

ОДНО СВОЙСТВО НЕПРЕРЫВНОЙ КРИВОЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Л. Е. ПОРТНОВ

(Представлена проф. П. П. Куфаревым)

Пусть L_0 — непрерывная кривая евклидова пространства E_1 и $\{f(t)\}$ семейство эквивалентных отображений [1], определяющих L_0 .

Пусть $f_0(t) \in \{f(t)\}$.

Возьмем на $[a, b]$ открытое множество

$$G = \bigcup_i (a_i, b_i),$$

где (a_i, b_i) $i = 1, 2, \dots$ составляющие интервалы, и положим

$$\bar{f}_0(t) = \begin{cases} f_0(t) & \text{при } t \in [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i) \\ \frac{f(a_i)(b_i - t) + f(b_i)(t - a_i)}{b_i - a_i} & \text{при } t \in [a_i, b_i]. \end{cases}$$

Пусть теперь L_1 — кривая, определяемая отображением $\bar{f}_0(t)$, а $\{f_1(t)\}$ — семейство эквивалентных отображений, содержащее функцию $\bar{f}_0(t)$.

Пусть $f_1(t) \in \{f(t)\}$.

Возьмем на $[a, b]$ открытое множество

$$G = \bigcup_i (c_i, d_i),$$

где (c_i, d_i) $i = 1, 2, \dots$ составляющие интервалы, и положим

$$\bar{f}_1(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{при } t \in [a, b] \setminus \bigcup_i (c_i, d_i) \\ \frac{f(c_i)(d_i - t) + f(d_i)(t - c_i)}{d_i - c_i} & \text{при } t \in [c_i, d_i]. \end{cases}$$

Пусть $\{f_2(t)\}$ семейство эквивалентных отображений, содержащее функцию $\bar{f}_1(t)$, а L_2 — кривая, определяемая этим семейством.

Продолжив этот процесс, получим кривые

$$L_0, L_1, \dots, L_n, \tag{1}$$

соответствующие им семейства эквивалентных отображений

$$\{f(t)\}, \{f_1(t)\}, \dots, \{f_n(t)\}, \tag{2}$$

некоторые параметрические задания кривых

$$\overline{f_0}(t), \overline{f_0'}(t), \overline{f_1}(t), \dots, \overline{f_{n-1}}(t) \quad (3)$$

и открытые множества

$$G, G_1, G_2, \dots, G_n. \quad (4)$$

Теорема. Если последовательности (3) и (4) таковы, что

$$L_0 \neq L_1 \neq L_2 \neq \dots \neq L_n,$$

то

$$L_0 \neq L_n.$$

Для доказательства теоремы установим некоторые свойства характеристики непрерывной функции [2].

Лемма 1. Если функция $\varphi(t)$, $t \in [a, b]$ непрерывна и неубывающая, то для любой непрерывной функции $f(t)$, $t \in [\varphi(a), \varphi(b)]$ и любого $\delta > 0$ имеем

$$N[f(t), \delta; \varphi(a), \varphi(b)] = N\{f[\varphi(t)], \delta; a, b\}.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi(a) = t_0 < t_1 < \dots < t_{N_1} = \varphi(b). \quad (6)$$

есть δ — разбиение $[\varphi(a), \varphi(b)]$ для $f(t)$ такое, что

$$N_1 = N[f(t), \delta; \varphi(a), \varphi(b)],$$

и аналогично

$$a = s_0 < s_1 < \dots < s_{N_2} = b \quad (7)$$

есть δ — разбиение $[a, b]$ для $f[\varphi(t)]$ такое, что

$$N_2 = N\{f[\varphi(t)], \delta; a, b\}.$$

Ясно, что

$$\varphi(s_0) < \varphi(s_1) < \dots < \varphi(s_{N_2}) \quad (8)$$

будет δ — разбиение для $f(t)$.

Следовательно,

$$N_2 \leq N_1. \quad (9)$$

Пусть $t_i' \in \varphi^{-1}(t_i)$, тогда

$$t_0' < t_1' < \dots < t_{N_1}' \quad (10)$$

будет δ — разбиением для $f[\varphi(t)]$ и, следовательно,

$$N_2 \geq N_1. \quad (11)$$

Из (9) и (11) имеем

$$N_1 = N_2.$$

Следствие. Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, $t \in [a, b]$ эквивалентны, то для любого $\delta > 0$

$$N[f_1(t), \delta; a, b] = N[f_2(t), \delta; a, b].$$

Доказательство. Так как функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ эквивалентны, то существуют такие непрерывные, неубывающие функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $t \in [a, b]$, что

$$\varphi(a) = \psi(a) = a, \quad \varphi(b) = \psi(b) = b.$$

и

$$f_1[\varphi(t)] = f_2[\psi(t)]. \quad (12)$$

По лемме 1, учитывая (12), имеем

$$N[f_1(t), \delta; a, b] = N\{f_2[\psi(t)], \delta; a, b\} = N[f_2(t), \delta; a, b],$$

то есть

$$N[f_1(t), \delta; a, b] = N[f_2(t), \delta; a, b].$$

Лемма 2. Для непрерывной функции $f(t)$, $t \in [a, b]$ и разбиения отрезка $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_\kappa = b$$

при любом $\delta > 0$

$$\sum_{i=1}^{\kappa} N_i \leq N[f(t), \delta; a, b] \leq \sum_{i=1}^{\kappa} N_i + \kappa - 1, \quad (13)$$

где

$$N_i = N[f(t), \delta; t_{i-1}, t_i] \quad i = 1, 2, \dots, \kappa.$$

Доказательство. Пусть

$$S_0^i < S_1^i < \dots < S_{N_i}^i \quad i = 1, 2, \dots, \kappa \quad (14)$$

δ — разбиения, определяющие δ — характеристики. Совокупность (14) определяет на $[a, b]$ δ — разбиение для функции $f(t)$ и поэтому

$$\sum_{i=1}^{\kappa} N_i \leq N[f(t); \delta; a, b]. \quad (15)$$

Предположим, что правая часть неравенства (13) не выполняется, то есть

$$N[f(t), \delta; a, b] \geq \sum_{i=1}^{\kappa} N_i + \kappa.$$

Тогда δ — разбиение, дающее $N[f(t), \delta; a, b]$, определит, хотя бы на одном интервале $[t_{i-1}, t_i]$ δ — разбиение, состоящее больше, чем из N_i интервалов, что противоречит определению N_i .

Следовательно,

$$N[f(t), \delta; a, b] \leq \sum_{i=1}^{\kappa} N_i + \kappa - 1. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует (13).

Лемма 3. Если $f(t)$, $t \in [a, b]$ непрерывная функция и

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t \in [a, b] \setminus \bigcup_i (a_i, b_i) \\ \frac{f(a_i)(b_i - t) + f(b_i)(t - a_i)}{b_i - a_i} & \text{при } t \in (a_i, b_i), \end{cases}$$

где $\bigcup_i (a_i, b_i) = G \subset [a, b]$, (a_i, b_i) $i = 1, 2, \dots$, составляющие интервалы множества G , то

$$N[f(t), \delta; a, b] \geq N[g(t), \delta; a, b].$$

Доказательство. Пусть

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b, \quad (17)$$

δ — разбиение, определяющее

$$N[g(t), \delta; a, b] = m.$$

Возьмем разбиение

$$a = p_0 < p_1 < \dots < p_m = b, \quad (18)$$

где, в случае $f(t_i) = g(t_i)$, $p_i = t_i$.

Так как

$$\omega_{[t_{i-1}, t_i]} f(t) \geq \omega_{[t_{i-1}, t_i]} g(t),$$

то

$$N[f(t), \delta; a, b] \geq N[g(t), \delta; a, b].$$

Пусть теперь t_z — первая точка из (17), для которой

$$f(t_z) \neq g(t_z).$$

Ясно, что $t_z \in (a_i, b_i) \subset G$.

Так как $f(a_i) = g(a_i)$, $f(b_i) = g(b_i)$ и $g(t)$ — монотонна на $[a, b]$, то существует $p_z \in [a_i, b_i]$ такая, что

$$f(p_z) = g(t_z).$$

Пусть

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \in [t_{z-1}, a_i] \\ \frac{a_i(t_z - t) + p_z(t - a_i)}{t_z - a_i} & \text{при } t \in [a_i, t_z]. \end{cases}$$

Так как $\varphi(t)$ монотонна, то

$$\omega_{[t_{z-1}, p_z]} f(x) = \omega_{[t_{z-1}, t_z]} f[\varphi(t)],$$

но

$$\omega_{[t_{z-1}, t_z]} f[\varphi(t)] \geq \omega_{[t_{z-1}, t_z]} g(t).$$

Следовательно,

$$\omega_{[p_{z-1}, p_z]} f(t) \geq \omega_{[t_{z-1}, t_z]} g(t).$$

Положим теперь $p_{z+1} = t_{z+1}$ при $f(t_{z+1}) = g(t_{z+1})$, а если $f(t_{z+1}) \neq g(t_{z+1})$, то выбираем p_{z+1} так же, как и p_z . Таким образом, каждому $[i_{i-1}, t_i]$ $i = 1, 2, \dots, m$ поставим в соответствие $[p_{i-1}, p_i]$, причем

$$\omega_{[p_{i-1}, p_i]} f(t) \geq \omega_{[t_{i-1}, t_i]} g(t)$$

и, следовательно,

$$N[f(t), \delta; a, b] \geq N[g(t), \delta; a, b].$$

Приступим к доказательству теоремы.

Пусть $L_0 \neq L_1$, тогда $f_0(t)$ не эквивалентна $\bar{f}_0(t)$. Последнее возможно в случае, когда хотя бы на одном $[a_i, b_i]$ $f_0(t)$ не эквивалентна функции

$$\frac{f_0(a_i)(b_i - t) + f_0(b_i)(t - a_i)}{b_i - a_i},$$

то есть при $t \in [a_i, b_i]$ $f_0(t)$ не монотонна. Последнее означает, что можно указать такие три точки $t_1, t_2, t_3 \in [a_i, b_i]$, что $t_1 < t_2 < t_3$ и $f_0(t_1) = f_0(t_3) \neq f_0(t_2)$. Можно считать, что

$$f_0(a_i) \leq f_0(t_1) = f_0(t_2) \leq f_0(b_i). \quad (19)$$

Пусть далее при $t = t_4 \in [a_i, b_i]$

$$f_0(t_4) = f_0(t_1).$$

Такое $t_4 \in [a_i, b_i]$ существует в силу (19).

Положим

$$f'_0(t) = \begin{cases} t_0(t), & \text{при } f \in [a, b] \setminus (a_i, b_i), \\ f_0 \left[\frac{a_i(t_4 - t) + t_1(t - a_i)}{t_4 - a_i} \right], & \text{при } t \in [a_i, t_4], \\ f_0 \left[\frac{t_4(b_i - t) + t_3(t - t_4)}{b_i - t_4} \right], & \text{при } t \in [t_4, b_i]. \end{cases}$$

Ясно, что $f'_0(t)$ непрерывна на $[a, b]$ и по лемме 3 при любом $\delta > 0$

$$N[f'_0(t), \delta; a, b] \geq N[\bar{f}_0(t), \delta; a, b]. \quad (20)$$

По лемме 2, при любом $\delta > 0$, имеем

$$N[f'_0(t), \delta; a, b] \leq N[f'_0(t), \delta; a, t_4] + N[f'_0(t), \delta; t_4, b] + 1 \quad (21)$$

и

$$N[f_0(t), \sigma; a, t_1] + N[f_0(t), \delta; t_1, t_3] + N[f'_0(t), \delta; t_3, b] \leq N[f_0(t), \sigma; a, b]. \quad (22)$$

По лемме 1, при любом $\delta > 0$, имеем

$$N[f'_0(t), \delta; a, t_4] = N[f_0(t), \delta; a, t_1] \quad (23)$$

и

$$N[f'_0(t), \delta; t_4, b] = N[f_0(t), \delta; t_3, b].$$

Если положить

$$\delta \leq \sigma = |f_0(t_1) - f_0(t_2)|,$$

то получим

$$N[f_0(t), \delta; t_1, t_3] \geq 2. \quad (24)$$

Учтя (23) и (24), имеем из (22)

$$N[f'_0(t), \sigma; a, t_4] + N[f'_0(t), \delta; t_4, b] + 2 \leq N[f_0(t), \delta; a, b]. \quad (25)$$

Из (21) и (25) имеем при $\delta \leq \delta_0$.

$$N[f_0(t), \delta; a, b] > N[f'_0(t), \delta; a, b]. \quad (26)$$

Далее, если положить $\delta \leq \delta_0$, то из (20) и (26) получаем

$$N[f_0(t), \delta; a, b] > N[\bar{f}_0(t), \delta; a, b]. \quad (27)$$

По лемме 3 и следствию к лемме 1 имеем при любом $\delta > 0$

$$N[\bar{f}_{i-1}(t), \delta; a, b] \geq N[\bar{f}_i(t), \delta; a, b], \quad (28)$$

где $\bar{f}_i(t) \in (3)$.

Из (27) и (28) при $\delta < \delta_0$ имеем

$$N[f_0(t), \delta; a, b] > N[\bar{f}_{n-1}(t), \delta; a, b].$$

Последнее неравенство, с учетом следствия к лемме 1, означает, что $f_0(t)$ не эквивалентна $f_{n-1}(t)$, то есть

$$L_0 \neq L_n.$$

Доказанная теорема естественным образом обобщается на случай n -мерного евклидова пространства E_n . Покажем, как это сделать в случае E_2 .

Пусть L_0 непрерывная кривая пространства E_2 .

Рассмотрим последовательности

$$L_0, L_1, \dots, L_n; \quad (29)$$

$$\{f(t)\}, \{f_1(t)\}, \dots, \{f_n(t)\}; \quad (30)$$

$$f_0(t), \bar{f}_0(t), \bar{f}_1(t), \dots, \bar{f}_{n-1}(t); \quad (31)$$

$$G, G_1, G_2, \dots, G_n, \quad (32)$$

Аналогичные последовательностям (1), (2), (3), (4). Если $f_0(t)$ и $\bar{f}_0(t)$ не являются параметризациями одной и той же кривой, то найдется интервал (a_i, b_i) такой, что $f_0(t) \not\equiv \bar{f}_0(t)$ при $t \in (a_i, b_i)$. И возьмем прямую

$$y = \frac{a_i - b_i}{f_0(b_i) - f_0(a_i)} t. \quad (34)$$

Спроектируем последовательность (31) на прямую (34).

Получим последовательность

$$g_0(t), \bar{g}_0(t), \bar{g}_1(t), \dots, \bar{g}_{n-1}(t)$$

непрерывных отображений отрезка $[a, b]$ в прямую (24).

Легко видеть, что

$$N [g_0(t), \bar{g}_0(t); a, b] \not\equiv N [\bar{g}_{n-1}(t), \bar{g}_{n-1}(t); a, b]. \quad (35)$$

Из (35) следует, что отображение отрезка $[a, b]$ в E_2 $f_0(t)$ и $f_{n-1}(t)$ не эквивалентны, то есть

$$L \neq L_n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы функций и функционального анализа. МГУ, 1954.
2. Л. Е. Портнов. Доклады Второй Сибирской конференции. Изд-во ТГУ, стр. 51, 1962.