1} - \varphi_\varkappa) -$$

$$- \frac{1}{2} \beta_{\varkappa,\varkappa+1} (\sin 2\varphi_{\varkappa+1} - \sin 2\varphi_\varkappa) \Big],$$

и т. д. (см. Дел. 4.4). Здесь

$$\beta_{\varkappa,\varkappa+1} = \frac{\cos A_{\varkappa,\varkappa+1}}{|\cos A_{\varkappa,\varkappa+1}|} = \frac{\varphi_{\varkappa+1} - \varphi_\varkappa}{|\varphi_{\varkappa+1} - \varphi_\varkappa|} = \pm 1.$$

Допустим теперь, что в разложениях (2) точки $\varkappa$, $\varkappa+1$ располагаются в зависимости от границ изменения азимута A_{ij} в одной из следующих последовательностей (см. Дел. 1.3 и рис. 1):

$$а)\ \varkappa = i,\ O_{ij}^{(1)},\ Э_{ij}^{(1)}, \overline{O}_{ij}^{(1)},\ Э_{ij}^{(2)}, \ldots, \varkappa+1 = j \text{ при } 0 \leqslant A_{ij} < \frac{\pi}{2} \text{ (рис. 1,}а);$$

$$б)\ \varkappa = i,\ Э_{ij}^{(1)}, \overline{O}_{ij}^{(1)}, Э_{ij}^{(2)}, \ldots\ldots, \varkappa+1 = j \qquad \text{при } \frac{\pi}{2} \leqslant A_{ij} < \pi \text{ (рис. 1,}б);$$

$$в)\ \varkappa = i,\ \mathring{Э}_{ij}^{(1)}, \mathring{\overline{O}}_{ij}^{(2)}, \ldots\ldots, \varkappa+1 = j \qquad \text{при } \pi \leqslant A_{ij} < \frac{3}{2}\pi \text{ (рис. 1,}в); \tag{3}$$

$$г)\ \varkappa = i,\ \mathring{O}_{ij}^{(1)},\ \mathring{Э}_{ij}^{(1)},\ \mathring{\overline{O}}_{ij}^{(1)},\ \mathring{Э}_{ij}^{(2)} \ldots, \varkappa+1 = j \text{ при } \frac{3}{2}\pi \leqslant A_{ij} < 2\pi \text{ (рис. 1,}г).$$

Тогда не трудно прежде всего подсчитать, что при таком расположении точек $\varkappa, \varkappa+1$ будем иметь всегда:

$$1)\ \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa,\varkappa+1} (\sin 2u\varphi_{\varkappa+1} - \sin 2u\varphi_\varkappa) = \beta'_{ji} \sin 2u\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2u\varphi_i,$$

где (4)

$$2)\ \beta_{ij} = \frac{\cos A_{ij}}{|\cos A_{ij}|}, \qquad 3)\ \beta'_{ji} = \frac{\cos A'_{ji}}{|\cos A'_{ji}|}, \quad 4)\ A'_{ji} = A_{ji} \pm 180^\circ.$$

Сказанное вытекает из того, что если $\varkappa$, $\varkappa+1 = Э_{ij}^{(s)}, \mathring{Э}_{ij}^{(s)}$, то $\varphi_\varkappa = \varphi_{\varkappa+1} = 0$; если же $\varkappa, \varkappa+1 = O_{ij}^{(s)}, \mathring{O}_{ij}^{(s)}, \overline{O}_{ij}^{(s)}, \mathring{\overline{O}}_{ij}^{(s)}$, то $\varphi_\varkappa$, $\varphi_{\varkappa+1} = \pm \frac{\pi}{2}$.

Значит, во всех этих случаях

$$\sin 2u\varphi_{\varkappa+1} - \sin 2u\varphi_\varkappa = 0, \ (\varkappa \neq i,\ \varkappa+1 \neq j).$$

Что касается сумм

$$1)\ \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa,\varkappa+1} (\varphi_{\varkappa+1} - \varphi_\varkappa) = \Delta\varphi_{ij}, \qquad 2)\ \sum_{\varkappa=i}^{\varkappa+1=j} \beta_{\varkappa,\varkappa+1} (\vartheta_{\varkappa+1} - \vartheta_\varkappa) = \Delta\vartheta_{ij}, \tag{5}$$

то на основании (1) и смысла множителя $\beta_{\varkappa,\varkappa+1}$ имеем всегда:

$$1)\ \Delta\varphi_{ij} = q\pi + (\beta'_{ji}\varphi_j - \beta_{ij}\varphi_i); \qquad 2)\ \Delta\vartheta_{ij} = q\pi + (\beta'_{ji}\vartheta_j - \beta_{ij}\vartheta_i), \tag{6}$$

где q есть число вершин $O_{ij}^{(s)}, \overline{O}_{ij}^{(s)}$ или $\mathring{O}_{ij}^{(s)}, \mathring{\overline{O}}_{ij}^{(s)}$, содержащихся между концевыми точками i, j дуги $\Delta\Gamma_{ij}$, причем в (6) преобразованные широты φ_i, φ_j и дуги ϑ_i, ϑ_j берутся с их знаками $\pm$. Таким образом, например, для дуг $\Delta\Gamma_{ij}$, изображенных на рис. 1a, 1b, имеем:

Рис. 1,*а*: 1) $\Delta\varphi_{ij} = 3\pi - (\varphi_j + \varphi_i)$, 2) $\Delta\vartheta_{ij} = 3\pi - (\vartheta_j + \vartheta_i)$,

$(\varphi_i, \vartheta_i > 0,\ \varphi_j,\ \vartheta_j < 0)$;

Рис. 1,*б*: 1) $\Delta\varphi_{ij} = 2\pi - (\bar{\varphi}_j - \varphi_i)$, 2) $\Delta\vartheta_{ij} = 2\pi - (\bar{\vartheta}_j - \vartheta_i)$,

$(\varphi_i,\ \vartheta_i > 0,\ \bar{\varphi}_j,\ \bar{\vartheta}_j < 0)$.

Равенства (4) — (6) являются обобщением соответствующих частных равенств в делянке 4, которые там были записаны без множителя $\beta_{ij} = \beta'_{ji}$, перенесенного в левую часть. Вставляя равенства (4)—(6) в разложения общего вида (2), получим следующие окончательные выражения для этих разложений при любой длине s_{ij} выравненной дуги $\Delta\Gamma_{ij}$:

$$1)\ \frac{s_{ij}}{a} = \mu_{ij} C_0^{(ij)} \Delta\varphi_{ij} + \mu_{ij} \sum_{u=1}^{n} C_{2u}^{(ij)} (\beta'_{ji} \sin 2u\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2u\varphi_i);$$

$$2)\ \Delta\varphi_{ij} = \frac{s_{ij}}{a\mu_{ij} C_0^{(ij)}} - \sum_{u=1}^{n} D_{2u}^{(ij)} (\beta'_{ji} \sin 2u\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2u\varphi_i);$$

$$3)\ \Delta L_{ij} = \sum_{\lambda=0}^{n} R_{ij}(\lambda), \tag{2a}$$

где

$$а)\ R_{ij}(0) = \frac{\nu_{ij}}{|\nu_{ij}|} \sqrt{1 - e^2}\, \Delta\vartheta_{ij}; \qquad б)\ R_{ij}(1) = \frac{e^2}{2} R_{ij}(0) - \frac{e^2}{2} (\nu\mu)_{ij} \Delta\varphi_{ij};$$

$$в)\ R_{ij}(2) = \frac{3}{4} e^2 R_{ij}(1) -$$

$$- \frac{3}{16} e^2 (k^2 \nu\mu)_{ij} \left[\Delta\varphi_{ij} - \frac{1}{2} (\beta'_{ji} \sin 2\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2\varphi_i) \right];$$

$$г)\ R_{ij}(3) = \frac{5}{6} e^2 R_{ij}(2) - \frac{5}{16} e^2 (k^4 \nu\mu)_{ij} \left[\frac{3}{8} \Delta\varphi_{ij} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} (\beta'_{ji} \sin 2\varphi_j - \beta_{ij} \sin 2\varphi_i) + \frac{1}{32} (\beta'_{ji} \sin 4\varphi_j - \beta_{ij} \sin 4\varphi_i) \right],$$

и т. д.

Дополнение 2. Исходя из общих разложений (2*а*), покажем, что азимут $A_{1.2}$ выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$, идущей от точки 1 к точке 2 по кратчайшему пути, не равен азимуту $\check{A}_{1.2}$ выравненной дуги $\Delta\check{\Gamma}_{1.2}$, соединяющей те же точки 1, 2, но проведенной в противоположном направлении и потому вообще не являющейся кратчайшей на сфероиде между указанными точками.

Предположим ради определенности, что $0 < A_{1.2} < \frac{\pi}{2}$ и что между концевыми точками 1, 2 дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ не содержится вершин выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$. Тогда азимут $\check{A}_{1.2}$ противоположной дуги $\Delta\check{\Gamma}_{1.2}$ будет удовлетворять условию $\pi < \check{A}_{1.2} < \frac{3}{2}\pi$, и между концевыми точками 1, 2 этой дуги будет содержаться две вершины кривой $\check{\Gamma}_{1.2}$: южная $\mathring{\bar{O}}_{1.2}$ и северная $\mathring{O}_{1.2}$. Учитывая указанные особенности расположения выравненных дуг $\Delta\Gamma_{1.2}$ и $\Delta\check{\Gamma}_{1.2}$ на сфероиде, напишем для них, ограничиваясь 2 членами, общие выражения разностей долгот $\Delta L_{1.2}$, $\Delta \check{L}_{1.2}$ согласно (2а.3), (6) и [Дел. 5; (5)]:

$$\Delta L_{1.2} = \sqrt{1-e^2}\,(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \frac{e^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,(\vartheta_2 - \vartheta_1) - \frac{e^2}{2} p_{1.2} \sqrt{1-e^2}\,(\varphi_2 - \varphi_1);$$

$$\Delta \check{L}_{1.2} = -\sqrt{1-e^2}\left[2\pi - (\check{\vartheta}_2 - \check{\vartheta}_1)\right] - \frac{e^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,[2\pi - (\check{\vartheta}_2 - \check{\vartheta}_1)] +$$

$$+ \frac{e^2}{2}\check{p}_{1.2}\sqrt{1-e^2}\,[2\pi - (\check{\varphi}_2 - \check{\varphi}_1)],$$

причем эти разложения будут точны до малостей порядка e^4 [см. (2а)]. Так как $\Delta L_{1.2} > 0$, а $\Delta \check{L}_{1.2} < 0$, и концы дуг $\Delta \Gamma_{1.2}$, $\Delta \check{\Gamma}_{1.2}$ — одни и те же, то $\Delta L_{1.2} - \Delta \check{L}_{1.2} = 2\pi$, и мы будем иметь после деления обеих частей на $\sqrt{1-e^2}$:

$$\frac{\Delta L_{1.2} - \Delta \check{L}_{1.2}}{\sqrt{1-e^2}} = 2\pi\left(1 + \frac{e^2}{2} + \frac{3}{8}e^4\right) = 2\pi\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) +$$

$$+ \left(1 + \frac{e^2}{2}\right)[(\vartheta_2 - \vartheta_1) - (\check{\vartheta}_2 - \check{\vartheta}_1)] - 2\pi\frac{e^2}{2}\check{p}_{1.2} -$$

$$- \frac{e^2}{2}[p_{1.2}(\varphi_2 - \varphi_1) - \check{p}_{1.2}(\check{\varphi}_2 - \check{\varphi}_1)].$$

Разделив затем последнее равенство на 2π, получим далее опять с точностью до e^4:

$$\frac{3}{8}e^4 \approx 0 \approx \frac{1}{2\pi}[(\vartheta_2 - \vartheta_1) - (\check{\vartheta}_2 - \check{\vartheta}_1)] - \frac{e^2}{2}\check{p}_{1.2} -$$

$$- \frac{e^2}{4\pi}\check{p}_{1.2}\,[(\varphi_2 - \varphi_1) - (\check{\varphi}_2 - \check{\varphi}_1)].$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{2\pi}[(\vartheta_2 - \vartheta_1) - (\check{\vartheta}_2 - \check{\vartheta}_1)] = \frac{e^2}{2}\check{p}_{1.2} + \text{ост.}(\hat{e}^4) = \frac{e^2}{2}\cos \check{B}_0 + \text{ост}\,(\hat{e}^4), \qquad (7)$$

и, значит, в данном случае

$$\check{\vartheta}_2 - \check{\vartheta}_1 \neq \vartheta_2 - \vartheta_1. \qquad (8)$$

Но, согласно делянке 5:

$$1)\ \vartheta_x = \operatorname{arc\,tg}(p \operatorname{tg} \varphi_x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{p \sin B_x}{\sqrt{\cos^2 B_x - p^2}} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos B_0 \sin B_x}{\sqrt{\cos^2 B_x - \cos^2 B_0}} = f(B_0, B_x);$$

$$2)\ \sin A_{1.2} = \frac{\nu_{1.2}}{|\nu_{1.2}|}\,\frac{\cos B_0}{\cos B_1}\sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 B_1}{1 - e^2 \sin^2 B_0}} = \Psi(B_0, B_1).$$

Поэтому из неравенства (8) следует, что

$$f(\check{B}_0, B_2) - f(\check{B}_0, B_1) \neq f(B_0, B_2) - f(B_0, B_1), \tag{9}$$

т. е.

$$\check{B}_0 \neq B_0.$$

Отсюда заключаем, что

$$\sin A_{1.2} = \Psi(B_0, B_1) \neq \Psi(\check{B}_0, B_1) = \sin \check{A}_{1.2}. \tag{10}$$

Наше утверждение доказано.

Из рассмотрения преобразований, выполненных при выводе неравенств (9), (10), вытекает, что эти неравенства будут сохраняться и в том случае, когда на дуге $\Delta\Gamma_{1.2}$ находится, например, северная вершина $O_{1.2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$, а на противоположной дуге $\Delta\check{\Gamma}_{1.2}$ лежит южная вершина $\check{\bar{O}}_{1.2}$ соответствующей выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$. Неравенства (9) и (10) еще более усилятся, если на дуге $\Delta\check{\Gamma}_{1.2}$ содержится $q > 2$ вершин $\check{O}_{1.2}$, $\check{\bar{O}}_{1.2}$ выравненной кривой $\check{\Gamma}_{1.2}$.

Дополнение 3. Подсчитаем разность долгот $\Delta L_{1.2}$ для того случая, когда начало 1 дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ есть южная вершина $\bar{O}_{1.2}$ выравненной кривой $\Gamma_{1.2}$, а конец 2 дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ есть северная вершина $O_{1.2}$ кривой $\Gamma_{1.2}$, причем дуга $\Delta\Gamma_{1.2}$ пересекает экватор под азимутом $A_э^{(1.2)}$, который удовлетворяет условию: $0 < A_э^{(1.2} < \frac{\pi}{2}$.

При такой постановке задачи будем иметь прежде всего:

$$1)\ \frac{\nu_{1.2}}{|\nu_{1.2}|} = +1; \qquad 2)\ \varphi_1' = \bar{\varphi_0} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_2 = \varphi_0 = +\frac{\pi}{2};$$

$$3)\ \vartheta_1 = -\frac{\pi}{2}, \qquad \vartheta_2 = +\frac{\pi}{2}; \qquad 4)\ A_{1.2} = A_{2.1}' = \frac{\pi}{2};$$

$$5)\ \beta_{1.2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{|\varphi_2 - \varphi_1|} = +1 = \beta_{2.1}'; \qquad 6)\ \beta_{2.1}'\varphi_2 - \beta_{1.2}\varphi_1 = \Delta\varphi_{1.2} = \pi;$$

$$7)\ \beta_{2.1}'\vartheta_2 - \beta_{1.2}\vartheta_1 = \Delta\vartheta_{1.2} = \pi; \qquad 8)\ \beta_{2.1}'\sin 2u\varphi_2 - \beta_{1.2}\sin 2u\varphi_1 = 0.$$

Вставляя найденные значения вспомогательных величин в разложение общего вида (2а. 3) и используя также равенства (3) — (8) делянки 5, выразим искомую разность долгот $\Delta L_{1.2}$ для дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ через вершинную широту B_0:

$$\Delta L_{1.2} = \sqrt{1-e^2}\,\pi + \frac{e^2}{2}\sqrt{1-e^2}\,\pi(1-\cos B_0) +$$

$$+ \left[\frac{3}{8}e^4\sqrt{1-e^2}\,\pi(1-\cos B_0) - \frac{3}{16}e^4\sqrt{1-e^2}\,\pi\sin B_0\cos B_0\right] =$$

$$= \sqrt{1-e^2}\,\pi\left[1 - e^2\sin^2\frac{B_0}{2} + \frac{3}{16}e^4\sin^2\frac{B_0}{2} - \frac{3}{32}e^4\sin 2B_0\right] =$$

$$= \sqrt{1-e^2}\,\pi\left[1 - e^2\sin^2 B_0\left(1 - \frac{3}{16}e^2\right) - \frac{3}{32}e^4\sin 2B_0\right] < \pi.$$

Таким образом, если $0 < A_э^{(1.2)} < \frac{\pi}{2}$, то для данной выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ разность долгот $\Delta L_{1.2} < \pi$. Отсюда следует, что для противоположной дуги $\Delta\overset{\vee}{\Gamma}_{1.2}$ соответствующая разность долгот

$$\Delta\overset{\vee}{L}_{1.2} = 2\pi - \Delta L_{1.2} > \pi.$$

Из найденных соотношений

$$\Delta L_{1.2} < 0, \quad \Delta\overset{\vee}{L}_{1.2} > 0 \text{ при } A_{1.2} = A'_{2\,1} = \frac{\pi}{2}, \quad B_1 = \bar{B}_{\bar{0}} = -B_2,$$

заключаем далее, что длины $s_{1.2}$, $\overset{\vee}{s}_{1.2}$ дуг $\Delta\Gamma_{1.2}$, $\Delta\overset{\vee}{\Gamma}_{1,2}$ также не равны друг другу, а именно $s_{1.2} < \overset{\vee}{s}_{1.2}$.

Наконец, так как для экваториальных азимутов $A_э^{(1.2)}$, $\overset{\vee}{A}_э^{(1.2)}$ дуг $\Delta\Gamma_{1.2}$, $\Delta\overset{\vee}{\Gamma}_{1.2}$ имеем

$$1)\ A_э^{(1,2)} = F(B_1, B_2, \Delta L_{1.2}), \quad 2)\ \overset{\vee}{A}_э^{(1.2)} = F(B_1, B_2, \Delta\overset{\vee}{L}_{1.2})$$

и по доказанному выше $\Delta L_{1.2} \neq \Delta\overset{\vee}{L}_{1.2}$, то, следовательно, $A_э^{(1.2)} \neq \overset{\vee}{A}_э^{(1.2)}$.

Дел. 8. Примеры решения новыми способами первых трех основных задач на земном сфероиде

В заключение рассмотрим примеры решения предлагаемыми новыми способами первых трех основных задач на земном сфероиде.

Пример 1. (прилож. 1, рис. 2*а*). Дается решение прямой задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ при расстоянии $s_{1.2} = 25649$ *км* и азимуте $A_{1.2} = 229°03'$, причем $B_1 > 0$, $B_2 = \bar{B}_{\bar{2}} < 0$. Проложив дугу $\Delta\Gamma_{1.2}$

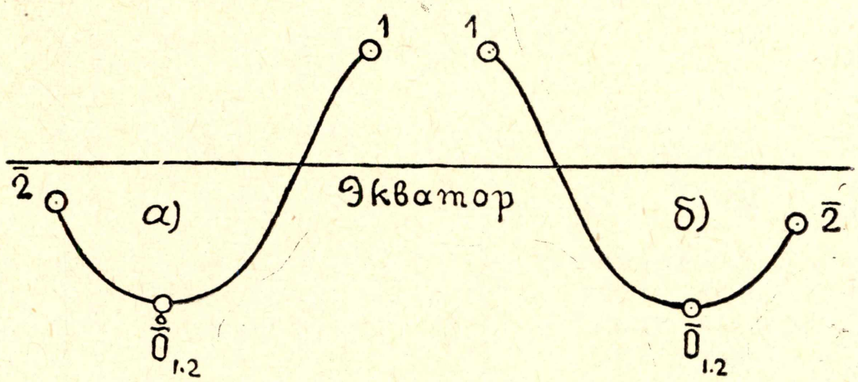

Рис. 2.

длины $s_{1.2}$ и под азимутом $A_{1.2}$ на глобусе, найдем, что между концевыми точками 1 и $2 = \bar{2}$ этой дуги лежит южная вершина $\mathring{\bar{O}}_{1.2}$ кривой $\Gamma_{1.2}$, а азимут $A'_{2.1}$ в точке $2 = \bar{2}$ лежит в пределах $\frac{3}{2}\pi < A'_{2.1} < 2\pi$.

Применяя поэтому для решения данной задачи разложения общего вида [Дел. 7; (2а)], будем иметь следующие рабочие выражения для вспомогательных величин $\beta_{1.2}$, $\beta'_{2.1}$,

$\Delta\varphi_{1.2}$, $\Delta\vartheta_{1.2}$ и $(\beta'_{2.1}\sin 2u\varphi_2 - \beta_{1.2}\sin 2u\varphi_1)$:

$$1)\ \beta_{1.2} = \frac{\cos A_{1.2}}{|\cos A_{1.2}|} = -1, \quad \beta'_{2.1} = \frac{\cos A'_{2.1}}{|\cos A'_{2.1}|} = +1;$$

$$2)\ \Delta\varphi_{1.2} = \pi + \beta'_{2.1}\overline{\varphi}_{\overline{2}} - \beta_{1,2}\,\varphi_1 = \pi + \varphi_1 - |\overline{\varphi}_{\overline{2}}|;$$

$$3)\ \Delta\vartheta_{1.2} = \pi + \beta'_{2.1}\,\overline{\vartheta}_{\overline{2}} - \beta_{1.2}\,\vartheta_1 = \pi + \vartheta_1 - |\overline{\vartheta}_{\overline{2}}|;$$

$$4)\ \beta'_{2.1}\sin 2u\overline{\varphi}_{\overline{2}} - \beta_{1.2}\sin 2u\varphi_1 = \sin 2u\varphi_1 - \sin 2u|\overline{\varphi}_{\overline{2}}|.$$

Решение задачи разбиваем на четыре части: 1) вычисление величин ν, k^2, τ^2, φ_1, C_0, D_{2u}; 2) вычисление B_2; 3) вычисление L_2; 4) вычисление $A_{2.1}$. При нахождении чисел C_0, D_{2u} используем готовые значения вспомогательных коэффициентов $c_{2u.2\lambda}$, помещенные в приложении 3. При вычислении преобразованной широты φ_2 применяем ускоренный способ расчета поправки $\Delta\varphi_{1.2}$, указанный в примечании к [Дел. 4; (10)].

Пример 2. (прилож. 2, рис. 2, *б*). Дается решение обратной задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1,2}$, длина которой $s_{1.2} = 24447$ *км*, а азимут $A_{1.2} = 147°27'$, причем $B_1 > 0$, $B_2 = \overline{B}_{\overline{2}} < 0$. После проложения дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$ на глобусе выяснилось, что между концами 1, 2 этой дуги находится южная вершина $\overline{O}_{1.2}$ кривой $\Gamma_{1.2}$, а азимут $A'_{2,1}$ лежит в пределах $0 < A'_{2.1} < \frac{\pi}{2}$. Отсюда следует, что

$$1)\ \beta_{1.2} = -1,\ \beta'_{2.1} = +1; \qquad 2)\ \Delta\varphi_{1.2} = \pi + \varphi_1 - |\overline{\varphi}_{\overline{2}}|;$$

$$3)\ \Delta\vartheta_{1.2} = \pi + \vartheta_1 - |\overline{\vartheta}_{\overline{2}}|; \qquad 4)\ \beta'_{2.1}\sin 2u\overline{\varphi}_{\overline{2}} - \beta_{1.2}\sin 2u\varphi_1 = \sin 2u\varphi_1 - \sin 2u|\overline{\varphi}_{\overline{2}}|.$$

Все существенные вопросы решения данной задачи изложены достаточно подробно в делянке 5. Здесь же только отметим, что если в прямой задаче основной рабочей величиной является $\nu_{1.2} = \sin A_э^{(1.2)}$, то здесь такой величиной будет $p_{1.2} = \cos B_0^{(1.2)}$, которая находится последовательным приближением из уравнения $\Delta L_{1.2} = \sum_{\lambda=0}^{n} R_{1.2}(\lambda)$. Для определения величины $p_{1.2}$ с точностью до 8—9 знаков достаточно 2 полных приближений и одного неполного, поверочного приближения даже при $s_{1.2} \approx 25000$ *км*.

После вычисления основной величины $p_{1.2}$, а попутно — и разности $\Delta\varphi_{1.2}$, находим азимуты $A_{1.2}$, $A_{2.1}$ и расстояние $s_{1.2}$ из равенств, в которых $\nu_{1.2}$ и $\mu_{1.2}$ выражены через $p_{1.2} = \cos B_0^{(1.2)}$.

Примеры 3 и 4. (приложения 4, 5; рис. 3). В этих примерах дано решение прямой сфероидической засечки двумя путями: а) с вычислением только координат B_3, L_3 определяемой точки 3, *б*) с одновременным вычислением расстояний $s_{1.3}$, $s_{2.3}$ и координат B_3, L_3.

В обоих примерах решается одна и та же прямая засечка, опорные точки которой 1, 2 взяты вблизи Мурманска и Хабаровска, а определяемая точка 3 находится вблизи Сан-Франциско в США, так что расстояния $s_{1.3}$, $s_{2.3}$ от опорных точек до определяемой оказались почти равными: $s_{1.3} = 8073$ *км*, $s_{2.3} = 7947$ *км*. Азимуты засекающих лучей равны соответственно: $A_{1.3} = 341°13'$, $A_{2.3} = 53°06'$, причем северный полюс P сфероида попал внутрь треугольника 123 (рис. 3).

Последовательность вычисления прямой сфероидической засечки обоими указанными способами достаточно подробно изложена в делянке 6, но только в данных примерах вместо частных разложений были взяты разложения общего вида [Дел. 7; (2а)], так как на дугах $\Delta\Gamma_{1.3}$ и $\Delta\Gamma_{2.3}$ лежат северные вершины $O_{1.3}$ и $O_{2.3}$ выравненных кривых $\Gamma_{1.3}$, $\Gamma_{2.3}$. Здесь же мы ограничимся лишь отдельными замечаниями.

1. При вычислении прямой засечки по первому способу начальное значение $B_3^{(0)}$ широты определяемой точки 3 было получено ре-

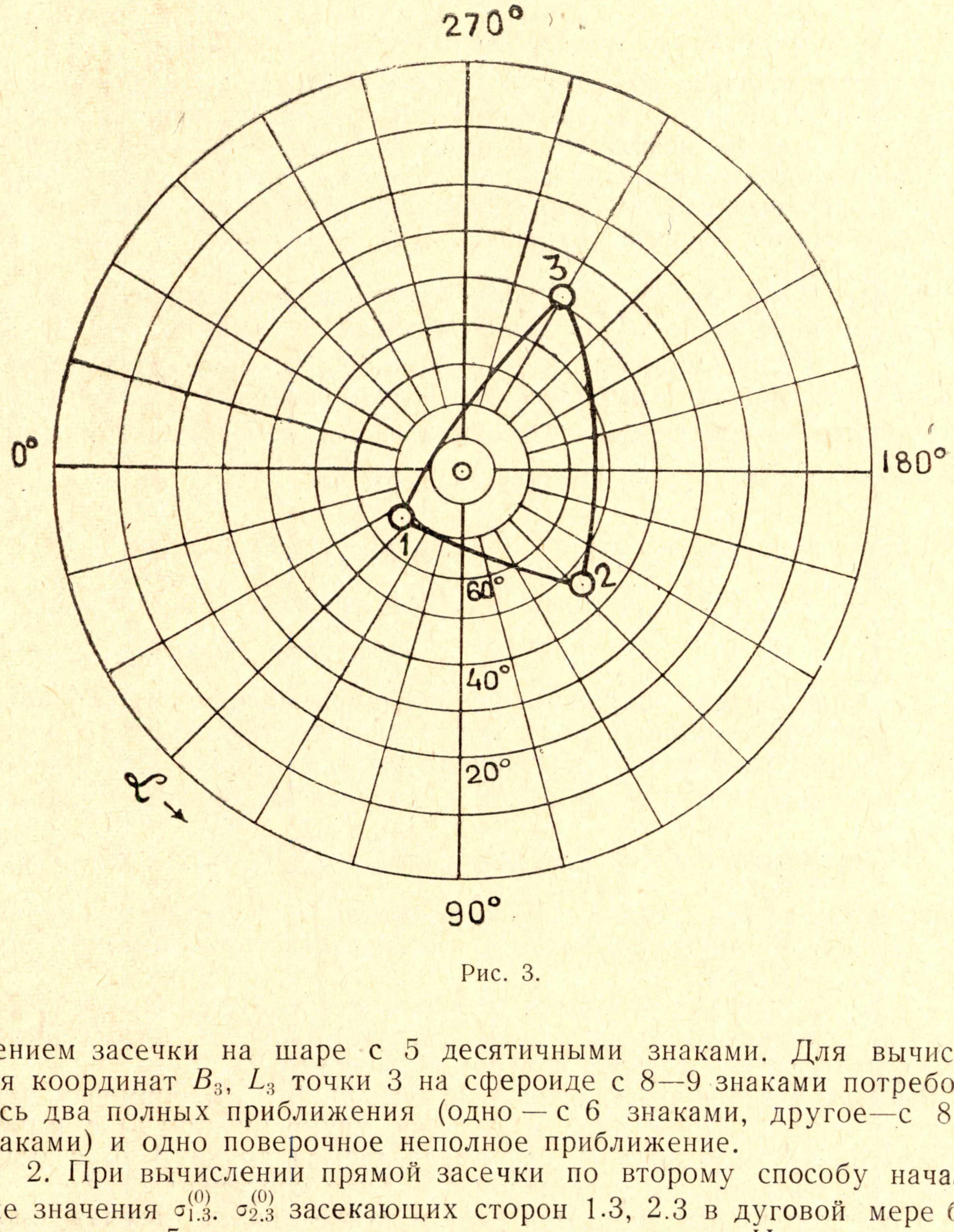

Рис. 3.

шением засечки на шаре с 5 десятичными знаками. Для вычисления координат B_3, L_3 точки 3 на сфероиде с 8—9 знаками потребовалось два полных приближения (одно — с 6 знаками, другое—с 8—9 знаками) и одно поверочное неполное приближение.

2. При вычислении прямой засечки по второму способу начальные значения $\sigma_{1.3}^{(0)}$. $\sigma_{2.3}^{(0)}$ засекающих сторон 1.3, 2.3 в дуговой мере были получены 5-значным решением засечки на шаре. Но дальше требовалось найти соответствующие начальные значения $s_{1.3}^{(0)}$, $s_{2.3}^{(0)}$ длин этих сторон на сфероиде. С этой целью была вычерчена мелкая картографическая сетка северного полушария в полярной стереографической проекции (рис. 3), на которой затем было построено равноугольное изображение $1'\,2'\,3'$ соответствующего сферического треугольника $1^\circ 2^\circ 3^\circ$. Разбив каждую засекающую сторону $i'3' = 1'3'$, $2'3'$ треугольника $1'2'3'$ на четыре части, определили по картографической сетке с точностью

Приложение 1

Решение прямой задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$

1. Исходные данные.

B_1	68°34′15″.739
L_1	29°42′16″.347
$A_{1.2}$	229°03′15″.460
$s_{1.2}$	25 648 923.7

2. Вычисление величин:

$\nu,\ \kappa^2,\ \tau^2,\ \varphi,\ C_0,\ D_{2u}$

$\lg\sin A_{1.2}$	9.878 13727n
$\lg\cos B_1$	9.562 70597
$-\lg V_1$	−0.000 19522
$-\lg\sqrt{1-e^2}$	−9.998 54166
$\lg\nu$	9.442 10636n
$\lg\nu^2$	8.884 21272
$\lg e^2$	7.825 64818
$\lg e^2\nu^2$	6.709 86090
e^2	0.006 693422
$e^2\nu^2$	0.000 512697
ν^2	0.076 59717
$e^2-e^2\nu^2$	0.006 180725
$1-e^2\nu^2$	0.999 48730
$1-\nu^2$	0.923 40283
$\lg(e^2-e^2\nu^2)$	7.791 03942
$-\lg(1-e^2\nu^2)$	9.999 77728
$\lg(1-\nu^2)$	9.965 39120
$\lg\kappa^2$	7.791 26214
$\lg\tau^2$	0.034 38608
κ^2	0.006 183895
κ^4	0.000 038241

κ^6	0.000 000236
κ^8	$0.000\ 00001_5$
$\lg\sin B_1$	9.968 88962
$\lg\tau$	0.017 19304
$\lg\sin\varphi_1$	9.986 08266
φ_1	75°34′19″.741
1	1.000 000000
*) $c_{02}\,\kappa^2$	0.004 637921
$c_{04}\,\kappa^4$	0.000 026888
$c_{06}\kappa^6$	161
$c_{08}\kappa^8$	1
C_0	+1.004 664971
$c_{22}\kappa^2$	−0.002 318961
$c_{24}\kappa^4$	−0.000 017925
$c_{26}\kappa^6$	— 121
$c_{28}\kappa^8$	— 1
C_2	−0.002 337008
$c_{44}\kappa^4$	+0.000 002242
$c_{46}\kappa^6$	+ 24
C_4	+0.000 002266
$C_6=c_{66}\kappa^6$	−0.000 000027
$C_2:C_0=D_2$	−0.002 326156
$C_4:C_0=D_4$	+0.000 002255
$C_6:C_0=D_6$	−0.000 000027

3. Вычисление B_2.

$\lg s_{1.2}$	7.4090 69146
$\lg\sqrt{1-e^2\nu^2}$	9.9998 88636
$-\lg(1-e^2)a^2$	6.8017 84509
$-\lg C_0$	0.0020 21260
$\lg Q$	0.6051 52013
Q	4.028 58019
$-(\pi+\varphi_1)$	4.460 57550
$\varphi_2^{(0)}$	−0.431 99531
=	−24°45′05″.4
$\sin 2\varphi_2^{(0)}$	−0.760 440
$+\ \sin 2\varphi_1$	+0.482 605
$\sin 4\varphi_2^{(0)}$	−0.9877
$+\ \sin 4\varphi_1$	−0.8454
$\sin 6\varphi_2^{(0)}$	−0.52
$+\ \sin 6\varphi_1$	+1.00
$\varepsilon_2^{(0)}$	−0.277 835
$\varepsilon_4^{(0)}$	−1.8331
$\varepsilon_6^{(0)}$	+0.48
$-D_2\varepsilon_2^{(0)}$	−0.000 646289
$-D_4\varepsilon_4^{(0)}$	+0.000 004134
$-D_6\varepsilon_6^{(0)}$	+ 13
$\delta\varphi_2^{(0)}$	−0.000 642142
$\cos 2\varphi_2^{(0)}$	+0.649 408
$\cos 4\varphi_2^{(0)}$	−0.156 54
$\cos 6\varphi_2^{(0)}$	−0.060
$-2D_2\cos 2\varphi_2^{(0)}$	+0.003 02125
$-4D_4\cos 4\varphi_2^{(0)}$	+0.000 00141
$-6D_6\cos 6\varphi_2^{(0)}$	+ 1
$\varkappa$	+0.003 02267

*) Значения чисел $c_{2u\cdot 2\lambda}$ даны в приложении 3.

$1-\varkappa=\varkappa_1$	$+0.996\ 97733$	p	$0.275\ 90490$		
$\delta\varphi_2^{(0)}:\varkappa_1=\Delta\varphi_2^{(0)}$	$-0.000\ 644089$	$\times\ \omega\sqrt{1-e^2}$	$-0.996\ 6477$		
$\varphi_2^{(0)}$	$-0.431\ 99531$	$\nu\mu$	$-0.274\ 9800$	$\varepsilon_2=\varepsilon_2^{(1)}$	-0.2787
$\varphi_2^{(1)}$	$-0.432\ 63940$			$-1/2\varepsilon_2$	$+0.1394$
$=$	$-24°47'18'',282$	$\pi+\varphi_1$	$4.460\ 576$	$+\ \Delta\varphi_{1.\overline{2}}$	$+4.0279$
		$+\ \varphi_{\overline{2}}$	$-0.432\ 639$	σ_2	$+4.1673$
$\sin\ 2\varphi_2^{(1)}$	$-0.761\ 276$	$\Delta\varphi_{1.2}$	$+4.027\ 937$	$\times\ 3/16e^2\kappa^2\nu\mu$	$-0.00000\ 21341$
$\sin\ 4\varphi_2^{(1)}$	-0.9873	$\times\ \nu\mu$	$-0.274\ 9800$	$\Delta R(1)$	$-0.00000\ 8893$
$\sin\ 6\varphi_2^{(1)}$	-0.52	δ	$-1,107\ 602$		
				$3/4e^2$	$0.005\ 0201$
$\varepsilon_2^{(1)}$	$-0.278\ 671$				
$\varepsilon_4^{(1)}$	-1.8327	$\lg\mathrm{tg}\varphi_{\overline{2}}$	$9.664\ 47223n$	$\times\ R(1)$	$-0.009\ 0854$
$\varepsilon_6^{(1)}$	$+0.48$	$\lg p$	$9.440\ 75941$	$3/4e^2R(1)$	$-0.000\ 045610$
$-D_2\varepsilon_2^{(1)}$	$-0.000\ 648232$	$\lg\mathrm{tg}\varphi_1$	$0.589\ 60696$	$-\Delta R(1)$	$+0.000\ 008893$
$-D_4\varepsilon_4^{(1)}$	$+0.000\ 004133$	$\lg\ \mathrm{tg}(pt_{\overline{2}})$	$9.105\ 23164n$	$\nu\mu F(2)=R(2)$	$-0.000\ 037717$
$-D_6\varepsilon_6^{(1)}$	$+\qquad 13$	$\lg\mathrm{tg}(pt_1)$	$0.030\ 36637$		
$\Delta\varphi_2^{(0)}$	$-0.000\ 644086$	$pt_{\overline{2}}=\vartheta_{\overline{2}}$	$-7°15'41''.038$	$\varepsilon_4=\varepsilon_4^{(1)}$	-1.8327
$\varphi_2^{(0)}$	$-0.431\ 99531$	$pt_1=\vartheta_1$	$+47°00'05''.268$	$3/8\Delta\varphi_{1.\overline{2}}$	$+1.5105$
$\varphi_2^{(1)}=\varphi_{\overline{2}}$	$-0.432\ 63940$	$180°+(\vartheta_1+\vartheta_{\overline{2}})$	$219°44'24''.230$	$-1/4\varepsilon_2$	$+0.0697$
$=$	$-24°47'18''.282$	$\Delta\vartheta_{1.\overline{2}}$	$3.835\ 18761$	$+1/32\varepsilon_4$	-0.0573
		$\times\ \omega\sqrt{1-e^2}$	$-0.996\ 64767$	σ_4	$+1.5229$
$\lg\ \sin\ \varphi_{\overline{2}}$	$9.622\ 49221n$	$\nu\mu F(0)=R(0)$	$-3.822\ 33080$	$\times\ 5/16e^2\kappa^4\nu\mu$	$-0.00000\ 00220$
$-\lg\ \tau$	$0.017\ 19304$	$-\delta$	$+1.107\ 602$	$\Delta R(2)$	$-0.000\ 000034$
$\lg\ \sin\ B_2$	$9.605\ 29917n$	σ_0	$-2.714\ 729$		
$\overline{B}_{\overline{2}}$	$-23°45'55''.858$	$\times\ e^2/2$	$0.003\ 346711$	$5/6e^2$	$0.005\ 578$
3. Вычисление L_2		$\nu\mu F(1)=R(1)$	$-0.009\ 085413$	$\times\ R(2)$	$-0.000\ 037717$
				$5/6e^2R(2)$	$-0.000\ 000210$
		$3/16e^2$	$0.001\ 2550$	$-\Delta R(2)$	$+\qquad 34$
$\left\lvert\frac{\nu}{\nu}\right\rvert=\omega$	-1	$5/16e^2$	$0.002\ 2092$	$\nu\mu F(3)=R(3)$	$-0.000\ 000176$
		$3/16e^2\kappa^2$	$0.00000\ 77608$	$R(2)$	$-0.000\ 037717$
$\lg\frac{\omega}{\tau}=$		$\nu\mu$	$-0.27\ 498$	$R(1)$	$-0.009\ 085413$
$=\lg\sin B_0$	$9.982\ 80696n$	$5/16e^2\kappa^4$	$0.00000\ 00800$	$R(0)$	$-3.822\ 33080$
B_0	$-73°59'02''.590$	$3/16e^2\kappa^2\nu\mu$	$-0.00000\ 21341$	$\Delta L_{1.\overline{2}}$	$-3.831\ 45411$
$\lg\cos B_0=\lg p$	$9.440\ 75941$	$5/16e^2\kappa^4\nu\mu$	$-0.00000\ 00220$		

$\Delta L_{\overline{1.2}}$	$-219°31'34''.139$
+ L_1	$29°42'16''.347$
$L_{\overline{2}}$	$170°10'42''.208$

4. Вычисление $A_{\overline{2.1}}$

$\lg\sqrt{1-e^2}$	9.998 54166
$\lg\ \nu$	9.442 10636n
$\lg\ V_{\overline{2}}$	0.001 22217
$-\lg\cos B_{\overline{2}}$	-9.961 51714
$\lg\sin A'_{\overline{2.1}}$	9.480 35305n
$A'_{\overline{2.1}}$	$342°24'27''.940$
$A_{\overline{2.1}}$	$162°24'27''.940$

Приложение 2

Решение обратной задачи для выравненной дуги $\Delta\Gamma_{1.2}$

. **Исходные данные**

$B_{\overline{2}}$	$-31°13'27''.653$
B_1	$+68°34'15''.739$
$L_{\overline{2}}$	$233°16'53''.814$
L_1	$29°42'16''.347$
$\Delta L_{\overline{1.2}}$	$203°34'37''.467$
=	3.553 09023

2. Вычисление $A^{(0)}_{\overline{1.2}}$

$\operatorname{tg} B_{\overline{2}}$	-0.60 621
× $\cos B_1$	$+0.36$ 535
$\cos\Delta L_{\overline{1.2}}$	-0.91 653
× $\sin B_1$	$+0.93$ 087
π_1	-0.22 148
π_2	-0.85317

$\pi_1-\pi_2$	$+0.63$ 169
: $\sin\Delta L_{\overline{1.2}}$	-0.39 998
$\operatorname{ctg}\alpha_{\overline{1.2}}$	-1.57 930
$\alpha_{\overline{1.2}}=A^{(0)}_{\overline{1.2}}$	$147°39'30''$

3. Вычисление $p=\cos B_0$

а) Приближение 1

$\sin A^{(0)}_{\overline{1.2}}$	$+0.53$ 496
$\cos B_1$	$+0.36$ 535
$\cos B^{(0)}_0=p^{(0)}$	$+0.19$ 545
× $\frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}\sqrt{1-e^2}$	$+0.99$ 665
$\nu\mu$	$+0.19$ 480
B_0	$+78°43'44''$
$\csc B_0=\tau$	1.01 967

e^2	0.00 6693
: τ^2	1.03 973
$e^2:\tau^2=\kappa^2$	0.00 6438
$\sin B_{\overline{2}}$	-0.51 839
× τ	$+1.01$ 967
× $\sin B_1$	$+0.93$ 087
$\sin\varphi_{\overline{2}}$	-0.52 859
$\sin\varphi_1$	$+0.94$ 918
$\varphi_{\overline{2}}$	$-31°54'.36''$
φ_1	$+71°39'18''$
$180°+(\varphi_1+\varphi_{\overline{2}})$	$219°45'\ 42''$
$=\Delta\varphi_{1,\overline{2}}$	$+3.83$ 527
× $\nu\mu$	$+0.19$ 480
δ	$+0.74$ 171

$\Delta L_{1.\overline{2}}$	$+3.553\ 090$
$\times\ \sqrt{1-e^2}$	$+0.996\ 648$
$\nu\mu F(0)=R(0)$	$+3.541\ 180$
$-\delta$	$-0.747\ 11$
σ_0	$+2.794\ 07$
$\times\ e^2/2$	$0.003\ 3467$
$\nu\mu F(1)=R(1)$	$+0.009\ 351$
$\sin 2\varphi_{\overline{2}}$	-0.8974
$+\ \sin 2\varphi_1$	$+0.59\ 75$
ε_2	-0.2999
$-\frac{1}{2}\varepsilon_2$	$+0.1500$
$+\ \Delta\varphi_{1.\overline{2}}$	$+3.8353$
σ_2	$+3.9853$
$3/16\, e^2$	$0.001\ 255$
$3/16\, e^2\kappa^2$	$0.0000\ 08079$
$3/16 e^2\kappa^2\nu\mu$	$+0\ 0000\ 01574$
$\times\ \sigma_2$	$+3.9853$
$\Delta R\,(1)$	$0.0000\ 0627$
$3/4\, e^2$	$0.005\ 020$
$\times\ R\,(1)$	$+0.009\ 351$
$3/4\, e^2R(1)$	$+0.000\ 047$
$-\Delta R\,(1)$	$-0.000\ 006$
$\nu\mu F(2)=R(2)$	$+0.000\ 041$
$R\ (0)$	$+3.541\ 180$
$R\,(1)$	$+0.009\ 351$
$R\ (2)$	$+\qquad 41$
$\Delta L^{(0)}_{1.\overline{2}}$	$+3.550\ 572$
$-\ \Delta L_{1.\overline{2}}$	$+3.553\ 090$
$w^{(0)}$	$-\quad 2\ 518$

$\operatorname{tg}\ \varphi_{\overline{2}}=t_{\overline{2}}$	$-0.62\ 269$
$\operatorname{tg}\varphi_1=t_1$	$+3.01\ 58$
$(t_{\overline{2}}+t_1)$	$+2.3931$
$\times\ \frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}\tau^2\sqrt{1-e^2}$	$+1.03\ 623$
$\frac{dw^{(0)}}{dp}=\varkappa^{(0)}$	$+2.4798$
$p^{(0)}$	$+0.195\ 450$
$-w^{(0)}:\varkappa= =\Delta p^{(0)}$	$+\quad 1\ 015$
$p^{(1)}$	$+0.196\ 465$

б) Приближение 2

$p^{(1)}=\cos B_0$	$+0.196\ 46500$
$\lg p^{(1)}=\lg p$	$9.293\ 28519$
B_0	$+78°40'10''.857$
$\lg\operatorname{csc}B_0=\lg\tau$	$0.008\ 54760$
$\frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}\sqrt{1-e^2}$	$+0.996\ 648$
$\times\ p$	$+0.196\ 465$
$\nu\mu$	$+0.195\ 806$
$\lg\ \sin\ B_{\overline{2}}$	$9.714\ 65700n$
$\lg\ \tau$	$0.008\ 54760$
$\lg\ \sin\ B_1$	$9.968\ 88962$
$\lg\ \sin\ \varphi_{\overline{2}}$	$9.723\ 20460\ n$
$\lg\ \sin\ \varphi_1$	$9.977\ 43722$
$\varphi_{\overline{2}}$	$-31°55'02''.186$
φ_1	$+71°41'26''.029$
$180°+(\varphi_1+\varphi_{\overline{2}})$	$219°46'23''.843$
$=\Delta\varphi_{1.\overline{2}}$	$+3.835\ 76731$
$\times\ \nu\mu$	$+0.195\ 806$
δ	$+0.751\ 066$

$\lg\ \operatorname{tg}\ \varphi_{\overline{2}}$	$9.794\ 39292n$
$\lg\ p$	$9.293\ 28519$
$\lg\ \operatorname{tg}\ \varphi_1$	$0.480\ 30178$
$\lg\operatorname{tg}(pt_{\overline{2}})$	$9.08767811n$
$\lg\operatorname{tg}\,(pt_1)$	$9.773\ 58697$
$pt_{\overline{2}}=\vartheta_{\overline{2}}$	$-6°58'35''.936$
$pt_1=\vartheta_1$	$+30°41'55''.529$
$180°+(\vartheta_1+\vartheta_{\overline{2}})$	$203°43'19''.593$
$=\Delta\vartheta_{1.\overline{2}}$	$+3.555\ 62156$
$\times\ \frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}\sqrt{1-e^2}$	$+0.996\ 64767$
$\nu\mu F(0)=R(0)$	$+3.543\ 70194$
$-\delta$	$-0.751\ 066$
σ_0	$+2.792\ 636$
$\times\ e^2/2$	$0.003\ 34671$
$\nu\mu F(1)=R(1)$	$+0.009\ 34614$
$e^2:\tau^2=\kappa^2$	$0.006\ 435$
κ^4	$0.0000\ 4141$
$3/16\ e^2$	$0.001\ 255$
$5/16\ e^2$	$0.002\ 092$
$3/16\ e^2\kappa^2$	$0.0000\ 08076$
$\times\ \nu\mu$	$+0.19\ 581$
$\times\ 5/16\ e^2\kappa^4$	$0.0000\ 000866$
	см. дальше
$\sin\ 2\varphi_{\overline{2}}$	-0.8975
$+\ \sin\ 2\varphi_1$	$+0.5965$
ε_2	-0.3010
$-1/2\ \varepsilon_2$	$+0.1505$
$+\ \Delta\varphi_{1.2}$	$+3.8358$
σ_2	$+3.9863$
$\times\ 3/16e^2\kappa^2\nu\mu$	$+0.0000\ 01581$
$\Delta R\,(1)$	$+0.0000\ 06302$

$3/4\ e^2$	0.005 020
$\times$ $R\,(1)$	+0.009 346
$3/4\ e^2 R\,(1)$	+0.0000 4692
$-\Delta R\ (1)$	−0.0000 0630
$\nu\mu F(2)=R(2)$	+0.0000 4062
$\sin 4\varphi_{\bar{2}}$	−0.7916
$\sin 4\varphi_1$	−0.9575
σ_4	−1.7491
$3/8\ \Delta\varphi_{1.\bar{2}}$	+1.4384
$-1/4\ \varepsilon_2$	+0.0753
$+1/32\ \varepsilon_4$	−0.0547
σ_4	+1.4590
$\times$ $5/16\ e^2\varkappa^4\nu\mu$	+0.0000 000170
$\Delta R\ (2)$	+0.0000 000248
$5/6\ e^2$	0.005 578
$\times$ $R\,(2)$	+0.0000 4062
$5/6\ e^2 R\,(2)$	+0.0000 00227
$-\Delta\ R\,(2)$	− 025
$\nu\mu F(3)=R(3)$	+0.0000 0020
$R\,(0)$	+3.543 70194
$R\,(1)$	+0.009 34614
$R\,(2)$	+ 4062
$R\,(3)$	+ 20
$\Delta L^{(1)}_{1.\bar{2}}$	+3.553 08890
$-\Delta L_{1.\bar{2}}$	+3.553 09023
$w^{(1)}$	− 133

$\operatorname{tg}\varphi_{\bar{2}}=t_{\bar{2}}$	−0.62 286
$\operatorname{tg}\varphi_1=t_1$	+3 02 188
$(t_1+t_{\bar{2}})$ $\times$	+2.39 902
$\frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}\tau^2\sqrt{1-e^2}$	+1.03 666
$\frac{dw^{(1)}}{dp}=\varkappa^{(1)}$	+2.48 70
$-w^{(1)}:\varkappa^{(1)}= =\Delta p^{(1)}$	+ 53
$p^{(1)}$	+0.196 46500
$p^{(2)}=p$	+0.196 46553

4. Поверочный расчет для p

$p=\cos B_0$	+0.196 46553
$\lg\ p$	9.293 28636
B_0	78°40′10″.746
$\lg\sin B_{\bar{2}}$	9.714 65700n
$\lg\operatorname{csc} B_0=\lg\tau$	0.008 54765
$\lg\sin\ B_1$	9.968 88962
$\lg\sin\ \varphi_{\bar{2}}$	9.723 20465n
$\lg\sin\ \varphi_1$	9.977 43727
$\varphi_{\bar{2}}$	−31°55′ 02″.201
φ_1	+71°41′26″.100
$180°+(\varphi_1+\varphi_{\bar{2}})$	219°46′23″.899
$=\Delta\varphi_{1.\bar{2}}$ $\times$	+3.835 76799
$\nu\mu$	+0.195 807
δ	+0.750 070
$\lg\operatorname{tg}\varphi_{\bar{2}}$	9.794 39299
$\lg\ p$	9.293 28636
$\lg\operatorname{tg}\varphi_1$	0.480 30229
$\lg pt_{\bar{2}}$	9.087 67935
$\lg pt_1$	9.773 58865
$pt_{\bar{2}}=\vartheta_{\bar{2}}$	−6°58′36″.008
$pt_1=\vartheta_1$	+30°41′55″.879

$180°+(\vartheta_1+\vartheta_{\bar{2}})$	203°43′19″.871
$=\Delta\vartheta_{1.\bar{2}}$ $\times$	+3.555 62291
$\frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}\sqrt{1-e^2}$	+0.996 64767
$\nu\mu F(0)=R(0)$	+3.543 70328
$-\delta$	−0.751 070
$\times$ σ_0	+2.792 638
$e^2/2$	0.003 34671
$\nu\mu F(1)=R(1)$	+0.009 34613
$R\,(0)$	+3.543 70328
$R\,(1)$	+0.009 34613
$R\,(2)$	+ 04062
$R\,(3)$	+ 20
$\Delta L^{(2)}_{1.2}$	+3.553 09023
$\Delta L_{1.\bar{2}}$	+3.553 09023
$w^{(2)}$	0

5. Вычисление $A_{1.\bar{2}}$ и $A_{\bar{2}.1}$

$\lg\frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}\ p$	9.923 28636
$\lg\ V_1$	0.000 19522
$-\lg\ V_0$	−0.000 05647
$-\lg\cos B_1$	−9.562 70597
$\lg\sin A_{1.\bar{2}}$	9.730 71914
$A_{1.\bar{2}}$	147°27′27″.800
$\lg\frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}\ p$	9.923 28636
$\lg\ V_{\bar{2}}$	0.001 06741
$-\lg\ V_0$	−0.000 05647
$-\lg\cos B_{\bar{2}}$	−9.932 03927
$\lg\sin A'_{\bar{2}.1}$	9.362 25803
$A'_{\bar{2}.1}$	13°18′49″.009
$A_{\bar{2}.1}$	193°18′49″.009

6. Вычисление $s_{1.\overline{2}}$.

$\lg(1-e^2)$	9.997 083312
+ $\lg V_0$	0.000 056473
$\lg \mu$	9.997 139785
$\lg a$	6.804 701197
$\lg a\mu$	6.801 840982
$\lg e^2$	7.825 64818
− $\lg \tau^2$	0.017 09530
$\lg k^2$	7.808 55288
k^2	0.00643 50641
k^4	0.00004 14100
k^6	0.00000 02665
k^8	0.00000 00017
1	1.000 000000
*) $c_{02}\,k^2$	0.004 826298
$c_{04}\,k^4$	0.000 029116
$c_{06}\,k^6$	0.000 000 187
$c_{08}\,k^8$	01
C_0	+1.004 85560
$c_{22}\,k^2$	−0.002 413149
$c_{24}\,k^4$	− 019411
$c_{26}\,k^6$	− 137
C_2	−0.002 43270
$c_{44}\,k^4$	+0.000 002426
$c_{46}\,k^6$	+ 27
C_4	+0.000 002453
$c_{66}\,k^6 = C_6$	−0.000 000031

$\sin 2\varphi_{\overline{2}}$	−0.897 524
+ $\sin 2\varphi_1$	+0.596 488
$\sin 4\varphi_{\overline{2}}$	−0.7916
+ $\sin 4\varphi_1$	−0.9575
$\sin 6\varphi_{\overline{2}}$	+0.21
+ $\sin 6\varphi_1$	+0.87
ε_2	−0.301 036
ε_4	−1.7491
ε_6	+1.08
$C_2\,\varepsilon_2$	+0.000 732330
$+C_4\,\varepsilon_4$	− 4291
$C_6\,\varepsilon_6$	− 34
$\Delta\sigma_{1.\overline{2}}$	+0.000 72802
$\lg \Delta\sigma_{1.\overline{2}}$	6.86214_{-10}
$\lg a\mu$	6.80 184
$\lg \Delta s^{(0)}_{1.\overline{2}}$	3.66 398
$\Delta s^{(0)}_{1.\overline{2}}$	+4613.0 *м*
$\lg C_0$	0.002 103657
$\lg \Delta\varphi_{1.\overline{2}}$	0.583 852331
$\lg a\mu$	6.801 840982
$\lg s^{(0)}_{1.\overline{2}}$	7.387 796970
$s^{(0)}_{1.\overline{2}}$	24 422 885.1
$\Delta s^{(0)}_{1.\overline{2}}$	4613.0
$s_{1.\overline{2}}$	24 427 488.1

*) См. Приложение 3.

Значение чисел $C_{0.2\lambda}, C_{2u.2\lambda}$.

$$1)\ c_{0.2\lambda} = (-1)^{\lambda}\,\frac{\binom{-3/2}{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda}}{2^{2\lambda}}$$

$$2)\ c_{2u.2\lambda} = (-1)^{\lambda-u}\cdot\frac{\binom{-3/2}{\lambda}\binom{2\lambda}{\lambda-u}}{2^{2\lambda}\cdot u}$$

$(u, \lambda = 1, 2, \ldots, n;\ u \leqslant \lambda)$

$c_{02} = +0.75$ $\quad c_{22} = -0.375$

$c_{04} = +0.703125$ $\quad c_{24} = -0468750$

$c_{06} = +0.6836$ $\quad c_{26} = -0.5127$

$c_{08} = +0.63$ $\quad c_{28} = -0.54$

$c_{44} = +0.058594$ $\quad c_{66} = -0.116$

$c_{4.6} = +0.1025$ $\quad c_{68} = -0.03$

$c_{4.8} = +0.13$

$c_{88} = +0.0517$

Приложение 4

Решение прямой выравненнолучевой засечки (первый способ)

1. Исходные данные.

B_1	67°28′52″.763
L_1	36°54′39″.412
=	0.644 21757
$A_{1.3}$	341°13′15″.376
B_2	46°12′34″.548
L_2	136°07′13″.693
=	2.375 75039
$A_{2.3}$	53°05′34″.727

2. Вычисление $B_3^{(0)}$, $L_3^{(0)}$

	$90° - B_1 = \Theta_1$	22°31′07″
	$90° - B_2 = \Theta_2$	43°47′25″
	$\Delta L_{1.2}$	99°12′34″
×	$\cos\Theta_2$	+ 0.72 188
	$\cos\Delta L_{1.2}$	— 0.16 004
×	$\operatorname{ctg} A_{2.3}$	+ 0.75 101
	$\sin\Delta L_{1.2}$	+ 0.98 711
×	$\operatorname{ctg}\Theta_1$	+ 2.41 200
	$\sin\Theta_2$	+ 0.69 202
	+ п$_1$	— 0.11 553
	— п$_2$	— 0.74 133
	— п$_3$	— 1.66 915
	a	— 2.52 601

×	$\operatorname{ctg} A_{1.3}$	— 2.9410
	$\sin\Theta_2$	+ 0.69 202
:	$\sin\Theta_1$	+ 0.38 298
×	$\operatorname{ctg} A_{2.3}$	+ 0.75 101
	$\cos\Delta L_{1.2}$	— 0.16 004
×	$\cos\Theta_2$	+ 0.72 188
	$\sin\Delta L_{1.2}$	+ 0.98 711
	+ н$_1$	— 5.31 420
	— н$_2$	+ 0.12 019
	— н$_3$	— 0.71 257
	b	— 5.90 658
	$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\Delta L_{1.3}^{(0)}$	+ 0.42 766
	$\Delta L_{1.3}^{(0)}$	203°09′16″
	$+ L_1$	36°54′39″
	$L_3^{(0)}$	240°03′55″
	$- L_2$	136°07′14″
	$\Delta L_{2.3}^{(0)}$	103°56′41″
×	$\operatorname{ctg} A_{1.3}$	— 2.9410
	$\sin\Delta L_{1.3}^{(0)}$	— 0.39 321
×	$\cos\Theta_1$	+ 0.92 376
	$\cos\Delta L_{1.3}^{(0)}$	— 0.91 945
	г$_1$	+ 1.15 643
	г$_2$	— 0.84 935
	г$_1$ + г$_2$	+ 0.30 708
:	$\sin\Theta_1$	+ 0.38 298
	$\operatorname{tg} B_3^{(0)}$	+ 0.80 182

×	$\operatorname{ctg} A_{2,3}$	+ 0.75 101
	$\sin\Delta L_{2.3}$	+ 0.97 053
×	$\cos\Theta_2$	+ 0.72 188
	$\cos\Delta L_{2.3}$	— 0.24 099
	ж$_1$	+ 0.72 888
	ж$_2$	— 0.17 397
	ж$_1$ + ж$_2$	+ 0.55 491
:	$\sin\Theta_2$	+ 0.69 202
	$\operatorname{tg} B_3^{(0)}$	+ 0.80 187
	$B_3^{(0)} \approx B_3$	38°43′27″

3. Расчет величин ν_{i3}, k^2_{i3}, τ_{i3}, p_{i3}, $\nu_{i3}\mu_{i3}$, φ^3_i, ϑ^3_i ; $(i = 1,2)$

$\lg \sin A_{i3}$	9.507 74760 *n*	9.902 87881
$\lg \cos B_i$	9.583 18128	9.840 12007
$-\lg V_i$	—0.000 21452	—0.000 69961
$-\lg\sqrt{1-e^2}$	—9.998 54166	—9.998 54166
$\lg \nu_{i3}$	9.092 17270 *n*	9.743 75761
$\lg \nu^2$	8.184 34540	9.487 51522
$\lg e^2$	7.825 64818	7.82564818
$\lg e^2\nu^2$	6.009 99358	7.313 16340
e^2	0.006 693422	0.006 693422
$e^2\nu^2$	0.000 102328	0.002 056664
ν^2	0.015 28781	0.307 26650
$e^2-e^2\nu^2$	0.006 591094	0.004 636758
$1-e^2\nu^2$	0.999 89767	0.997 94334
$1-\nu^2$	0.984 71219	0.692 73350
$\lg(\nu^2-e^2\nu^2)$	7.818 95750	7.666 21443
$-\lg(1-e^2\nu^2)$	9.999 95556	9.999 10588
$-\lg(1-\nu^2)$	9.993 30932	9.840 56619
$\lg k^2$	7.819 00194	7.667 10855
$\lg \tau^2$	0.006 64624	0.158 53969
k^2	0.006 591768	0.004 646314
k^4	0.000 043451	0.000 021588
k^6	0.000 000286	0.000 000100
k^8	0.000 0000019	0.000 0000005
$\lg\frac{1}{\tau}=\lg\sin B_0$	9.996 67688	9.920 73016
B_0	82°55′16″.038	56°25′30″.272
$\lg\cos B_0=\lg p_0$	9.090 73637	9.742 74631
$\frac{\nu}{\lvert\nu\rvert}=\omega$	— 1	+ 1

p	0.123 23565	0.553 02697
$\omega\sqrt{1-e^2}$	—0.996 64767	+ 0.996 64767
$\nu\mu$	—0.122 8226	+ 0.551 1730
$\lg\sin B_3$	9.965 55668	9.858 46269
$+\ \lg\tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984
$\lg\sin\varphi^3_i$	9.968 87980	9.937 73253
φ^3_i	68°34′03″.855	60°02′46″.239
$\lg\operatorname{tg}\varphi^3_i$	0.406 11008	0.239 36934
$+\ \lg p_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631
$\lg\operatorname{tg}\vartheta^3_i$	9.496 84645	9.982 11565
ϑ^3_i	17°25′44″.940	43°49′14″.183

4. Первое приближение для B_3, L_3

$B^{(0)}_3 \approx B_1$	38°43′27″	
$\lg\sin B_3$	9.796 277	9.796 277
$\lg\tau_{i3}$	0.003 323	0.079 270
$\lg\sin\varphi^i_3$	9.799 600	9.875 547
φ^i_3	39°04′40″.4	48°39′47″.2
φ^3_i	68°34′03″.9	60°02′46″.2
$180°-(\varphi^3_i+\varphi^i_3)$	+ 72°21′15″.7	+ 71°17′26″.6
$\pi-(\varphi^3_i+\varphi^i_3)$	+ 1.262 822	+ 1.244 258
$\times\ \nu\mu$	— 0.122 82	+ 0.551 17
δ	— 0.15 510	+ 0.68 580
$\lg\operatorname{tg}\varphi^i_3$	9.909 576	0.055 684
$+\ \lg p_{i3}$	9.090 736	9.742 746
$\lg\operatorname{tg}\vartheta^i_3$	9.000 312	9.798 430
ϑ^i_3	5°42′52″.8	32°09′24″.5
ϑ^3_i	17°25′44″.9	43°49′14″.2
$180°-(\vartheta^3_i+\vartheta^i_3)$	156°51′22″.3	104°01′21″.3

$\pi-(\vartheta^3_i+\vartheta^i_3)$	2.737 6571	1.815 5367
$\times$		
$\omega\sqrt{1-e^2}$	$-$ 0.996 64767	$+$0.996 64767
$\nu\mu F(0)=R(0)$	$-$ 2.728 4796	$+$ 1.809 4504
$-\delta$	$+$ 0.155 10	$-$ 0,685 80
σ_0	$-$ 2.57 338	$+$ 1.123 65
$\times$ $e^2/_2$	0.003 3467	0.003 3467
$\nu\mu F(1)=R(1)$	$-$ 0.008 6123	$+$0.003 7605
$3/16\ e^2$	0.001 2550	0.001 2550
$3/16\ e^2k^2$	0.000 00827	0.000 00583
$-\left[\sin 2\varphi^i_3\right.$	$+$ 0.979	$+$ 0.992
$+$		
$\left.\sin 2\varphi^3_i\right]$	$+$ 0.680	$+$ 0.865
ε_2	$-$ 1.659	$-$ 1.857
$-\frac{1}{2}\varepsilon_2$	$+$ 0.830	$+$ 0.928
$+$		
$\pi-(\varphi^3_i+\varphi^i_3)$	$+$ 1.263	$+$ 1.244
σ_2	$+$ 2.093	$+$ 2.172
$\times$		
$3/16\ e^2k^2\nu\mu$	$-$ 0.000 00102	$+$0.000 00321
$\Delta R(1)$	$-$ 0.000 0021	$+$ 0.000 0070
$3/4\ e^2$	$+$ 0.005 020	$+$ 0.005 020
$\times$ $R(1)$	$-$ 0.008 612	$+$ 0.003 761
$3/4\ e^2R(1)$	$-$ 0.000 0432	$+$ 0.000 0189
$-\Delta R(1)$	$+$ 21	$-$ 70
$\nu\mu F(2)=R(2)$	$-$ 0.000 0411	$+$0.000 0119
$R(1)$	$-$ 0.008 6123	$+$ 0.003 7605
$R(0)$	$-$ 2.728 4796	$+$ 1.809 4504
$\nabla L^{(0)}_{1.3},\ \Delta L^{(0)}_{2.3}$	$-$ 2.737 1330	$+$ 1.813 2228
$L_1+2\pi,\ L_2$	$+$ 6.927 4029	$+$2.375 7504
$L^{(0)}_{i3}$	4.190 2699	4.188 9732
$w^{(0)}_L$	0.001 2967	$+$ 267″.46

$\lg\sqrt{1-e^2}$	9.99 854	9.99 854
$\lg\nu_{i3}$	9.09 217 n	9.74 376
$\lg V_3$	0.00 089	0.00 089
$-\lg\cos B_3$	$-$ 9.89 219	$-$ 9.89 219
$\lg\sin A'_{3i}$	9.19 941 n	9.85 100
A'_{3i}	189°06′24″	134°48′00″
$\lg\operatorname{tg} A'_{3i}$	9.20 491	0.00 303 n
$-\lg V^2_3$	$-$ 0.00 178	$-$ 0.00 178
$-\lg\cos B_3$	$-$ 9.89 219	$-$ 9.89 219
$\lg\frac{\partial L^i_3}{\partial B_3}=\lg a_{i3}$	9.31 094	0.10 906 n
a_{i3}	$+$ 0.20461	$-$ 1.28 541
$b=a_{1.3}-a_{2.3}$	$+$ 1.4901	

$$\left(\frac{\partial L^1_3}{\partial B_3}-\frac{\partial L^2_3}{\partial B_3}\right)\delta B^{(0)}_3+w^{(0)}_L=0$$

$$+1.49001\ \delta B^{(0)}_3+267''.46=0$$

$\delta B^{(0)}_3$	$-$ 0.000 87024	$-$ 02′59″.50
$B^{(0)}_3$		38°43′27″.0
$B^{(1)}_3$		38°40′27″.5
a_{i3}	$+$ 0.20461	$-$ 1.28 541
$\times$ $\delta B^{(0)}_3$	$-$ 0.000 87024	$-$ 0.000 87024
$\delta L^{i\,(0)}_3$	$-$ 0.000 1781	$+$ 0.001 1186
$+$ $L^{i\,(0)}_3$	4.190 2699	4.188 9732
$L^{i\,(1)}_3\approx L_3$	4.190 0918	4.190 0918

5. Второе приближение для B_3, L_3

$B_3^{(1)} \approx B_3$	38°40′27″.5	
$\lg\sin B_3$	9.795 80539	9.795 80539
$\lg\tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984
$\lg\sin\varphi_3^i$	9.799 12851	9.875 07523
φ_3^i	39°01′38″.777	48°35′32″.882
φ_i^3	68°34′03″.855	60°02′46″.239
$180° - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	72°24′17″.368	71°21′40″.879
$\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	1.263 70258	1.24549061
$\times$ $\nu\mu$	— 0.122 8226	+ 0.551 1730
δ	— 0.155 2113	+ 0.686 4808
$\lg \mathrm{tg}\varphi_3^i$	9.908 79441	0.054 60416
$\lg p_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631
$\lg \mathrm{tg}\vartheta_3^i$	8.999 53078	9.797 35047
ϑ_3^i	5°42′16″.082	32°05′33″.491
ϑ_i^3	17°25′44″.940	43°49′14″.183
$180° - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	156°51′58″.968	104°05′12″.326
$\pi - (\vartheta_i^3 + \vartheta_3^i)$	2.737 834817	1.816 656621
$\times$ $\omega\sqrt{1-e^2}$	— 0.996 647670	+0.996 647670
$\nu\mu F(0) = R(0)$	— 2.728 656691	+1.810 566589
$-\delta_0$	— 0.155 2113	— 0.686 4808
σ_0	— 2.573 4454	+ 1.124 0856
$\times$ e_2^2	0.003 346711	0.003 346711
$\nu\mu F(1) = R(1)$	— 0.008 612578	+0.003 761989
$3/16e^2$, $5/16e^2$	0.000 12550	0.000 20917
$3/16e^2k^2$	0.000 008273	0.000 005831
$\frac{5}{16}e^2k^4$	0.000 000091	0.000 000045

$-\big[\sin 2\varphi_3^i$	+ 0.9783	+ 0.9922
$+ \sin 2\varphi_i^3\big]$	+ 0.6803	+ 0.8652
$-\big[\sin 4\varphi_3^i$	+ 0.405	— 0.248
$+ \sin 4\varphi_i^3\big]$	— 0.997	— 0.868
ε_2	— 1.6586	— 1.8574
ε_4	+ 0.592	+ 1116
$-\frac{1}{2}\varepsilon_2$	+ 0.8293	+ 0.9287
$+$ $\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	+ 1.2637	+ 1.2455
σ_2	+ 2.0930	+ 2.1742
$\times$ $3/16\, e^2k^2\nu\mu$	— 0.000 001016	+ 0.000 003214
$\Delta R(1)$	0.000 002126	+ 0.000 006988
$3/4\, e^2$	0.005 0200	0.005 0200
$\times$ $R(1)$	−0.008 61258	0.003 76199
$3/4\, e^2R(1)$	— 0.000 043235	+ 0.000 018885
$-\Delta R(1)$	+ 0.000 002126	— 0.000 006988
$\nu\mu F(2) = R(2)$	— 0.000 041109	+ 0.000 011897
$\frac{3}{8}[\pi - (\varphi_i^3 + \varphi_3^i)$	+ 0.474	+ 0.467
$-\frac{1}{4}\varepsilon_2$	+ 0415	+0.464
$+\frac{1}{32}\varepsilon_4$	+ 0.019	+ 0.035
σ_4	+ 0.908	+ 0.966
$\times$ $5/16\, e^2k^4\nu\mu$	— 0.000 000011	+ 0.000 000025
$\Delta R(2)$	— 0.000 000010	+ 0.000 000024
$5/6\, e^2$	0.005 578	0.005 578
$\times$ $R(2)$	— 0.000 04111	+ 0.000 01190
$5/6e^2R(2)$	— 0.000 000229	+ 0.000 000066
$-\Delta R(2)$	+ 10	— 24
$\nu\mu F(3) = R(3)$	— 0.000 000219	+0.000 000042

$R(0)$	— 2.728 656691	+1.810 566589
$R(1)$	— 0.008 612578	+0.003 761989
$R(2)$	— 41109	+ 11897
$R(3)$	— 219	+ 42
$\nabla L_{1.3},\ \nabla L_{2.3}$	— 2.737 310597	+1.814340517
$L_1+2\pi,\ L_2$	+ 6.927 402876	+2.375750387
$\overset{(1)}{\underset{3}{Li}}$	+ 4.190 092279	+4.190090904
$w_L^{(1)}$	+ 0.000 001375	+ 0″.2836
$\lg \nu_{i3} V_3 \sqrt{1-e^2}$	9.09 060 n	9.74 319
$-\lg\ \cos B_3$	— 9.89 239	— 9.89 239
$\lg \sin A'_{3i}$	9.19 921 n	9.85 080
A'_{3i}	189°06′09″	134°49′32″
$\lg \operatorname{tg} A'_{3i}$	9.20 471	0.00 264 n
$-\lg V_3^2$	— 0.00 178	— 0.00 178
$-\lg \cos B_3$	— 9.89 239	— 9.89 239
$\lg \dfrac{\partial L_3^i}{\partial B_3} = \lg a_{i3}$	9.31 054	0.10 847 n
a_{i3}	+ 0.20443	— 1.2837
$b = a_{1.3} - a_{2.3}$	+ 1.4881	
$1.4881\ \delta \overset{(1)}{\underset{3}{B^i}}$	+0″.2836=0	
$\delta B_3^{(1)}$	— 0.000 000924	— 0″.1905
$B_3^{(1)}$		38°40′27″.500
$B_3^{(2)}$		38°40′27″.310
a_{i3}	+ 0.20443	— 1.2837
$\times\ \delta B_3^{(1)}$	— 0 000 000924	−0.000000924
$\delta \overset{(1)}{\underset{3}{L i}}$	— 0.000 000189	+0.000001186
$\overset{(1)}{\underset{3}{L i}}$	4.190 09 2279	4.190 090 904
$\overset{(2)}{\underset{3}{Li}}$	4.190 092 090	4 190 092 090
=		240°04′28″533

6. Поверочный расчет для B_3, L_3

B_3	38°40′27″.310	
$\lg \sin B_3$	9.795 80489	9.795 80489
$\lg \tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984
$\lg \sin \varphi_3^i$	9.799 12801	9.875 07473
φ_3^i	39°01′38″.585	48°35′32″.613
φ_i^3	68°34′03″.855	60°02′46″.239
$180°-(\varphi_i^3+\varphi_3^i)$	72°24′17″.560	71°21′41″.148
$\pi-(\varphi_i^3+\varphi_3^i)$	1.263 703511	1.245 491913
$\times\ \nu\mu$	— 0.122 8226	+ 0.551 1730
δ	— 0.155 2114	+ 0.686 4815
$\lg \operatorname{tg} \varphi_3^i$	9.908 79359	0.054 60302
$+\ \lg p_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^i$	8.999 52996	9.797 34933
ϑ_3^i	5°42′16″.044	32°05′33″.248
ϑ_i^3	17°25′44″.946	43′49′14″.183
$180°-(\vartheta_i^3+\vartheta_3^i)$	156°51′59″.010	104°05′12″.569
$\pi-(\vartheta_i^3+\vartheta_3^i)$	2.737 835020	1.816 657 800
$\times\ \omega\sqrt{1-e^2}$	— 0.996 647670	+ 0.996 647670
$\nu\mu F(0)=R(0)$	— 2.728 656894	+ 1.810 567 764
$-\ \delta$	+ 0.155 2114	— 0.686 4815
σ_0	— 2.573 4455	+ 1.1240863
$\times\ e^2/2$	0.003 346711	0.003 346711
$\nu\mu F(1)=R(1)$	— 0.008 612576	+ 0.003 761991
$R(0)$	— 2.728 656894	+ 1.810 567764
$R(1)$	— 0.008 612576	+ 0.003 761 991
$R(2)$	— 41109	+ 11897
$R(3)$	— 219	+ 42
$\Delta \overset{(2)}{\underset{3}{L_1}},\ \Delta \overset{(2)}{\underset{3}{L_2}}$	— 2.737 310798	+ 1.814 341694
$L_1+2\pi,\ L_2$	+6.927 402876	+ 2.375 750387
$\overset{(2)}{\underset{3}{L\,i}}$	4.190 092078	4.190 092 081
$w_L^{(2)}$	+ 0.000 000003	+ 0″.0006
L_3	4.190 092 080	240°04′28″.531

Решение прямой выравненнолучевой засечки (второй способ)

1. Исходные данные

B_1	67°28′52″.763
L_1	34°54′39″.412
=	0.644 217568
$A_{1.3}$	341°13′15″.376
B_2	46°12′34″.548
L_2	136°07′13″.693
=	2.375 750387
$A_{2.3}$	53°05′34″.727

2. Вычисление $\sigma_{1.3}$, $\sigma_{2.3}$

$90°-B_2=\Theta_2$	43°47′25″
$90°-B_1=\Theta_1$	22°31′07″
$\frac{1}{2}(\Theta_2+\Theta_1)=$ $=\Theta_{1.2}$	33°09′16″
$\frac{1}{2}(\Theta_2-\Theta_1)=$ $=\delta\Theta_{1.2}$	10°38′09″
$\Delta L_{1.2}$	99°12′34″
$\frac{1}{2}\Delta L_{1.2}=$ $=\delta L_{1.2}$	49°36′17″
g sin $\delta\Theta_{1.2}$	9.26 615
— lg sin $\Theta_{1.2}$	— 9.73 788
lg ctg $\delta L_{1.2}$	9.92 989
lg tg $\delta\alpha_{1.2}$	9.45 816
lg cos $\delta\Theta_{1.2}$	9.99 248
— lg cos $\Theta_{1.2}$	−9.92 283
lg ctg $\delta L_{1.2}$	9.92 989
lg tg $\alpha_{1.2}$	9.99 954

± $\alpha_{1.2}$	44°58′14″
$\delta\alpha_{1.2}$	16°01′22″
α_1	60°59′36″
α_2	28°56′52″
+ α_2	28°56′52″
$A_{2.3}$	53°05′35″
α_1	60°59′36″
$-A_{1.3}$	341°13′15″
γ_1	82°02′27″
γ_2	79°46′21″
$\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)=\gamma_{1\cdot2}$	80°54′24″
$\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)=\gamma_{1\cdot2}$	1°08′03″
lg sin Θ_1	9.58 318
— lg sin α_2	9.68 486
lg sin Θ_2	9.84 012
— lg sin α_1	9.94 179
lg m_1	9.89 832
lg sin $\Delta L_{1.2}$	9.99 437
lg m_2	9.89 833
lg sin $\sigma_{1.2}$	9.89 269
$\sigma_{1.2}$	51°21′30″
$\frac{1}{2}\sigma_{1.2}=\delta\sigma_{1.2}$	25°40′45″
lg sin $\delta\gamma_{1.2}$	8.29 653
— lg sin $\gamma_{1.2}$	9.99 451
lg tg $\delta\sigma_{1.2}$	9.68 198
lg tg $\delta\sigma_{i3}$	7.98 400

lg cos $\delta\gamma_{1.2}$	9.99 992
—lg cos $\gamma_{1.2}$	9.19 877
lg ctg $\delta\sigma_{1.2}$	9.68 198
lg tg $\sigma_{i.3}$	0.48 313
± σ_{i3}	71°48′06″
$\delta\sigma_{i3}$	0°33′08″
$\sigma_{1.3}$	72°21′14″
=	1.262 8136
$\sigma_{2.3}$	71°14′58″
=	1.243 5374
lg sin γ_1	9.99 305
— lg sin $\sigma_{2.3}$	9.97 632
lg sin γ_2	9.99 580
— lg sin $\sigma_{1.3}$	9.97 907
lg n_1	0.01 673
lg sin $\sigma_{1.2}$	9.89 269
lg n_2	0.01 673
lg sin γ_3	9.90 942
γ_3	54°16′00″
γ_2	82°02′27″
γ_1	79°46′21″
$\sum_{i=1}^{3}\gamma_i$	216°04′48″
ε	36°04′48″

3. Расчет величин ν_{i3}, k_{i3}^3, τ_{i3}, p_{i3}, C_0^i, D_{2u}^i, Q_{i3}, φ_i^3, ϑ_i^3, $\nu_{i3}\mu_{i3}$.

$\lg \sin A_{i3}$	9.507 74760 n	9.902 87881
$\lg \cos B_i$	9.583 18128	9.840 12007
$-\lg V_i$	—9.998 54166	—9.998 54166
$-\lg \sqrt{1-e^2}$	—0.000 21452	—0.000 69961
$\lg \nu_{i3}$	9.092 17270 n	9.743 75761
$\lg \nu_{i3}^2$	8.184 34540	9.487 51522
$\lg e^2$	7.825 64818	7.825 64818
$\lg e^2 \nu_{i3}^2$	6.009 99358	7 313 16340
e^2	0.006 693422	0.006 693422
$e^2 \nu^2$	0.000 102328	0.002 056664
ν^2	0.015 28781	0.307 26650
$e^2 - e^2 \nu^2$	0.006 591094	0.004 636758
$1-e^2 \nu^2$	0.999 89767	9.997 94334
$1-\nu^2$	0.984 71219	0 692 73350
$\lg (e^2-e^2\nu^2)$	7.818 95750	7.666 21443
—		
$\lg (1-e^2 \nu^2)$	9.999 95556	9.999 10588
—		
$\lg (1-\nu^2)$	9.993 30932	9.840 56619
$\lg k^2$	7.819 00194	7.667 10855
$\lg \tau^2$	0.006 64624	0.158 53969
k^2	0.006 591768	0.004 646314
k^4	0.000 043451	0.000 021588
k^6	0.000 000286	0.000 000100
k^8	0.000 000019	0.000 000005
$\lg \frac{1}{\tau} = \lg \sin B_0$	9.996 67688	9.920 73016
B_0	82°55′16″.038	56°25′30″.272
$\lg \cos B_0 = \lg p$	9.090 73637	9.742 74631
p	0.123 23565	0.553 02697

1	1.000 000000	1.000 000000
*) $c_{02} k^2$	0.004 943826	0.003 484736
$c_{04} k^4$	0.000 030551	0.000 015179
$c_{06} k^6$	196	68
$c_{08} k^8$	1	0
C_0^i	+1.004 974574	+1.003 499983
$c_{22} k^2$	—0.002 471913	—0.001 742368
$c_{24} k^4$	—0.000 020368	—0.000 010119
$c_{26} k^6$	— 147	— 51
$c_{28} k^8$	— 1	— 0
C_2^i	—0.002 492429	—0.001 752538
$c_{44} k^4$	+0.000 002546	—0.000 001265
$c_{46} k^6$	+ 29	+ 10
$c_{48} k^8$	+ 0	+ 0
C_4^i	+0.000 002575	+0.000 001275
$c_{66} k^6$	—0.000 000033	—0.000 000012
$c_{68} k^8$	— 0	0
C_6^i	—0.000 000033	—0.000 000012
$C_2^i : C_0^i = D_2^i$	—0.002 480092	—0.001 746426
$C_4^i : C_0^i = D_4^i$	+0.000 002562	+0.000 001271
$C_6^i : C_0^i = D_6^i$	—0.000 000033	—0.000 000012
$\lg (1-e^2)\, a$	6.8017 84509	6.8017 84509
$\lg V_0^i$	0.0000 22221	0.0004 47059
$\lg C_0^i$	0.0021 55074	0.0015 17369
$\lg Q_{i3}$	6.8039 61804	6.8037 48937
$\frac{\nu}{\lvert\nu\rvert} = \omega$	—1	+1

*) См. Приложение 3.

p_{i3}	0.123 23565	0.553 02697
$\omega\sqrt{1-e^2}$	−0.996 64767	+0.996 64767
$\nu_{i3}\mu_{i3}$	−0.122 8226	+0.551 1730
$\lg \sin B_i$	9.965 55668	9.858 46269
$\lg \tau_{i3}$	0.003 32312	0.079 26984
$\lg \sin \varphi_i^3$	9.968 87980	9.937 73253
φ_i^3	68°34′03″.855	60°02′46″.239
$+$ $\lg \operatorname{tg} \varphi_i^3$	0.406 11008	0.239 36934
$\lg p_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_i^3$	9.496 84645	9.982 11565
ϑ_i^3	17°25′44″.946	43°49′14″.183

4. Первое приближение для s_{i3}, B_3, L_3.

а) Вычисление $w_B^{(0)}$

B_{ik} — с чертежа	75°, 72°, 62°, 46°	49°, 53°, 50°, 43°
R_{i1}, R_{i2}	6397, 6397	6381, 6384
R_{i3}, R_{i4}	6390, 6378	6383, 6377
$\overline{R}_{i3} = \frac{1}{4}\sum\limits_{к} R_{iк}$	6390500 *м*	6381 300 *м*
$\times$ σ_{i3}	1.262 8136	1.243 5374
$s_{i3}^{(0)}$	80700 010 *м*	7935 385 *м*
$\lg s_{i3}^{(0)}$	6.906 87407	6.899 56800
$-$ $\lg Q_{i3}$	6.803 96180	6.803 74894
$\lg \tilde{\sigma}_{i3}^{(0)}$	0.102 91227	0.095 81906
$-\tilde{\sigma}_{i3}^{(0)}$	−1.267 3958	−1.246 8639
$+$ $\pi-\varphi_i^3$	+1.044 8599	+2.093 5892
$\varphi_{\underset{3}{i}}^{(00)} \approx \varphi_3^i$	+0.677 4641	+0.846 7253
$=$	+38°48′57″	+48°30′50″
$-\left[\sin 2\varphi_3^i\right.$	+0.97 679	+0.99 249
$+$		
$\left.\sin 2\varphi_i^3\right]$	+0.68 026	+0.86 522

$-\left[\sin 4\varphi_3^i\right.$	+0.418	−0.243
$+$		
$\left.\sin 4\varphi_i^3\right]$	−0.997	−0.868
$\varepsilon_2^{(00)}$	−1.65705	−1.85711
$\varepsilon_4^{(00)}$	+0.579	+1.111
$+$ $D_2\varepsilon_2^{(00)}$	+0.004 1096	+0.003 2444
$D_4\varepsilon_4^{(00)}$	+ 15	+ 14
$\delta\varphi_{\underset{3}{i}}^{(00)}$	+0.004 1111	+0.003 2458
$\cos 2\varphi_3^i$	+0.21 420	−0.12 235
$\cos 4\varphi_3^i$	−0.908	−0.970
$-2D_2 \cos 2\varphi_3^i$	+0.001 0625	−0.000 4274
$4D_4 \cos 4\varphi_3^i$	+ 93	+ 49
$\varkappa$	+0.001 0718	−0.000 4225
$1-\varkappa=\varkappa_1$	+0.998 9282	+1.000 4225
$\delta\varphi_{\underset{3}{i}}^{(00)} : \varkappa_1 = \Delta\varphi_{\underset{3}{i}}^{(00)}$	+0.004 1155	+0.003 2444
$\varphi_{\underset{3}{i}}^{(00)}$	+0.677 4641	+0.846 7253
$\varphi_{\underset{3}{i}}^{(0)} \approx \varphi_{i3}$	+0.681 5796	+0.849 9697
$=$	+39°03′05″.9	+48°41′58″.8
$\sin 2\varphi_3^i$	+0.97 852	+0.99 167
$\sin 4\varphi_3^i$	+0.404	−0.255
$\varepsilon_2^{(0)}$	+1.65 878	+1.85 689
$\varepsilon_4^{(0)}$	+0.593	+1.123
$D_2\varepsilon_2^{(0)}$	+0.004 1139	+0.003 2429
$+$ $D_4\varepsilon_4^{(0)}$	+ 15	+ 14
$\Delta\varphi_{\underset{3}{i}}^{(0)} \approx \Delta\varphi_{\underset{3}{i}}^{(00)}$	+0.004 1154	+0.003 2443
$\lg \sin \varphi_{\underset{3}{i}}^{(0)}$	9.799 354	9.875 791
$-$ $\lg \tau_{i3}$	0.003 323	0.079 270
$\lg \sin B_{\underset{3}{i}}^{(0)}$	9.796 031	9.796 521
$B_{\underset{3}{i}}^{(0)}$	38°41′53″.3	38°45′00″.0
$w_B^{(0)}$	−0.000 9051	−3′06″.7

б) Вычисление $w_L^{(0)}$

$\pi-\varphi_i^3$	1.944 8599	2.093 5892
$-\varphi_3^i$	0.681 5795	0.849 9696
$\pi-(\varphi_i^3+\varphi_3^i)$	−1.263 2804	1.243 6196
$\times$		
$\nu\mu$	−0.122 8226	+0.551 1730
δ	−0.155 159	+0.685 449
$\lg \operatorname{tg} \varphi_3^i$	9.909 169	0.056 243
$\lg p_{i3}$	9.090 736	9.742 746
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^i$	8.999 905	9.798 989
ϑ_3^i	5°42′33″.7	32°11′24″.0
ϑ_i^3	17°25′44″.9	43°49′14″.2
$180°-(\vartheta_i^3+\vartheta_3^i)$	156°51′41″.4	103°59′21″.8
$\pi-(\vartheta_i^3+\vartheta_3^i)$	2.737 7497	1.814 9573
$\times$		
$\omega\sqrt{1-e^2}$	−0.996 64767	+0.996 64767
$\nu\mu F(0)=R(0)$	−2.728 5719	+1.808 8730
$-\delta$	+0.155 159	−0.685 449
σ_0	−2.573 413	+1.123 424
$\times$		
$e^2/2$	0.003 3467	0.003 3467
$\nu\mu F(1)=R(1)$	−0.008 6124	+0.003 7598
$3/16\, e^2$	0.001 255	0.001 255
$3/16\, e^2 k^2$	0.000 00827	0.000 00583
$\varepsilon_2^{(0)}$	−1.657	−1.858
$-\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(0)}$	+0.828	+0.929
$\pi-(\varphi_i^3+\varphi_3^i)$	+1.263	+1.244
σ_2	+2.091	+2.173
$\times$		
$3/16\, e^2 k^2 \nu\mu$	−0.000 00102	+0.000 00321
$\Delta R\,(1)$	−0.000 0021	+0.000 0070

$3/4\, e^2$	0.005 020	0.005 020
$\times$ $R\,(1)$	−0.008 612	+0.003 760
$3/4\, e^2 R\,(1)$	−0.000 0432	+0.000 0189
$-\Delta R\,(1)$	+ 21	− 70
$\nu\mu F\,(2)=R(2)$	−0.000 0411	+0.000 0119
$R\,(0)$	−2.728 5719	+1.808 8730
$R\,(1)$	−0.008 6124	+0.003 7598
$R\,(2)$	−0.000 0411	+0.000 0119
$\Delta L_{1.3}^{(0)},\ \Delta L_{2.3}^{(0)}$	−2.737 2254	+1.812 6447
$L_1+2\pi,\ L_2$	+6.927 4029	+2.375 7504
$L_{i_3}^{(0)}$	+4.190 1775	+4.188 3951
$w_L^{(0)}$	+0.001 7824	+ 6′07″.65

в) Вычисление величин $\frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}},\ \frac{\partial L_3^i}{\partial s_{i3}};$ $\delta s_{i3}^{(0)},\ \delta B_{i_3}^{(0)};\ \delta L_{i_3}^{(0)};\ s_{i3}^{(1)},\ B_3^{(1)},\ L_3^{(1)}.$

$B_{i_3}^{(0)} \approx B_3^i$	38°41′53″.3	38°45′00″.0
$\lg\sqrt{1-e^2}$	9.99 854	9.99 854
$\lg \nu_{i3}$	9.09 217 n	9.74 376
$\lg V_3^i$	0.00 089	0.00 089
$-\lg\cos B_3^i$	−9.89 234	−9.89 203
$\lg \sin A'_{3i}$	9.19 926 n	9.85 116
A'_{3i}	189°06′13″	134°46′42″
$\lg\cos A'_{3i}$	9.99 450 n	9.84 780 n
$+$ $\lg(1)_3^i$	8.51 093	8.51 093
$\lg \frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}} \frac{сек}{км}$	1.50 543 n	1.35 873 n
$a_{i3}=\frac{\partial B_3^i}{\partial s_{i3}}$	−32.021	−22.842

$\sin A'_{3i}$	9.19 926 n	9.85 116
$\lg (2)^i_3$	8.50 915	8.50 915
$-\lg \cos B^i_3$	—9.89 234	—9.89 203
$\lg \dfrac{\partial L^i_3}{\partial s_{i3}} \dfrac{сек}{км}$	0.81 607 n	1.46 828
$b_{i3} = \dfrac{\partial L^i_3}{\partial s_{i3}}$	-6.547	$+29.395$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B^1_3}{\partial s_{1.3}} \delta s^{(0)}_{1.3} - \dfrac{\partial B^2_3}{\partial s_{2.3}} \delta s^{(0)}_{2.3} + w^{(0)}_B = 0 \\ \dfrac{\partial L^1_3}{\partial s_{1.3}} \delta s^{(0)}_{1.3} - \dfrac{\partial L^2_3}{\partial s_{2.3}} \delta s^{(0)}_{2.3} + w^{(0)}_L = 0 \end{cases}$$

$$-32.021\, \delta s^{(0)}_{1.3} + 22.842\, \delta s^{(0)}_{2.3} = +186''.7$$

$$-6.547\, \delta s^{(0)}_{1.3} - 29.395\, \delta s^{(0)}_{2.3} = -367''.7$$

$$\Delta = +1090.804;\ \Delta_1 = +2910.96;\ \Delta_2 = +12996.45$$

$\delta s^{(0)}_{1.3} = +2.6686$ *км*; $\delta s^{(0)}_{2.3} = +11.9145$ *км*.

$\delta B^{(0)}_{\underset{3}{1}} = -85''.5$; $\delta B^{(0)}_{\underset{3}{2}} = -272''.2$.

$\delta L^{(0)}_{\underset{3}{1}} = -17''.471$; $\delta L^{(0)}_{\underset{3}{2}} = +350''.227$.

$s^{(0)}_{i3}$	8070 010 *м*	7.935 385 *м*
$\delta s^{(0)}_{i3}$	+2 669 *м*	+11 915 *м*
$s^{(1)}_{i3}$	8.072 679 *м*	7.947 300 *м*
$B^{(0)}_{\underset{3}{i}}$	38°41′53″.3	38°45′00″.0
$\delta B^{(0)}_{\underset{3}{i}}$	—1′ 25″.5	—4′32″.2
$B^{(1)}_3$	38° 40′ 27″.8	38°40′27″.8
$L^{(0)}_{\underset{3}{i}}$	4.190 1775	4.1883951
$\delta L^{(0)}_{\underset{3}{i}}$	—0.000 0847	+0 001 6979
$L^{(1)}_3$	4.190 0928	4.190 0930

5. Второе приближение.

а) Вычисление $w^{(1)}_B$

$\lg s^{(1)}_{i3}$	6.907 017684	6.900 219607
$-\lg Q_{i3}$	6.803 961804	6.803 748937
$\lg \tilde{\sigma}^{(1)}_{i3}$	0.103 055880	0.096 470670
$-\tilde{\sigma}_{i3}$	—1.267 814983	—1.248 736109
$\pi - \varphi^3_i$	+1.944 859873	+2.093 589153
$\varphi^{(10)}_{\underset{3}{i}}$	+0.677 044890	+0.844 853044
$\lg \sin B^{(1)}_3$	9.795 807	9.795 807
$\lg \tau_{i3}$	0.003 323	0.079 270
$\lg \sin \varphi^{(1)}_{\underset{3}{i}}$	9.799 130	0.875 077
$\varphi^{(1)}_{\underset{3}{i}} \approx \varphi^i_3$	39°01′39.2	48°35′33″.3
$\sin 2\varphi^i_3$	+0.978 347	+0.992 150
$-\left[\sin 2\varphi^i_3 + \sin 2\varphi^3_i \right]$: $\sin 2\varphi^3_i$	+0.680 267	+0.865 218
$\sin 4\varphi^i_3$	+0.4050	—0.2482
$-\left[\sin 4\varphi^i_3 + \sin 4\varphi^3_i \right]$: $\sin 4\varphi^3_i$	—0.9972	—0.8676
$\sin 6\varphi^i_3$	—0.81	—0.93
$-\left[\sin 6\varphi^i_3 + \sin 6\varphi^3_i \right]$: $\sin 6\varphi^3_i$	+0.78	+0.00
$\varepsilon^{(1)}_2$	—1.658 614	—1.857 368
$\varepsilon^{(1)}_4$	+0.5922	+1.1158
$\varepsilon^{(1)}_6$	+0.03	+0.93
$D_2\, \varepsilon^{(1)}_2$	+0,004 113515	+0.003 243756
$D_4\, \varepsilon^{(1)}_4$	+0.000 001517	+0.000 001418
$D_6\, \varepsilon^{(1)}_6$	— 1	— 11
$\Delta\varphi^{(1)}_{\underset{3}{i}}$	+0.004 115031	+0.003 245163
$\varphi^{(10)}_{\underset{3}{i}}$	+0.677 044890	+0.844 85 3044
$\varphi^{(1)}_{\underset{3}{i}} \approx \varphi^i_3$	+0.681159921	+0.848 098207
=	39°01′39″.319	48°35′32″.813

$\sin 2\varphi_3^i$	$+0.978\ 348$	$+0.992\ 150$
$\varepsilon_2^{(1)}$	$-1.658\ 615$	$-1.857\ 368$
$D_2\,\varepsilon_2^{(1)}$	$+0.004\ 113518$	$+0.003\ 243756$
$\Delta\varphi_{i_3}^{(1)}$	$+0.004\ 115034$	$+0.003\ 245163$
$\varphi_{i_3}^{(1)} \approx \varphi_3^i$	$0.681\ 159\ 924$	$+0.848\ 098207$
$=$	$39°01'39''.320$	$48°35'32''.813$
$\lg \sin \varphi_{i_3}^{(1)}$	$9.799\ 12992$	$9.875\ 07510$
$-\lg \tau_{i3}$	$0.003\ 32312$	$0.079\ 26984$
$\lg \sin B_{i_3}^{(1)}$	$9.795\ 80680$	$9.795\ 80526$
$B_{i_3}^{(1)}$	$38°40'28''.038$	$38°40'27''.452$
$w_B^{(1)}$	$+0.000\ 002841$	$+0''.586$

б) Вычисление $w_L^{(1)}$

$\pi-\varphi_i^3$	$1.944\ 8599$	$2.093\ 5892$
$-\varphi_3^i$	$0.681\ 1599$	$-0.848\ 0982$
$\pi-(\varphi_i^3+\varphi_3^i)$	$1.263\ 7000$	$1.245\ 4910$
$\times$ $\nu\mu$	$-0.122\ 8226$	$+0.551\ 1730$
δ	$-0.155\ 2109$	$+0.686\ 4810$
$\lg \operatorname{tg} \varphi_3^i$	$9.908\ 79675$	$0.054\ 60387$
$\lg p_i$	$9.090\ 73637$	$9.742\ 74631$
$\lg \operatorname{tg} \vartheta_3^i$	$9.999\ 53312$	$9.797\ 35018$
ϑ_3^i	$5°42'16''.192$	$32°05'33''.430$
ϑ_i^3	$17°25'44''.946$	$43°49'14''.183$
$180°-(\vartheta_i^3+\vartheta_3^i)$	$156°51'58''.862$	$104°05'12''.387$
$\pi-(\vartheta_i^3+\vartheta_3^i)$	$2.737\ 834304$	$4.816\ 656917$
$\times$ $\omega\sqrt{1-e^2}$	$-0.996\ 647\ 670$	$+0.996\ 647670$
$\nu\mu F(0)=R(0)$	$-2.728\ 656180$	$+1.810\ 566884$
$-\delta$	$+0.155\ 2109$	$-0.686\ 4810$
σ_0	$-2.573\ 4453$	$+1.124\ 0859$
$\times$ $e^2/2$	$0.003\ 346711$	$0.003\ 346711$
$\nu\mu F(1)=R(1)$	$-0.008\ 612578$	$+0.003\ 764991$

$3/16\,e^2,\ 5/16\,e^2$	$0.000\ 12550$	$0.000\ 20917$
$3/16\,e^2 k^2$	$0.000\ 008273$	$0.000\ 005831$
$5/16\,e^2 k^4$	$0.000\ 000091$	$0.000\ 000045$
$-\frac{1}{2}\varepsilon_2^{(1)}$	$+0.8293$	$+0.9287$
$\pi-(\varphi_i^3+\varphi_3^i)$	$+1.2637$	$+1.2455$
σ_2	$+2.0930$	$+2.1742$
$\times$ $3/16\,e^2 k^2\,\nu\mu$	$-0.000\ 001016$	$+0.000\ 003214$
$\Delta R\,(1)$	$-0.000\ 002128$	$+0.000\ 006988$
$3/4\,e^2$	$0.005\ 0200$	$0.005\ 0200$
$\times$ $R\,(1)$	$-0.008\ 61258$	$+0.003\ 76199$
$3/4\,e^2 R\,(1)$	$-0.000\ 043235$	$+0.000\ 018885$
$-\Delta R\,(1)$	$+0.000\ 002126$	$-0.000\ 006988$
$\nu\mu\,FR\,(2)=R\,(2)$	$-0.000\ 041109$	$+0.000\ 011897$
$3/8[\pi-(\varphi_i^3+\varphi_3^i)]$	$+0.474$	$+0.467$
$-1/4\,\varepsilon_2^{(1)}$	$+0.415$	$+0.464$
$+\frac{1}{32}\varepsilon_4^{(1)}$	$+0.019$	$+0.035$
σ_4	$+0.908$	$+0.966$
$\times$ $5/16\,e^2 k^4\,\nu\mu$	$-0.000\ 000011$	$+0.000\ 000025$
$\Delta R\,(2)$	$-0.000\ 000010$	$+0.000\ 000024$
$\times$ $5/6\,e^2$	$0.005\ 578$	$0.005\ 578$
$R\,(2)$	$-0.000\ 04111$	$+0.000\ 01190$
$5/6\,e^2 R\,(2)$	$-0.000\ 000229$	$+0.000\ 000066$
$-\Delta R\,(2)$	$+\ 10$	$-\ 24$
$\nu\mu\,FR\,(3)=R\,(3)$	$-0.000\ 000219$	$+0.000\ 000042$

$R\ (0)$	$-2.728\ 656180$	$+1.810\ 566884$
$R\ (1)$	$-0.008\ 612578$	$+0.003\ 761991$
$R\ (2)$	$-\quad 41109$	$+\quad 11897$
$R\ (3)$	$-\quad 219$	$+\quad 42$
$\nabla L^{(1)}_{1.3},\ \Delta L^{(1)}_{2.3}$	$-2.737\ 310086$	$+1.814\ 340814$
$L_1+2\pi,\ L_2$	$+6.927\ 402876$	+3.3[illegible]5 75[illegible]387
$L^{(1)}_{\underset{3}{i}}$	$4.190\ 092790$	$4.190\ 091\ 201$
$w^{(1)}_{L}$	$+0.000\ 001591$	$+\quad 0''.328$

в) Вычисление величин $\dfrac{\partial B^i_3}{\partial s_{i3}},\ \dfrac{\partial L^i_3}{\partial s_{i3}}$,

$\delta s^{(1)}_{i3},\ \delta B^{(1)}_{\underset{3}{i}}$	$\delta L^{(1)}_{\underset{3}{i}},\ s^{(2)}_{i3},$	$B^{(2)}_3,\ L^{(2)}_3.$
$\lg \nu_{i3}\ V^i_3\cdot\sqrt{1-e^2}$	$9.09\ 160\ n$	$9.74\ 319$
$-\lg\cos B^i_3$	$9.89\ 239$	$9.89\ 239$
$\lg\sin A'_{3i}$	$9.19\ 921\ n$	$9.85\ 080$
A'_{3i}	$189°06'09''$	$134°49'32''$
$\lg\cos A'_{3i}$	$9.99\ 450\ n$	$9.84\ 816\ n$
$+\lg(1)^i_3$	$8.51\ 093$	$8.51\ 093$
$\lg\dfrac{\partial B^i_3}{\partial s_{i3}}\ \dfrac{сек}{100\,м}$	$0.50\ 543\ n$	$0.35\ 909\ n$
$a_{i3}=\dfrac{\partial B^i_3}{\partial s_{i3}}$	-3.2021	-2.2860
$\lg\sin A'_{3i}$	$9.19\ 921\ n$	$9.85\ 080$
$\lg(2)^i_3$	$8.50\ 915$	$8.50\ 915$
$-\lg\cos B^i_3$	$9.89\ 239$	$9.89\ 239$
$\lg\dfrac{\partial L^i_3}{\partial s_{i3}}\ \dfrac{сек}{100\,м}$	$7.81\ 597\ n$	$8.46\ 756$
$b_{i3}=\dfrac{\partial L^i_3}{\partial s_{i3}}$	0.6546	$+2.9347$

$$3.2021\ \delta s^{(1)}_{1.3}+2.2860\ \delta s^{(1)}_{2.3}+0''.586=0$$

$$-0.6546\ \delta s^{(1)}_{1.3}-2.9347\ \delta s^{(1)}_{2.3}+0''.328=0$$

$$\Delta=+10.8936;\quad \Delta_1=+2.4695;\quad \Delta_2=+0.66669$$

$\delta s^{(1)}_{1.3}=+22.669 \quad \delta s^{(1)}_{2.3}=+6.120$

$\delta B^{(1)}_{\underset{3}{1}}=-0''.726;\quad \delta B^{(1)}_{\underset{3}{2}}=-0''.140$

$\delta L^{(1)}_{\underset{3}{1}}=-0''.1484\quad \delta L^{(1)}_{\underset{3}{2}}=+0''.1796$

$s^{(1)}_{i3}$	$8\ 072\ 679.0$	$7\ 947\ 300.0$
$\delta s^{(1)}_{i3}$	$+22.7$	$+6.1$
$s^{(2)}_{i3}$	$8\ 072\ 701.7$	$7\ 947\ 306.1$
$B^{(1)}_{\underset{3}{i}}$	$38°40'28''.038$	$38°40'27''.452$
$\delta B^{(1)}_{\underset{3}{i}}$	$-0''.726$	-0.140
$B^{(2)}_3$	$38°40'27''.312$	$38°40'27''.312$
$L^{(1)}_{\underset{3}{i}}$	$4.190\ 092790$	$4.190\ 091201$
$\delta L^{(1)}_{\underset{3}{i}}$	$-0.000\ 000719$	$+0.000\ 000871$
$L^{(2)}_{\underset{3}{i}}$	$4.190\ 092071$	$4.190\ 09272$
		$240°04'28''.529$

6. Поверочный расчет

а) Определение $w^{(2)}_B$

$\lg s^{(2)}_{i3}$	$6.907\ 018905$	$6.900\ 219941$
$-\lg Q_{i3}$	$6.803\ 961804$	$6.803\ 748937$
$\lg\tilde{\sigma}^{(2)}_{i3}$	$0.103\ 057101$	$0.096\ 471004$
$-\tilde{\sigma}^{(2)}_{i3}$	-1.267818547	$-1.248\ 737069$
$\pi-\varphi^3_i$	$+1.944\ 859873$	$+2.093\ 589153$
$\varphi^{(20)}_{\underset{3}{i}}$	$0.677\ 041326$	$0.844\ 852084$
$+\ \Delta\varphi^{(2)}_{\underset{3}{i}}$	$+0.004\ 115034$	$+0.003\ 245163$
$\varphi^{(2)}_{\underset{3}{i}}=\varphi^i_3$	$+681\ 156360$	$+0.848\ 097247$
$=$	$39°01'38''.583$	$48°35'32''.614$
$\lg\sin\varphi^{(2)}_{\underset{3}{i}}$	$9.799\ 12801$	$9.875\ 07473$
$\lg\tau_{i3}$	$0.003\ 32312$	$0.079\ 26984$
$\lg\sin B^{(2)}_{\underset{3}{i}}$	$9.795\ 80489$	$9.795\ 80489$

$B_{i_3}^{(2)}$	38°40′27″.312	38°40′27″.312
$w_B^{(2)}$		0″.000

б) Определение $w_L^{(2)}$

$\pi-\varphi_1^3$	1.944 8599	2.093 5892
$-\varphi_3^i$	—0.681 1564	—0.848 0972
$\pi-(\varphi_i^3+\varphi_3^i)$ $\times$	1.263 7035	1.245 4920
$\nu\mu$	0.122 8226	+0.551 1730
δ	—0.155 2114	+0.686 4816
$\lg\operatorname{tg}\varphi_3^i$	9.908 79358	0.054 60302
$\lg p_{i3}$	9.090 73637	9.742 74631
$\lg\operatorname{tg}\vartheta_3^i$	9.999 52995	9.797 34933
ϑ_3^i	5°42′16″.043	32°05′33″.248
ϑ_i^3	17°25′44″.946	43°49′14″.183
$180°-(\vartheta_i^3+$ $+\vartheta_3^i)$	156°51′59″.011	104°05′12″ 569

$\pi-(\vartheta_i^3+\vartheta_3^i)$ $\times$	2.737 835025	1.816 657799
$\omega\sqrt{1-e^2}$	—0.996 647670	0.996 647670
$\nu\mu F(0)=R(0)$	—2.728 656899	+1.810 567763
$-\delta$	+0.155 2114	—0.686 4816
σ_0 $\times$	—2.573 4455	+1.124 0862
$\frac{e^2}{2}$	0.003 346711	0.003 346711
$\nu\mu F(1)=R(1)$	—0.008612578	+0.003 761992
$R(0)$	—2.728656899	+1.810 567763
$R(1)$	—0.008 612578	+0.003 761992
$R(2)$	— 41109	+ 11897
$R(3)$	— 219	+ 42
$\nabla L_{1.3}^{(2)},\ \Delta L_{2.3}^{(2)}$	—2.737 310805	+1.814 341692
$L_1+2\pi,\ L_2$	+6.927402876	+2.375 750387
$L_{i_3}^{(2)}$	4.190 092071	4.190 092081
$w_L^{(2)}$	—0.000 000010	—0″.0021

до 1—3° среднюю широту $B_{iк}$ каждой такой части и выписали отвечающее $B_{iк}$ значение $R_{iк}$ среднего радиуса кривизны (с точностью до 1 *км*). Теперь уже можно было подсчитать искомые начальные значения $s_{i3}^{(0)}$ длин засекающих сторон $i3$ на сфероиде, приняв

$$s_{i3}^{(0)} = \left(\frac{1}{4}\sum_{к} R_{iк}\right)\sigma_{i3}^{(0)}, \qquad (i=1,2).$$

Последующие вычисления выполнялись так, как это описано в [Дел. 6,Б], причем выяснилось, что несмотря на кажущуюся грубость изложенного выше расчета длин $s_{i3}^{(0)}$ ошибки $\nabla s_{i3}^{(0)}$ этих длин оказались сравнительно малыми:

а) $\nabla s_{i3}^{(0)} = -2.7$ *км* при $s_{1.3} = 8072{\cdot}7$ *км*;

б) $\nabla s_{2.3}^{(0)} = -11{\cdot}9$ *км* при $s_{2.3} = 7947{\cdot}3$ *км*.

Для нахождения на сфероиде длин $s_{i.3}$ с точностью до 0,2 *м* и координат B_3, L_3 с точностью до $0''.001-0''.002$ потребовалось два полных приближения (одно—с 6 знаками, другое—с 8—9 знаками) и одно неполное, поверочное приближение.

3. Сопоставляя значения координат B_3, L_3 определяемой точки 3, найденные обоими способами, убеждаемся в их хорошей сходимости

$$\text{1-й способ: } B_3 = 38°40'27''{\cdot}310; \quad L_3 = 240°04'28''{\cdot}531.$$

$$\text{2-й способ: } B_3 = 48°40'27''{\cdot}312; \quad L_3 = 240°04'28''{\cdot}529.$$

Возникающие при этом расхождения не выходят из пределов точности вычисления по 8-значным таблицам логарифмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. W. Bessel. Ueber die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodetischen Vermessungen. Astr. Nachr., Bd. 4, № 86, 1826.
2. Ю. С. Сикорский. Элементы теории эллиптических функций. ОНТИ, 1936.
3. В. П. Ветчинкин. Новые формулы и таблицы эллиптических интегралов и функций. Изд. ВВА РККА, М., 1935.
4. Ф. А. Слудский. Лекции по высшей геодезии. М., 1894.
5. Ф. Н. Красовский. Курс высшей геодезии. Ч. 2, М., 1942.
6. Б. Ф. Крутой. Общие способы решения основных расчетных задач на земном сфероиде (краткое сообщение). Известия ТПИ, т. 118, 1963.