

О НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ТОЧЕЧНЫХ СИСТЕМ

Г. Г. ПЕСТОВ

(Представлена кафедрой инженерно-вычислительной математики)

В настоящей статье вводится определение коэффициента наполнения точечной системы, изучается число выпуклых и невыпуклых четверок в точечной системе. По-видимому, результаты, изложенные в настоящей статье, если не оговорено противное, являются новыми.

О числе невыпуклых четверок

Будем рассматривать всевозможные четверки (a, b, c, d) точек системы S_n . Четверку (a, b, c, d) назовем выпуклой, если подсистема S_4 системы S_n , состоящая из точек a, b, c, d не имеет внутренних точек. В противном случае будем называть четверку (a, b, c, d) невыпуклой.

Обозначим число невыпуклых четверок в точечной системе S_n через $I(S_n)$, число выпуклых четверок — через $C(S_n)$.

Систему, состоящую из n точек, будем обозначать S_n .

В [2] доказана

Лемма 1. $C(S_5)$ есть нечетное число.

Имеет место:

Теорема 1. Если n — нечетное, то $C(S_n)$ той же четности, что и C_n^5 .

Доказательство. Пусть $S_5 \subset S_n$. Рассмотрим

$$\sum_{S_5 \subset S_n} C(S_5).$$

Каждая выпуклая четверка, входящая в S_n , сосчитана в выражении (1) ровно $n - 4$ раз. Поэтому

$$\sum_{S_5 \subset S_n} C(S_5) = (n - 4) C(S_n).$$

По условию, $n - 4$ нечетное. Значит

$$\sum_{S_5 \subset S_n} C(S_5) \equiv C(S_n) \pmod{2}. \quad (2)$$

Так как по лемме 1 каждое из чисел $C(S_5)$ нечетное, то

$$\sum_{S_5 \subset S_n} C(S_5) \equiv C_n^5 \pmod{2}. \quad (3)$$

Сопоставляя (2) и (3), получим окончательно

$$C(S_n) \equiv C_n^5 \pmod{2}.$$

Будем обозначать систему, состоящую из n точек с κ внешними точками, через S_n^κ .

Теорема 2. Для любой системы S_n^κ , $\kappa > 3$, найдется система $S_n^{\kappa-1}$ такая, что

$$I(S_n^\kappa) < I(S_n^{\kappa-1}).$$

Доказательство. Положим $n - \kappa = \lambda$. Обозначим подсистему, состоящую из внешних точек через S_κ , подсистему из внутренних точек — через S_λ . Подсчитаем число тех невыпуклых четверок из S_n^κ , в каждую из которых входит по крайней мере одна пара внешних смежных точек из S_λ [1]. Каждую невыпуклую четверку при этом считаем столько раз, сколько пар внешних в S_n^κ смежных точек входит в эту четверку. Каждая интересующая нас четверка содержит две точки из S_κ и две точки из S_λ или три точки из S_κ и одну точку из S_λ .

1. Подсчитаем число невыпуклых четверок, у которых одна точка принадлежит S_λ и три точки принадлежат S_κ . Пусть $a \in S_\lambda$, $b \in S_\kappa$. Рассмотрим систему $S_{\kappa+1}$, полученную добавлением к S_κ точки a . Введем в систему $S_{\kappa+1}$ двойную циклическую функцию условием

$$N(a, b) = 1.$$

Пусть точка c такова, что для любого x , для которого $N(a, x) > 0$, имеем $N(a, c) \geq N(a, x)$; пусть d такова, что для всех y , для которых $N(a, y) < 0$, будет $|N(a, d)| < |N(a, y)|$ и $N(a, d) < 0$. Тогда, как легко видеть, четверка (a, b, c, d) — невыпуклая, и точки c и d — смежные внешние точки в системе S_n .

Таким образом, для пары точек $a \in S_\lambda$ и $b \in S_\kappa$ нашлась невыпуклая четверка с парой смежных точек $c, d \in S_\kappa$.

Следовательно, величина $\kappa\lambda$ равна числу невыпуклых четверок с одной точкой из S_λ и, по крайней мере, с одной парой смежных точек из S_κ ; каждая четверка сосчитана столько раз, сколько пар смежных точек из S_κ содержит эта четверка.

2. Найдем число невыпуклых четверок с двумя точками $a \in S_\lambda$, $b \in S_\lambda$ и с двумя смежными точками в S_κ .

Рассмотрим систему, состоящую из точек S_κ с добавлением a и b . Аналогично предыдущему, число невыпуклых четверок, содержащих точки a, b и еще две смежные точки из S_κ , равно двум.

Поэтому общее число невыпуклых четверок с двумя точками из S_λ и двумя смежными точками из S_κ есть $2C_\lambda^2$.

3. Следовательно, общее число невыпуклых четверок, каждая из которых сосчитана столько раз, сколько она содержит пар смежных точек из S_κ , равно

$$\kappa\lambda + 2C_\lambda^2 = \kappa\lambda + \lambda^2 - \lambda.$$

Так как число пар смежных точек из S_κ равно κ , то найдется такая пара смежных точек $a, b \in S_\kappa$, что число невыпуклых четверок с участием a, b не превосходит

$$\frac{\kappa\lambda + \lambda^2 - \lambda}{\kappa} = \lambda + \frac{\lambda^2 - \lambda}{\kappa}. \quad (4)$$

4. Обозначим через $I_0(S_n^\kappa)$ число невыпуклых четверок из S_n^κ без участия точек a и b ; аналогично $I_a(S_n^\kappa)$ — число всех невыпуклых

четверок с участием a , но без b ; аналогично $I_b(S_n^\kappa)$ — число невыпуклых четверок с b , но без a ; через $I_{ab}(S_n^\kappa)$ обозначим число невыпуклых четверок с a и b .

Выражая в (4) λ через n и κ , получим

$$I_{ab}(S_n^\kappa) \leq (n-1) \left(\frac{n}{\kappa} - 1 \right). \quad (5)$$

Пусть для определенности

$$I_a(S_n^\kappa) \geq I_b(S_n^\kappa).$$

Пусть c и d таковы, что

$$R(a, c) = \left[\frac{n-2}{2} \right] \quad \text{и} \quad L(a, d) = \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Пусть S_{n-1} есть система S_n без b ; ее двойная циклическая функция $N_0(x, y)$ определена условиями $N_0(a, d) = 1$,

$$N_0(x, a) = \begin{cases} n-2, & \text{если } x \in L(a, c) \\ 1, & \text{если } x \in R(b, d) \end{cases}$$

Рассмотрим теперь систему $S_n^{\kappa-1}$, состоящую из тех же точек, что и S_n^κ , с двойной циклической функцией $N_1(x, y)$, заданной следующим образом:

$$N_1(x, y) = \begin{cases} N_0(a, y), & y \neq b, & x = a, \\ -n+1, & y = b, & x = a, \\ N_0(x, y), & y \neq b, & x \in L(a, d), \\ n-1, & y = b, & x \in L(a, d), \\ N_0(x, y), & y \neq b, & x \in R(a, c), \\ -n+1, & y = b, & x \in R(a, c), \\ N_0(a, y), & y \neq a, & x = b, \\ n-1, & y = a, & x = b. \end{cases}$$

Справедливы соотношения

$$I_a(S_n^{\kappa-1}) = I_a(S_n^\kappa);$$

$$I_b(S_n^{\kappa-1}) = I_a(S_n^\kappa),$$

то есть

$$I_b(S_n^{\kappa-1}) \geq I_b(S_n^\kappa)$$

$$I_0(S_n^{\kappa-1}) = I_0(S_n^\kappa).$$

Найдем теперь $I_{ab}(S_n^{\kappa-1})$. Будем обозначать сечения в $S_n^{\kappa-1}$ через $L'(x, y)$, $R'(x, y)$.

Легко видеть что если $x \in L'(a, b)$, $y \in R'(a, b)$, то четверка (a, b, x, y) — невыпуклая. Отсюда

$$I_{ab}(S_n^{\kappa-1}) \geq \left(\frac{n-2}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

или

$$I_{ab}(S_n^{\kappa-1}) \geq (n-1) \left(\frac{n+1}{4} - 1 \right). \quad (6)$$

Если $\kappa > 3$, то из (5) и (6) следует

$$I_{ab}(S_n^\kappa) < I_{ab}(S_n^{\kappa-1}).$$

Наконец

$$\begin{aligned} I(S_n^\kappa) &= I_0(S_n^\kappa) + I_a(S_n^\kappa) + I_b(S_n^\kappa) + I_{ab}(S_n^\kappa) < \\ &< I_0(S_n^{\kappa-1}) + I_a(S_n^{\kappa-1}) + I_b(S_n^{\kappa-1}) + I_{ab}(S_n^{\kappa-1}) = I(S_n^{\kappa-1}). \end{aligned}$$

Итак, мы построили такую систему $S_n^{\kappa-1}$, что $I(S_n^\kappa) < I(S_n^{\kappa-1})$, что и требовалось доказать.

Наполнение точечной системы

Определение. Величину

$$P(S_n) = \frac{I(S_n)}{C_n^4}$$

назовем наполнением точечной системы S_n . $P(S_4)$ принимает два значения: 0 и 1. $P(S_5)$ принимает три значения: 0, 2/5, 4/5.

Обозначим $\alpha_n = \max_{S_n} P(S_n)$. Систему, для которой $P(S_n) = \alpha_n$, будем называть наполненной системой.

Теорема 3. Если S_n — наполненная, то она имеет три внешние точки.

Доказательство следует из теоремы 2 настоящей статьи.

Теорема 4. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ образуют невозрастающую последовательность.

Доказательство. Пусть $n > \kappa$. Рассмотрим любую систему S_n . Покажем, что

$$P(S_n) \leq \alpha_\kappa.$$

Рассмотрим подсистему $S_\kappa \subset S_n$.

В силу (7) $P(S_\kappa) \leq \alpha_\kappa$. Поэтому $I(S_\kappa) \leq \alpha_\kappa C_\kappa^4$. (8)

Далее

$$C_{n-4}^{\kappa-4} I(S_n) = \sum_{S_\kappa \subset S_n} I(S_\kappa). \quad (9)$$

Но в силу (8)

$$\sum_{S_\kappa \subset S_n} I(S_\kappa) \leq \alpha_\kappa C_\kappa^4 C_n^\kappa. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует

$$I(S_n) \leq \alpha_\kappa \frac{C_\kappa^4 C_n^\kappa}{C_{n-4}^{\kappa-4}},$$

то есть $I(S_n) \leq \alpha_\kappa C_n^4$, откуда $\alpha_n \leq \alpha_\kappa$, что и требовалось доказать. В заключение заметим, что, так как последовательность $\{\alpha_n\}$ невозрастающая и $\alpha_n \geq 0$, то существует

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n.$$

Можно показать, что

$$\alpha \geq \frac{8}{13}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Г. Пестов. Аксиоматика конечных точечных систем. Известия ТПИ, т. 131, 1965.
2. Г. Г. Пестов. Способы задания точечных систем. Известия ТПИ, т. 131, 1965.