

**РАСЧЕТ ВЛИЯНИЯ ВИХРЕВЫХ ТОКОВ НА ОСНОВНОЕ ПОЛЕ  
ВОЗБУЖДЕНИЯ МАШИНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА  
С ПЕЧАТНЫМ ЯКОРЕМ**

А. М. ШОР

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин и общей электротехники)

Для расчета потерь от вихревых токов в печатной обмотке якоря машины постоянного тока необходимо знать результирующее магнитное поле машины, полученное наложением на основное поле возбуждения поля реакции вихревых токов.

В работе проводится расчет результирующего магнитного поля в области, занятой проводниками печатной обмотки. Полученные результаты позволяют точнее провести расчет потерь и оценить степень влияния вихревых токов на основное поле возбуждения машины.

Расчет выполнен при следующих допущениях:

1. Не учтена неравномерность распределения напряженности внешнего магнитного поля машины по ширине проводника, возникающая при движении проводника в этом поле. Таким образом, рассматривается проводник не в бегущем магнитном поле, что имеет место в машине, а в переменном однородном магнитном поле, направленном нормально плоской поверхности проводника.

2. Расчет проводится относительно первой гармоники внешнего магнитного поля. Однако результаты расчета позволяют оценить степень влияния поля реакции на высшие гармонические основного поля.

3. Учтена реакция вихревых токов отдельного проводника. Тем не менее, полученные результаты могут быть использованы для определения магнитного поля, создаваемого соседними проводниками.

4. Ограниченный по длине прямоугольного сечения проводник заменяется бесконечным цилиндрическим проводником эллиптического сечения.

5. Не учитываются токи смещения как внутри, так и вне проводника, что вполне допустимо в случаях малых частот, имеющих место в машине постоянного тока.

Окончательная формулировка задачи: бесконечный цилиндр эллиптического сечения шириной  $2b$ , толщиной  $2a$  с удельной проводимостью  $\gamma$  и магнитной проницаемостью  $\mu_i$  находится в переменном однородном магнитном поле  $H = H_0 \sqrt{2} \sin \omega t$  (соответствующий комплекс  $\vec{H}_0$ ) (рис. 1). Определить распределение плотности тока по сечению проводника и максимальную величину искажения внешнего поля полем вихревых токов. Из очевидных соображений максимальное разматничивающее действие вихревые токи будут оказывать в центре проводника.

Расчет ведется в эллиптической системе координат  $\xi, \eta$ , координата  $\xi$  определяет размер софокусных эллипсов, координата  $\eta$  определяет положение софокусных гипербол ортогональных эллипсам.

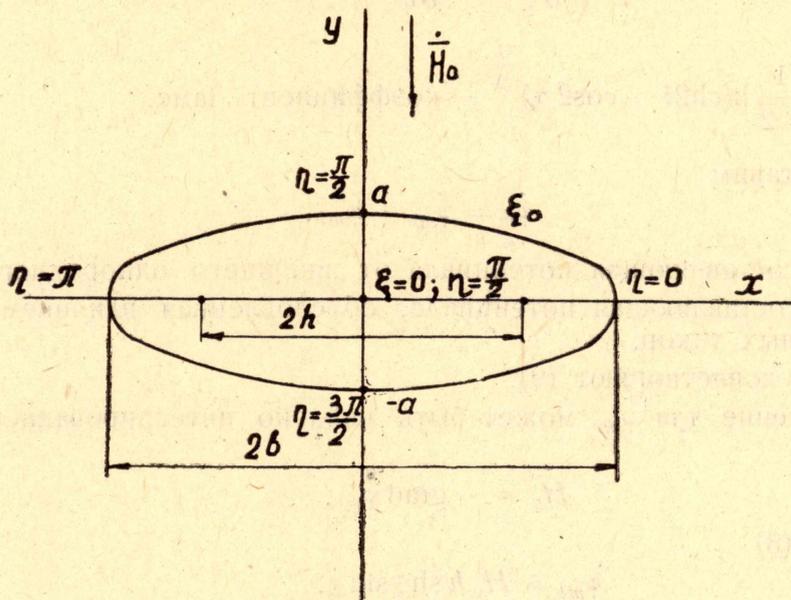


Рис. 1. Проводник в переменном магнитном поле.

Координаты  $\xi, \eta$  связаны с координатами  $x, y$  соотношениями:

$$x + jy = h \operatorname{ch}(\xi + j\eta); \quad (1)$$

$$x = h \operatorname{ch} \xi \cos \eta; \quad (2)$$

$$y = h \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad (3)$$

$2h$  — расстояние между фокусами эллипсов. Кроме того, ширина цилиндра  $2a = 2h \operatorname{ch} \xi_0$ , толщина цилиндра  $2b = 2h \operatorname{sh} \xi_0$ , где  $\xi_0$  — координата, определяющая положение контура эллиптического проводника.

Расчет сводится к интегрированию уравнений Максвелла для квазистационарного режима

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}, \quad (4)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \quad (5)$$

во внешней и внутренней области проводника с учетом непрерывности тангенциальных составляющих вектора напряженности магнитного поля и нормальных составляющих вектора магнитной индукции

$$\dot{H}_{\eta e} = \dot{H}_{\eta i}, \quad (6) \quad \nu_e \dot{H}_{\xi e} = \nu_i \dot{H}_{\xi i}. \quad (7)$$

Во внешней области (индекс  $e$ ) с учетом допущения (5) уравнение (4) имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{H}_e = 0, \quad (8)$$

и, следовательно, поле вне проводника потенциально и описывается уравнением Лапласа для скалярного магнитного потенциала  $\dot{\varphi}_m$

$$\nabla^2 \dot{\varphi}_m = 0. \quad (9)$$

Уравнение (7) в эллиптических координатах имеет вид

$$\frac{1}{l^2} \left( \frac{\partial^2 \dot{\varphi}_m}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \dot{\varphi}_m}{\partial \eta^2} \right) = 0 \quad (10)$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}} h (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta)^{\frac{1}{2}} \text{ — коэффициент Ламе.}$$

Представим

$$\dot{\varphi}_m = \dot{\varphi}_{m0} + \dot{\varphi}_{mb}$$

где  $\dot{\varphi}_{m0}$  — составляющая потенциала от внешнего однородного поля;  
 $\dot{\varphi}_{mb}$  — составляющая потенциала, обусловленная влиянием вихревых токов;

$\dot{\varphi}_{m0}, \dot{\varphi}_{mb}$  — удовлетворяют (9).

Выражение для  $\dot{\varphi}_{m0}$  может быть найдено интегрированием уравнения

$$\vec{H}_0 = -\operatorname{grad} \dot{\varphi}_{m0}. \quad (11)$$

С учетом (3)

$$\dot{\varphi}_{mb} = \dot{H}_0 h \operatorname{sh} \xi \sin \eta. \quad (12)$$

Интегрируя (10) для  $\dot{\varphi}_{mb}$  по методу Фурье и выбирая решения, затухающие на бесконечности, нечетные относительно оси  $x$  и четные относительно оси  $y$ , получим

$$\dot{\varphi}_{mb} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} B_{2\kappa+1} e^{-(2\kappa+1)\xi} \cdot \sin(2\kappa+1)\eta. \quad (13)$$

Тогда

$$\dot{\varphi}_m = \dot{H}_0 h \operatorname{sh} \xi \sin \eta + \sum_{\kappa=0}^{\infty} B_{2\kappa+1} e^{-(2\kappa+1)\xi} \cdot \sin(2\kappa+1)\eta. \quad (14)$$

Составляющие напряженности магнитного поля

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\xi e} = -\frac{1}{l} \frac{\partial \dot{\varphi}_m}{\partial \xi} = -\frac{1}{l} [\dot{H}_0 h \operatorname{ch} \xi \sin \eta - \\ - \sum_{\kappa=0}^{\infty} (2\kappa+1) B_{2\kappa+1} e^{-(2\kappa+1)\xi} \sin(2\kappa+1)\eta], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_{\eta e} = -\frac{1}{l} \frac{\partial \dot{\varphi}_m}{\partial \eta} = -\frac{1}{l} [\dot{H}_0 h \operatorname{sh} \xi \cos \eta + \\ + \sum_{\kappa=0}^{\infty} (2\kappa+1) B_{2\kappa+1} e^{-(2\kappa+1)\xi} \cos(2\kappa+1)\eta]. \end{aligned} \quad (16)$$

Для области внутри проводника (индекс  $i$ ) совместное решение (4), (5) относительно  $\vec{E} = \bar{\kappa} \vec{E}_z$  приводит к уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{E}_z + \kappa_1^2 \vec{E}_z = 0, \quad (17)$$

$$\kappa_1^2 = -j\omega\mu_i\gamma. \quad (18)$$

В эллиптической системе координат (17) имеет вид

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \eta^2} + 2q (\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta) \dot{E}_z = 0, \quad (19)$$

$$q = \left( \frac{\kappa_1 h}{2} \right)^2. \quad (20)$$

Решением (19) [1] является  $\dot{E}_z = \chi(\xi) \Phi(\eta)$ , причем  $\chi(\xi)$  — решение модифицированного уравнения Матье

$$\frac{d^2 \chi}{d\xi^2} - (a_1 - 2q \operatorname{ch} 2\xi) \chi = 0, \quad (21)$$

а  $\Phi(\eta)$  — решение уравнения Матье

$$\frac{d^2 \Phi}{d\eta^2} + (a_1 - 2q \cos 2\eta) \Phi = 0, \quad (22)$$

$a_1$  — постоянная разделения.

Периодическими решениями (21), (22) являются модифицированные функции и функции Матье типа косинуса и синуса [1]

$$\chi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} [D'_n C e_n(\xi) + E'_n S e_n(\xi)], \quad (23)$$

$$\Phi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} [F'_n c e_n(\eta) + K'_n s e_n(\eta)], \quad (24)$$

Из совокупности произведений функций (23), (24) выбираются только функции, четные относительно оси  $x$  и нечетные относительно оси  $y$

$$\dot{E}_z = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} C e_{2n+1}(\xi) c e_{2n+1}(\eta). \quad (25)$$

Составляющие напряженности магнитного поля из (5)

$$\dot{H}_{\xi_i} = -\frac{1}{j\omega\mu_i l} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \eta} = -\frac{1}{j\omega\mu_i l} \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} C e_{2n+1}(\xi) c e'_{2n+1}(\eta), \quad (26)$$

$$\dot{H}_{\eta_i} = \frac{1}{j\omega\mu_i l} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial \xi} = \frac{1}{j\omega\mu_i l} \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} C e'_{2n+1}(\xi) c e_{2n+1}(\eta). \quad (27)$$

Учитывая (6), (7), получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{H}_0 h \operatorname{sh} \xi_0 \cos \eta + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \cdot B_{\kappa} e^{-\kappa \xi_0} \cos \kappa \eta &= -\frac{1}{j\omega\mu_i} \sum_{n=1}^{\infty} D_n C e'_n(\xi_0) c e_n(\eta), \\ \dot{H}_0 h \operatorname{ch} \xi_0 \sin \eta - \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \cdot B_{\kappa} e^{-\kappa \xi_0} \sin \kappa \eta &= \frac{1}{j\omega\mu_e} \sum_{n=1}^{\infty} D_n C e_n(\xi_0) c e'_n(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

В (28) и во всех случаях в дальнейшем суммирование производится только по нечетным  $\kappa$ ,  $r$  и  $n$ .

Можно показать, что для мнимого  $q$

$$\cos \kappa \eta = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\kappa}^{\prime n} c e_n(\eta); \quad (29)$$

$$\sin \kappa \eta = - \sum_{n=1}^{\infty} A_{\kappa}^{\prime n} c e_n'(\eta),$$

где

$$A_{\kappa}^{\prime n} = \frac{A_{\kappa}^n}{\Delta_n}, \quad \Delta_n = \sum_{r=1}^{\infty} [A_r^n]^2.$$

Подставляя (29) в (28), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \kappa B_{\kappa} A_{\kappa}^{\prime n} e^{-\kappa \xi_0} c e_n(\eta) + \frac{1}{j\omega \mu_i} \sum_{n=1}^{\infty} D_n C e_n'(\xi_0) c e_n(\eta) = \\ = - \dot{H}_0 h \operatorname{sh} \xi_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_1^{\prime n} c e_n(\eta), \\ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \kappa B_{\kappa} A_{\kappa}^{\prime n} e^{-\kappa \xi_0} c e_n'(\eta) - \frac{1}{j\omega \mu_e} \sum_{n=1}^{\infty} D_n C e_n(\xi_0) c e_n'(\eta) = \\ = \dot{H}_0 h \operatorname{ch} \xi_0 \sum_{n=1}^{\infty} A_1^{\prime n} c e_n'(\eta). \end{aligned} \quad (30)$$

Система (30) удовлетворяется, если для любого  $n$

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa B_{\kappa} A_{\kappa}^{\prime n} e^{-\kappa \xi_0} + \frac{1}{j\omega \mu_i} D_n C e_n'(\xi_0) = - \dot{H}_0 h \operatorname{sh} \xi_0 A_1^{\prime n}; \\ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa B_{\kappa} A_{\kappa}^{\prime n} e^{-\kappa \xi_0} - \frac{1}{j\omega \mu_e} D_n C e_n(\xi_0) = \dot{H}_0 h \operatorname{ch} \xi_0 A_1^{\prime n}, \end{aligned} \quad (31)$$

откуда

$$D_n = - \dot{H}_0 \frac{j\omega \mu_e \mu_i h e^{\xi_0} A_1^{\prime n}}{\mu_e C e_n'(\xi_0) + \mu_i C e_n(\xi_0)}, \quad (32)$$

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa B_{\kappa} A_{\kappa}^{\prime n} e^{-\kappa \xi_0} = \frac{\dot{H}_0 h A_1^{\prime n} [\mu_e \operatorname{ch} \xi_0 C e_n'(\xi_0) - \mu_i \operatorname{sh} \xi_0 C e_n(\xi_0)]}{\mu_e C e_n'(\xi_0) + \mu_i C e_n(\xi_0)}. \quad (33)$$

При исследовании внешней области коэффициенты  $B_{\kappa}$  могут быть определены с учетом (33) из бесконечной системы уравнений для различных  $n$ .

Для случая медного проводника можно считать  $\mu_e = \mu_i = \mu_0$ , тогда

$$D_n = - \dot{H}_0 \frac{j\omega \mu_0 h e^{\xi_0} A_1^{\prime n}}{C e_n'(\xi_0) + C e_n(\xi_0)}, \quad (33)$$

или

$$D_n = - \dot{H}_0 \frac{j\omega \mu_0 (a+b) A_1^{\prime n}}{C e_n'(\xi_0) + C e_n(\xi_0)}. \quad (34)$$

Плотность тока в проводнике

$$\delta = \dot{H}_0 \kappa_1^2 (a + b) \sum_{n=1}^{\infty} A_1'^n \frac{C e_n(\xi) c e_n(\eta)}{C e_n'(\xi_0) + C e_n(\xi)}. \quad (35)$$

Нормальная составляющая напряженности магнитного поля внутри проводника

$$\dot{H}_{\xi_i} = \dot{H}_0 (a + b) \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} A_1'^n \frac{C e_n(\xi) c e_n'(\eta)}{C e_n'(\xi_0) + C e_n(\xi_0)}. \quad (36)$$

Отношение  $\dot{H}_{\xi_i}$  к  $\dot{H}_0$  в точке  $\xi = 0$ ,  $\eta = \frac{\pi}{2}$ , определяющее максимальное ослабление внешнего поля полем вихревых токов,

$$\left[ \frac{\dot{H}_{\xi_i}}{\dot{H}_0} \right]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=\frac{\pi}{2}}}^{\xi_0} = -e^{\xi_0} \sum_{n=1}^{\infty} A_1'^n(q) \frac{C e_n(0, q) c e_n'(\frac{\pi}{2} q)}{C e_n'(\xi_0, q) + C e_n(\xi_0, q)}. \quad (37)$$

Функции Матье, входящие в (37), зависят от  $q$ , что позволяет проанализировать  $\left[ \frac{\dot{H}_{\xi_i}}{\dot{H}_0} \right]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=\frac{\pi}{2}}}^{\xi_0}$  в функции частоты и размеров проводника.

Определим предельные значения  $q$  для медного печатного проводника.

Принимая магнитную проницаемость меди  $\mu_m = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-9} \frac{2H}{сМ}$ , удельную электропроводность  $\gamma_m = 5,6 \cdot 10^5 \frac{1}{ом \cdot см}$  угловую частоту  $\omega = 670 \frac{1}{сек}$  (что соответствует при  $p = 4 \cdot 10^4$  об/мин),  $h \simeq a = 0,1$  см, получим для  $q$  значение

$$q = -j \frac{\omega \mu \gamma h^2}{4} = -j 0,08,$$

т. е. величину весьма малую.

Для малых  $q$  формула (37) может быть значительно упрощена.

Пользуясь разложениями для функций Матье по круговым и гиперболическим функциям [1] (индексы только нечетные),

$$\left. \begin{aligned} C e_n(\xi, q) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa}^n \operatorname{ch} \kappa \xi, \\ c e_n(\eta, q) &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa}^n \cos \kappa \eta, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

выражениями для коэффициентов  $A_{\kappa}^n$  при малых  $q$  ( $r \geq 0$ ,  $m > 0$ )

$$\left. \begin{aligned} A_{m+2r}^m &\simeq (-1)^r \frac{m!}{r!(m+r)!} \left( \frac{q}{4} \right)^r \\ A_{m-2r}^m &\simeq \frac{(m-r-1)!}{r!(m-1)!} \left( \frac{q}{4} \right)^r \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

и учитывая члены со степенью  $\left(\frac{q}{4}\right)$  не выше первой в (37), получим

$$\left[ \frac{\dot{H}_{\xi_i}}{\dot{H}_0} \right]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=\frac{\pi}{2}}} \approx \frac{1 - \frac{q}{4}}{1 - \frac{q}{4} e^{2\xi_0}} - \frac{3}{4} e^{-2\xi_0} \left( \frac{q}{4} \right), \quad (40)$$

$$\xi_0 = \operatorname{Arth} \frac{b}{a}. \quad (41)$$

Из (40) видно, что даже в случае предельного значения  $q = -j0,08$  отношение  $\left[ \frac{\dot{H}_{\xi_i}}{\dot{H}_0} \right]_{\substack{\xi=0 \\ \eta=\frac{\pi}{2}}}$  практически не отличается от 1, т. е. искаже-

ние внешнего поля отсутствует. Это позволяет при расчете потерь на вихревые токи в печатных проводниках машин постоянного тока в отсутствие на якоре стали не считаться с влиянием реакции вихревых токов на основное поле возбуждения машины.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Маку-Лаклан. Теория и приложения функций Матье. ИИЛ, Москва, 1953.