ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 131 1965

О НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ТОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерно-вычислительной математики)

В настоящей статье вводится определение коэффициента наполнения точечной системы, изучается число выпуклых и невыпуклых четверок в точечной системе. По-видимому, результаты, изложенные в настоящей статье, если не оговорено противное, являются новыми.

О числе невыпуклых четверок

Будем рассматривать всевозможные четверки (a, b, c, d) точек системы S_n. Четверку (a, b, c, d) назовем выпуклой, если подсистема S_4 системы S_n, состоящая из точек a, b, c, d не имеет внутренних точек. В противном случае будем называть четверку (a, b, c, d) невыпуклой.

Обозначим число невыпуклых четверок в точечной системе S_n через $I(S_n)$, число выпуклых четверок—через $C(S_n)$.

Систему, состоящую из n точек, будем обозначать S_n.

В [2] доказана

Лемма 1. $C(S_5)$ есть нечетное число.

Имеет место:

Теорема 1. Если n — нечетное, то $C(S_n)$ той же четности, что и C_n^5,

Доказательство. Пусть $S_5 \subset S_n$. Рассмотрим

$$\sum_{S_5 \subset S_n} C(S_5).$$

Каждая выпуклая четверка, входящая в S_n, сосчитана в выражении (1) ровно $n-4$ раз. Поэтому

$$\sum_{S_5 \subset S_n} C(S_s) = (n-4)\, C(S_n).$$

По условию, $n-4$ нечетное. Значит

$$\sum_{S_5 \subset S_n} C(S_5) \equiv C(S_n)\,(mod\, 2). \tag{2}$$

Так как по лемме 1 каждое из чисел $C(S_5)$ нечетное, то

$$\sum_{S_5 \subset S_n} C(S_5) \equiv C_n^5\,(mod\, 2). \tag{3}$$

Сопоставляя (2) и (3), получим окончательно

$$C(S_n) \equiv C_n^5 \pmod 2.$$

Будем обозначать систему, состоящую из n точек с κ внешними точками, через S_n^κ.

Теорема 2. Для любой системы S_n^κ, $\kappa > 3$, найдется система $S_n^{\kappa-}$ такая, что

$$I(S_n^\kappa) < I(S_n^{\kappa-1}).$$

Доказательство. Положим $n - \kappa = \lambda$. Обозначим подсистему, состоящую из внешних точек через S_κ, подсистему из внутренних точек — через S_λ. Подсчитаем число тех невыпуклых четверок из S_n^κ, в каждую из которых входит по крайней мере одна пара внешних смежных точек из S_λ [1]. Каждую невыпуклую четверку при этом считаем столько раз, сколько пар внешних в S_n^κ смежных точек входит в эту четверку. Каждая интересующая нас четверка содержит две точки из S_κ и две точки из S_λ или три точки из S_κ и одну точку из S_λ.

1. Подсчитаем число невыпуклых четверок, у которых одна точка принадлежит S_λ и три точки принадлежат S_κ. Пусть $a \in S_\lambda$, $b \in S_\kappa$. Рассмотрим систему $S_{\kappa+1}$, полученную добавлением к S_κ точки a. Введем в систему $S_{\kappa+1}$ двойную циклическую функцию условием

$$N(a, b) = 1.$$

Пусть точка c такова, что для любого x, для которого $N(a, x) > 0$, имеем $N(a, c) \geqslant N(a, x)$; пусть d такова, что для всех y, для которых $N(a, y) < 0$, будет $|N(a, d)| < |N(a, y)|$ и $N(a, d) < 0$. Тогда, как легко видеть, четверка (a, b, c, d) — невыпуклая, и точки c и d — смежные внешние точки в системе S_n.

Таким образом, для пары точек $a \in S_\lambda$ и $b \in S_\kappa$ нашлась невыпуклая четверка с парой смежных точек $c, d \in S_\kappa$.

Следовательно, величина $\kappa\lambda$ равна числу невыпуклых четверок с одной точкой из S_λ и, по крайней мере, с одной парой смежных точек из S_κ; каждая четверка сосчитана столько раз, сколько пар смежных точек из S_κ содержит эта четверка.

2. Найдем число невыпуклых четверок с двумя точками $a \in S$, $b \in S_\lambda$ и с двумя смежными точками в S_κ.

Рассмотрим систему, состоящую из точек S_κ с добавлением a и b. Аналогично предыдущему, число невыпуклых четверок, содержащих точки a, b и еще две смежные точки из S_κ, равно двум.

Поэтому общее число невыпуклых четверок с двумя точками из S_λ и двумя смежными точками из S_κ есть $2C_\lambda^2$.

3. Следовательно, общее число невыпуклых четверок, каждая из которых сосчитана столько раз, сколько она содержит пар смежных точек из S_κ, равно

$$\kappa\lambda + 2C_\lambda^2 = \kappa\lambda + \lambda^2 - \lambda.$$

Так как число пар смежных точек из S_κ равно κ, то найдется такая пара смежных точек a, $b \in S_\kappa$, что число невыпуклых четверок с участием a, b не превосходит

$$\frac{\kappa\lambda + \lambda^2 - \lambda}{\kappa} = \lambda + \frac{\lambda^2 - \lambda}{\kappa}. \tag{4}$$

4. Обозначим через $I_0(S_n^\kappa)$ число невыпуклых четверок из S_n^κ без участия точек a и b; аналогично $I_a(S_n^\kappa)$ — число всех невыпуклых

четверок с участием a, но без b; аналогично $I_b(S_n^\kappa)$ — число невыпуклых четверок с b, но без a; через $I_{ab}(S_n^\kappa)$ обозначим число невыпуклых четверок с a и b.

Выражая в (4) λ через n и κ, получим

$$I_{ab}(S_n^\kappa) \leqslant (n-1)\left(\frac{n}{\kappa}-1\right). \tag{5}$$

Пусть для определенности

$$I_a(S_n^\kappa) \geqslant I_b(S_n^\kappa).$$

Пусть c и d таковы, что

$$R(a,\ c) = \left[\frac{n-2}{2}\right] \quad \text{и} \quad L(a,\ d) = \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Пусть S_{n-1} есть система S_n без b; ее двойная циклическая функция $N_0(x,\ y)$ определена условиями
$N_0(a,\ d) = 1$,

$$N_0(x,\ a) = \begin{cases} n-2, & \text{если } x \in L(a,\ c) \\ 1, & \text{если } x \in R(b,\ d) \end{cases}$$

Рассмотрим теперь систему $S_n^{\kappa-1}$, состоящую из тех же точек, что и S_n^κ, с двойной циклической функцией $N_1(x,\ y)$, заданной следующим образом:

$$N_1(x,\ y) = \begin{cases} N_0(a,\ y), & y \neq b, \quad x = a, \\ -n+1, & y = b, \quad x = a, \\ N_0(x,\ y), & y \neq b, \quad x \in L(a,\ d), \\ n-1, & y = b, \quad x \in L(a,\ d), \\ N_0(x,\ y), & y \neq b, \quad x \in R(a,\ c), \\ -n+1, & y = b, \quad x \in R(a,\ c), \\ N_0(a,\ y), & y \neq a, \quad x = b, \\ n-1, & y = a, \quad x = b. \end{cases}$$

Справедливы соотношения

$$I_a(S_n^{\kappa-1}) = I_a(S_n^\kappa);$$

$$I_b(S_n^{\kappa-1}) = I_a(S_n^\kappa),$$

то есть

$$I_b(S_n^{\kappa-1}) \geqslant (I_b(S_n^\kappa)$$

$$I_0(S_n^{\kappa-1}) = I_0(S_n^\kappa).$$

Найдем теперь $I_{ab}(S_n^{\kappa-1})$. Будем обозначать сечения в $S_n^{\kappa-1}$ через $L'(x,\ y)$, $R'(x,\ y)$.

Легко видеть что если $x \in L'(a,\ b)$, $y \in R'(a,\ b)$, то четверка $(a,\ b,\ x,\ y)$ — невыпуклая. Отсюда

$$I_{ab}(S_n^{\kappa-1}) \geqslant \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

или

$$I_{ab}(S_n^{\kappa-1}) \geqslant (n-1)\left(\frac{n+1}{4}-1\right). \tag{6}$$

Если $\kappa > 3$, то из (5) и (6) следует

$$I_{ab}(S_n^\kappa) < I_{ab}(S_n^{\kappa-1}).$$

Наконец

$$I(S_n^\kappa) = I_0(S_n^\kappa) + I_a(S_n^\kappa) + I_b(S_n^\kappa) + I_{ab}(S_n^\kappa) <$$
$$< I_0(S_n^{\kappa-1}) + I_a(S_n^{\kappa-1}) + I_b(S_n^{\kappa-1}) + I_{ab}(S_n^{\kappa-1}) = I(S_n^{\kappa-1}).$$

Итак, мы построили такую систему $S_n^{\kappa-1}$, что $I(S_n^\kappa) < I(S_n^{\kappa-1})$, что и требовалось доказать.

Наполнение точечной системы

Определение. Величину

$$P(S_n) = \frac{I(S_n)}{C_n^4}$$

назовем наполнением точечной системы S_n. $P(S_4)$ принимает два значения: 0 и 1. $P(S_5)$ принимает три значения: 0, 2/5, 4/5.

Обозначим $\alpha_n = \max\limits_{S_n} P(S_n)$. Систему, для которой $P(S_n) = \alpha_n$, будем называть наполненной системой.

Теорема 3. Если S_n — наполненная, то она имеет три внешние точки.

Доказательство следует из теоремы 2 настоящей статьи.

Теорема 4. Числа α_1 , $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ образуют невозрастающую последовательность.

Доказательство. Пусть $n > \kappa$. Рассмотрим любую систему S_n. Покажем, что

$$P(S_n) \leqslant \alpha_\kappa.$$

Рассмотрим подсистему $S_\kappa \subset S_n$.

В силу (7) $P(S_\kappa) \leqslant \alpha_\kappa$. Поэтому $I(S_\kappa) \leqslant \alpha_\kappa C_\kappa^4$. (8)

Далее

$$C_{n-4}^{\kappa-4} I(S_n) = \sum_{S_\kappa \subset S_n} I(S_\kappa). \tag{9}$$

Но в силу (8)

$$\sum_{S_\kappa \in S_n} I(S_\kappa) \leqslant \alpha_\kappa C_\kappa^4 C_n^\kappa. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует

$$I(S_n) \leqslant \alpha_\kappa \frac{C_\kappa^4 C_n^\kappa}{C_{n-4}^{\kappa-4}},$$

то есть $I(S_n) \leqslant \alpha_\kappa$, C_n^4,откуда $\alpha_n \leqslant \alpha_\kappa$, что и требовалось доказать. В заключение заметим, что, так как последовательность $\{\alpha_n\}$ невозрастающая и $\alpha_n \geqslant 0$, то существует

$$\alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha_n.$$

Можно показать, что

$$\alpha \geqslant \frac{8}{13}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Пестов. Аксиоматика конечных точечных систем. Известия ТПИ, т. 131, 1965.

2. Г. Г. Пестов. Способы задания точечных систем. Известия ТПИ, т, 131, 1965.