ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ТОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерно-вычислительной математики)

В настоящей статье изучается задание точечной системы с помощью так называемой матрицы сечений, изучаются некоторые свойства функции порядка, и на основании этих свойств изучаются некоторые конечные системы.

Теорема о матрице сечений

Занумеруем точки системы S_n. Точечной системе S_n сопоставим матрицу сечений $A=(a_{ik})$, $a_{ik}=\overline{\overline{L(x_i, x_k)}}$ (двойная черта обозначает количество элементов множества).

Две точечные системы будем считать эквивалентными, если можно установить взаимно-однозначное соответствие между элементами S_n и S_n' такое, что

$$L(x, y)\sim L'(x', y'), \text{ если } x\sim x', \; y\sim y'.$$

Теорема 1. Если S_n и S_n' имеют одинаковые матрицы сечений, то S_n эквивалентно S_n'.

Доказательство—ведем индукцией по числу точек.

А. Пусть для $(n-1)$ теорема доказана. При этом предположении докажем теорему для n.

Итак, пусть S_n и S_n' две системы с эквивалентными матрицами сечений. Установим между точками S_n и S_n' взаимно-однозначное соответствие $x_i\sim x_i'$, Здесь номера точек в S_n и S_n' задаются матрицами сечений.

Пусть x_k есть внешняя точка [1] из S_n. Тогда в k-ой строке матрицы A имеется элемент, равный нулю. Так как, по условию, матрицы сечений A и A' одинаковы, то в k-ой строке матрицы A' имеется нулевой элемент, т. е. x_k' также внешняя в S_n'.

Пусть x_i, x_j есть любые точки из S_n; покажем, что функция порядка

$$\zeta(x_k, x_i, x_j)=\zeta'(x_k', x_i', x_j').$$

Для этого заметим, что строка с номером k содержит все целые числа от 0 до $(n-1)$ включительно, каждое число встречается один раз. В самом деле, пусть y есть точка, смежная x_k, т. е. $R(x_k, y)=0$.

Нормируем циклическую функцию [1] условием $N(x_к, y) = 1$. Тогда для всех $x_i \neq x_к$, $N(x_к, x_i) > 0$.

В этом случае для любых x_i, x_j имеем $R(x_к, x_i) \subset R(x_к, x_j)$ или $R(x_к, x_i) \supset R(x_к, x_j)$.

Пусть $R(x_к, x_i) \supset R(x_к, x_j)$, $x_i \neq x_j$.

Это значит, что

$$N(x_к, x_i) < N(x_к, x_j),$$

также

$$N'(x'_к, x'_i) < N'(x'_к, x'_j).$$

Тогда

$$\zeta(x_к, x_i, x_j) = Sgn\{N(x_к, x_i)\, N(x_к, x_j)\, [N^2(x_к, x_j) -$$

$$- N^2(x_к, x_i)]\} = Sgn\{N'(x'_к, x'_i)\, N'(x'_к, x'_j)\, [N'^2(x'_к, x'_j) -$$

$$- N'^2(x'_к, x'_i)]\} = \zeta(x'_к, x'_i, x'_j).$$

Итак,

$$\zeta(x_к, x_i, x_j) = \zeta'(x'_к, x'_i, x'_j). \tag{1}$$

Следовательно, если $x_к \in L(x_i, x_j)$, то $x'_к \in L'(x'_i, x'_j)$ и наоборот.

Поэтому у системы S_{n-1}, полученной из S_n отбрасыванием $x_к$, и у S'_{n-1}, полученной из S'_n отбрасыванием $x'_к$, одинаковые матрицы сечений. Значит $S'_{n-1} \sim S_{n-1}$. Иными словами, если $x \sim x'$, $y \sim y'$, $z \sim z'$ и среди x, y, z нет $x_к$, то

$$\zeta(x, y, z) = \zeta'(x', y', z'). \tag{2}$$

Сопоставляя (2) и (1), видим, что

$$\zeta(x, y, z) = \zeta'(x', y', z'),$$

если $x, y, z \in S_n$; $x', y', z' \in S'_n$ и $x \sim x'$, $y \sim y'$, $z \sim z'$, а это значит, что $S_n \sim S'_n$.

Б. Для трех точек теорема тривиальна. Следовательно, теорема доказана.

Системы с весом

Пусть S_n — точечная система. Поставим в соответствие каждой точке x_i системы S_n положительное число $p(x_i)$ — вес точки.

Составим матрицу сечений для системы с весом

$$B = (B_{iк}),$$

где

$$B_{iк} = \sum_{x \in L(x_i, x_к)} p(x)\, .$$

Лемма 1. Пусть $(B_{iк})$ есть матрица системы с весом. Пусть $x_к$ — внешняя точка; если $B_{кi} = 0$, то $p(x_i) = \min_{j \neq i} B_{ji}$.

Доказательство — очевидно.

Лемма 2. Если $x_к$ — внешняя точка, то $\zeta(x_к, x_i, x_j) = +1$ тогда и только тогда, когда $d_{кi} > d_{кj}$.

На основании леммы 1 и леммы 2 аналогично теореме 1 доказывается.

Теорема 2. Матрица сечений системы S_n с неизвестными весами точек однозначно определяет систему S_n и веса точек.

Некоторые свойства функции порядка

В [1] мы установили следующее свойство функции порядка:

А) $\zeta(x, y, z)$ не меняется при циклической перестановке аргументов и меняет знак на обратный при нарушении циклического порядка аргументов.

Установим еще одно свойство функции порядка:

Б) для любых точек a, $b \in S_n$ найдутся две и только две точки c, $d \in S_n$ такие, что для всех x, не совпадающих с a, b, c,

$$\zeta(a, b, x) = \zeta(a, c, x,), \tag{3}$$

или для всех x, не совпадающих с a, b, c,

$$\zeta(a, b, x) = -\zeta(a, c; x) \tag{4}$$

и для всех y, не совпадающих с a, b, d,

$$\zeta(a, b, y) = \zeta(a, d, y), \tag{5}$$

или для всех y, не совпадающих с a, b, d,

$$\zeta(a, b, y) = -\zeta(a, d, y). \tag{6}$$

Определение. Если выполнено одно из соотношений (3) или (4), то пары точек (a, b) и (a, c) назовем смежными. Следовательно, какова бы ни была пара точек (a, b), найдутся две и только две смежные к ней пары (a, c) и (a, d).

Доказательство свойства (Б).

Для доказательства свойства (Б) нормируем циклическую функцию условием $N(a, b) = 1$.

Если c и d таковы, что

$|N(a, c) = 2$, $|N(a, d)| = n-1$, то (a, c) и (a, d) — смежные к (a, b).

В самом деле, если x отличен от a, b, c, то

$$|N(a, x)| > |N(a, c)| > |N(a, b)|.$$

Тогда

$$\zeta(a, b, x) = Sgn\{N(a, b)\, N(a, x)\, [N^2(a, x) - N^2(a, b)]\} = \\ = Sgn\, N(a, x)\, Sgn\, N(a, b).$$

$$\zeta(a, b, x) = Sgn\, N(a, x)\, Sgn\, N(a, b). \tag{7}$$

Также

$$\zeta(a, c, x) = Sgn\{N(a, c)\, N(a, x)\, [N^2(a, x) - N^2(a, c)]\} = \\ = Sgn\, N(a, x)\, Sgn\, N(a, c). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что если $Sgn\, N(a, b) = Sgn\, N(a, c)$, то $\zeta(a, b, x) = \zeta(a, c, x)$ для всех $x \neq a, b, c$.

В противном случае $\zeta(a, b, x) = -\zeta(a, c, x)$. Следовательно, (a, b) и (a, c) — смежные.

Пусть теперь y отличается от a, b, d. Тогда

$$\zeta(a, d, x) = Sgn\{N(a, d)\, N(a, x)\, [N^2(a, x) - N^2(a, d)]\} = \\ = -Sgn\{N(a, x) \cdot N(a, d)\}. \tag{9}$$

Сопоставляя (9) и (7), видим, что соотношение (5) или (6) выполнено, следовательно, (a, b) и (a, d) смежные.

Покажем теперь, что если $e \neq c$, $e \neq d$, то (a, e) и (a, b) не смежные пары.

В самом деле, $2 < |N(a, c)| < n-1$.

Рассмотрим выражения:

$$\Phi(a, b, c, d, e) = \zeta(a, b, c)\, \zeta(a, e, c)\, \zeta(a, b, d)\, \zeta(a, e, d),$$

$$\zeta(a,\ b,\ c) = Sgn\{N(a,\ b)\,N(a,\ c)\ [N^2(a,\ c) - N^2(a,\ b)]\} = Sgn\,N(a,\ c),$$

$$\zeta(a,\ b,\ d) = Sgn\{N(a,\ b)\,N(a,\ d)\,[N^2(a,\ d) - N^2(a,\ b)]\} = Sgn\,N(a,\ d),$$

$$\zeta(a,\ e,\ c) = Sgn\{N(a,\ e)\,N(a, c)\,[N^2(a, c) - N^2(a, e)]\} = -Sgn\,[N(a, c)\ N(a,\ e)],$$

$$\zeta(a,\ e,\ d) = Sgn\{N(a,\ e)\,N(a,\ d)\,[N^2(a,\ d) - N^2(a,\ e)]\} = Sgn\,[N(a,\ e)\ N(a,\ d)].$$

И, следовательно, для $\Phi(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ получим

$$\Phi(a,\ b,\ c,\ d,\ e) = -Sgn\{N(a,\ c)\,N(a,\ d)\,N(a,\ c)\,N(a,\ e)\,N(a,\ e)\ N(a,\ d)\} = -1.$$

т. е.

$$\zeta(a,\ b,\ c)\,\zeta(a,\ e,\ c)\,\zeta(a,\ b,\ d)\,\zeta(a,\ e,\ d) = -1,$$

а это, как легко видеть, означает, что $(a,\ b)$ и $(a,\ e)$ не смежные.

Таким образом, свойство (Б) доказано полностью.

Заметим, что из свойств внешних точек вытекает еще:

В. Найдутся по меньшей мере три пары точек $(a_i,\ b_i)$, $i = 1,\ 2,\ 3$ что $\zeta(a_i,\ b_i,\ x) = \delta_i$, $[\delta_i = \pm 1]$, $x \in S_n$, $x \neq a_i,\ b_i$. Аналогично можно ввести смежность пар $(a,\ b)$, $(c,\ b)$.

Анализ S_5

Для системы с небольшим числом точек функцию порядка $\zeta(x,\ y,\ z)$ удобно задавать в виде таблицы.

Например, при $n = 3$ таблица может выглядеть так:

Таблица 1

	1	2	3
1		* * 1	* 0 *
2	* * 0		1 * *
3	* 1 *	0 * *	

Здесь на κ-ом месте в клетке, стоящей на пересечении i-ой строке и j-ого столбца, записано значение $\zeta(x_i,\ x_j,\ x_\kappa)$. Диагональные клетки — пустые. На i-м и j-м местах в клетке ij записаны символы *, так как значение $\zeta(x_i,\ x_j,\ x_i)$, не определено.

С помощью такого рода таблицы исследуем системы из пяти точек. Нас интересует число выпуклых четверок [2], входящих в S_5.

Система S_5 может иметь 3, 4, 5 внешних точек.

а. В S_5^5 входят, очевидно, только выпуклые четверки. Обозначая число выпуклых четверок в S_n^κ через $C(S_n^\kappa)$, можем записать $C(S_5^5) = 5$.

б. **Случай** S_5^4. Занумеруем внешние точки x_1, x_2, x_3, x_4 в порядке смежности так, что $R(x_1,\ x_2) = \bar{0}$ и т. д. Тогда, не нарушая общности, мы можем частично заполнить таблицу функции порядка следующим образом:

Таблица 2

	1	2	3	4	5
1		* * 111	* 0 * 1·	* 00 * 0	* 0·1 *
2	* * 000		1 * * 11	1 * 0 * ·	1 * 0·*
3	* 1 * 0·	0 * * 00		11 * *1	·1 * 0 *
4	* 11 * 1	0 * 1 * ·	00 * * 0		0·1 * *
5	* 1·0 *	0 * 1·*	·0 * 1 *	1·0 * *	

Видим, что пары (x_2, x_1) и (x_4, x_1) смежные. В силу (Б) одна из пар (x_3, x_1), (x_5, x_1) смежная к (x_2, x_1), а другая — не смежная.

Предположим, что (x_2, x_1) и (x_3, x_1) смежные. Заметим, что это не уменьшает общности. Тогда, так как $\zeta(x_2, x_1, x_4) = \zeta(x_3, x_1, x_4)$ и $\zeta(x_2, x_1, x_5) = 0$, то и $\zeta(x_3, x_1, x_5) = 0$.

Внося эти данные в таблицу, получим:

Таблица 3

	1	2	3	4	5
1		* * 111	* 0 * 11	* 00 * 0	* 001 *
2	* * 000		1 * *11	1 * 0 *·	1 * 0·*
3	* 1 * 00	0* * 00		11 * *1	11 * 0 *
4	* 11 * 1	0 * 1 *·	00 * * 0		0·1 * *
5	* 110 *	0* 1·*	00 * 1 *	1·0 * *	

Видим, что (x_1, x_2) и (x_3, x_2) смежные. Следовательно, одна из пар (x_4, x_2) или (x_5, x_2) смежная с (x_1, x_2). Пусть (x_1, x_2) и $(x_5, x_2$ смежные. Тогда $\zeta(x_5, x_2, x_4) = 1$.

Таблица функции порядка принимает вид:

Таблица 4

	1	2	3	4	5
1		* * 111	* 0 * 11	* 00 *0	* 001 *
2	* * 000		1 * * 11	1 * 0 * 1	1 * 00 *
3	* 1 * 00	0 ** 00		11 * *1	11 * 0 *
4	* 11 * 1	0 * 1 *0	00 * * 0		011 * *
5	* 110 *	0 * 11 *	00 * 1 *	100 * *	

Видим, что четверки (x_1, x_2, x_3, x_4), (x_2, x_3, x_4, x_5) и (x_1, x_2, x_3, x_5)— — выпуклые.

Итак, $C(S_5^4) = 3$

в. Аналогично находим $C(S_5^3) = 1$.

Итак, имеет место:

Лемма. $C(S_5)$ — нечетное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Пестов. Аксиоматика конечных точечных систем. Известия ТПИ, т. 131, 1965.

2. Г. Г. Пестов. О некоторых числовых характеристиках точечных систем. Известия ТПИ, т. 131, 1965.