ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 133 1965

О ЗАКОНЕ ОБЪЕМНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Г. А. ДОЩИНСКИЙ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов)

Надежность всякой теории в объяснении различных сторон описываемого явления зависит от обоснованности исходных предпосылок. Приближенность, ограничения и частные условия, лежащие в основе этих предпосылок, не могут не сказаться на возможностях и полноте теории в целом. Данное положение вряд ли нуждается в особых доказательствах. В этой связи остановимся на одном из исходных законов теории упруго-пластической деформации—законе объемной деформации.

Общим для всех существующих теорий пластичности является утверждение о линейной упругости объемной деформации. Соответственно этому устанавливается пропорциональность между шаровыми частями тензоров напряжений и деформаций. Выделение этой зависимости из общей взаимосвязи между тензором напряжений и деформаций иногда именуют первым законом теории пластичности, остальные закономерности пластического деформирования формулируются как соотношения между девиаторами напряжений и деформаций, их компонентами и инвариантами.

Обоснованием указанного закона объемной упругости обычно принимают результаты наблюдения над поведением материалов в условиях всестороннего сжатия, при котором якобы даже довольно высокое гидростатическое давление не приводит к переходу материалов в пластическое состояние. Утверждение, что „изменение объема всегда упруго, как в упругой, так и в пластической области“, прочно вошло в учебники по сопротивлению материалов [6].

Оставляя в стороне не вполне четкое содержание понятия о „переходе в пластическое состояние“ для поликристаллического материала вообще, покажем, что указанное утверждение не есть однозначное заключение, вытекающее из экспериментальных исследований всестороннего сжатия, ставшее, однако, настолько общепривычным, что упускаются при этом иные возможности в объяснении поведения материалов при высоких давлениях.

Как показано А. А. Ильюшиным [5], в условиях простого нагружения, т. е. при возрастании напряжений пропорционально одному параметру, различные теории пластической деформации являются совпадающими с простейшей из них теорией малых упруго-пластических деформаций, причем оказывается возможным представить зависимости между главными компонентами тензора напряжений и деформаций в форме, сходной с выражениями обобщенного закона Гука, но с переменными, зависящими от степени деформации характеристиками упруго-пластического поведения $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ [6], [7], [3],

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_1 - \mu(\lambda)(\sigma_2 + \sigma_3)\right],\\
e_2 &= \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_2 - \mu(\lambda)(\sigma_3 + \sigma_1)\right],\\
e_3 &= \frac{1}{E(\lambda)}\left[\sigma_3 - \mu(\lambda)(\sigma_1 + \sigma_2)\right].
\end{aligned} \tag{1}
$$

Подобное представление предполагает совпадение главных направлений и деформаций, а также пропорциональность между максимальными сдвигами и касательными напряжениями. Эти положения, в свою очередь, достаточно хорошо подтверждаются экспериментальными данными для различных напряженных состояний и различных материалов до развития значительной анизотр пии и потому будем считать приемлемым для дальнейшего использование уравнений (1).

Относительное изменение объема, исходя из элементарных геометрических построений, при исключении малых высокого порядка, как известно, определяется суммой главных удлинений

$$\Theta = e_1 + e_2 + e_3. \tag{2}$$

Используя выражения (1), можно получить

$$\Theta = \frac{3\left[1 - 2\mu(\lambda)\right]}{E(\lambda)}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right). \tag{3}$$

Обозначая $\dfrac{E(\lambda)}{3\left[1 - 2\mu(\lambda)\right]} = K(\lambda)$ для гидростатического давления, приходим к выражению

$$p = K(\lambda)\cdot\Theta, \tag{4}$$

определяющему изменение объема в зависимости от давления.

Принятие закона линейной упругости объемной деформации соответствует утверждению, что величина $K(\lambda)$ равна модулю объемной упругости

$$K(\lambda) = K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \tag{5}$$

с одновременным равенством, характерным для упругой деформации

$$\mu(\lambda) = \mu = \text{const} \quad \text{и} \quad E(\lambda) = E = \text{const},$$

где E и μ — константы упругости материала — модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона. Это возможное, обычно и используемое в основе большинства теорий пластичности решение. Однако такое решение не является единственно возможным.

Величины $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$, характеризующие упруго-пластическое поведение, могут рассматриваться как ограниченно изменяющиеся так, что в данном частном виде нагружения отношение

$$\frac{E(\lambda)}{3\left[1 - 2\mu(\lambda)\right]}$$

в целом может оставаться и постоянным или слабо изменяющимся. Из одного уравнения

$$\frac{E(\lambda)}{3\left[1 - 2\mu(\lambda)\right]} = K$$

две величины $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ однозначно не могут быть определены.

Однозначного заключения не позволяет сделать и опыт. В опыте с всесторонним равномерным давлением измеряемыми величинами могут быть лишь давление и объем. Поэтому достоверным (точнее приближенным) экспериментальным фактом может считаться лишь то, что $K(\lambda)=\dfrac{p}{\Theta}=K$ и только. Одновременного постоянства $\mu(\lambda)=\mu$ и $E(\lambda)=E$ при этом опыт определенно не может утверждать, ибо измерения $\mu(\lambda)$ возможны лишь при наличии разности между компонентами относительной деформации: $e_1; e_2; e_3$, которой, однако, в данных условиях не наблюдается (это видно и из уравнений (1), подставляя в которые $e_1=e_2=e_3=e$ и приравнивая правые части, придем лишь к тождеству $\mu(\lambda)\equiv\mu(\lambda)$ (6).

Следует отвести и всякий косвенный способ измерения величины $\mu(\lambda)$ в этих условиях (рентгенографический и т. п.), ибо всякий косвенный способ основан на соответствии изучаемой величины и косвенной. Если изучаемая величина (как, например, коэффициент поперечной деформации, определяемый отношением непосредственно измеряемых макродеформаций) утрачивает в некоторых условиях принципиальную возможность ее определения, то то же должно случиться и с косвенной характеристикой, в противном случае полное соответствие будет сомнительным.

Оставляя в стороне другие формально возможные варианты, отметим некоторые возможности предлагаемого решения

$$\frac{E(\lambda)}{3[1-2\mu(\lambda)]}\approx K \text{ при } \mu(\lambda)\neq \text{const и } E(\lambda)\neq \text{const}.$$

Из такого решения, прежде всего, вытекает возможность иного (на наш взгляд, более естественного) объяснения поведения материалов в условиях всестороннего равномерного давления. Этот вид загружения может и не рассматриваться как какой-то исключительно особый, для которого материалы, обладающие определенными упругими и пластическими качествами, как бы „перерождаются“ и становятся только упругими при гидростатическом давлении. Упруго-пластическая деформация, одинаковая по характеру, определяемая величинами $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ для любых напряженных состояний, в условиях гидростатического давления, как частной возможности нагружения с равенством напряжений, вследствие ограниченной изменяемости характеристик $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ будет лишь за пределами упругости показывать соотношение между давлением и объемом, мало отличающееся от этого соотношения при упругой деформации. Это отношение, как и всякое математическое соотношение без дополнительных пояснений, может определять лишь количественную сторону явления.

Равенство $E(\lambda)=E=\text{const}$ и $\mu(\lambda)=\mu=\text{const}$ при $K(\lambda)=K=\text{const}$, очевидно, может быть принято в равной мере для всех напряженных состояний (в том числе и для гидростатического давления) при разгрузке, если последнюю считать следующей закономерностям упругости. При этом, если учесть, что опыт указывает лишь на приближенное равенство

$$\frac{E(\lambda)}{3[1-2\mu(\lambda)]}\approx K, \tag{8}$$

то это делает возможным определение остаточной объемной деформации, отмечаемой экспериментально у реальных материалов, в частности у пеноматериалов и др., и даже у металлов, хотя и в незначительных размерах [1], [2]. Такая деформация возможна в действительности, но если исходить из закона объемной линейно упругой деформируемости, ее не должно бы быть.

Измеряемые в исходном опыте на растяжение (сжатие) величины $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$, соответствующие текущим значениям секущего модуля $E(\lambda) = \frac{\sigma}{e}$ и коэффициента полной поперечной деформации $\mu(\lambda) = \frac{e_{\text{попер.}}}{e_{\text{прод.}}}$, позволяют предсказывать поведение материала при высоких давлениях, экспериментальная реализация которых связана с трудностями. При этом самостоятельность изменения характеристик $E(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$ делает величину $K(\lambda)$ несколько отличной от постоянного значения K. Это допускает, в свою очередь, некоторую нелинейность закона объемной деформации, что согласуется с многочисленными исследованиями П. Бриджмена [1] при высоких давлениях, установившего, что зависимость между относительным изменением объема и давлением точнее соответствует уравнению

$$\Theta = ap - bp^2, \tag{9}$$

где a и b экспериментальные константы материала, чем линейной зависимости

$$\Theta = \frac{1}{K} \cdot p. \tag{10}$$

Из тождества (6) следует, что закон объемной деформации оказывается тождественным системе уравнений (1), написанной для гидростатического давления. Это указывает на возможность исключения закона объемной деформации как самостоятельного закона теории упруго-пластической деформации. Подобное исключение, разумеется, будет правомерным лишь в том случае, если сам вывод уравнений (1) получен не на базе исходного постулирования закона объемной линейной упругости. Большинство же теорий пластичности (в том числе деформационная теория Генки—Надаи—Ильюшина и др.) приходит к форме уравнений (1) через посредство предварительного допущения об объемной линейно упругой деформируемости.

Однако в принципе для получения выражений связи между главными напряжениями и деформациями в форме (1), по-видимому, достаточно предположений о совпадении главных направлений для напряжений и деформаций и о существовании изотропного эффекта поперечной деформации. К форме уравнений (1) без предварительного постулирования линейной упругости объемной деформации можно прийти, в частности, следующим образом.

Если представить зависимость между бесконечно малыми приращениями напряжений и деформаций в виде линейных функций (что является вполне допустимым в теории бесконечно малых), то интегрирование по параметру нагружения для простого нагружения изотропного материала приводит к уравнениям (1). Подобным образом эти уравнения получены в работах [7], [3].

В теории упруго-пластической деформации автора [3], [4], исходящей из предположения о существовании общего закона, связывающего любое напряженное и деформированное состояние изотропного тела зависимостью (11)

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{4\mu(\lambda) - 2\mu(\lambda)^2}{1 + 2\mu(\lambda)^2}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)} =$$
$$= E(\lambda) \cdot \sqrt{\frac{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}{1 + 2\mu(\lambda)^2}},$$

закон объемной деформации вытекает как частное значение выражения (11), написанного для случая гидростатического давления [4], а не является отдельной самостоятельной закономерностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Бриджмен. Физика высоких давлений. ОНТИ, 1935.
2. Н. Н. Давиденков, Д. М. Васильев. О коэффициенте поперечной деформации. Заводская лаборатория, № 5, 1952.
3. Г. А. Дощинский. К теории упруго-пластической деформации. Известия ТПИ, т. 85, 1957.
4. Г. А. Дощинский. Общий закон связи между напряжениями и деформациями. Известия ТПИ, т. 114, 1963.
5. А. А. Ильюшин. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
6. Ю. Н. Работнов. Сопротивление материалов. Издание МГУ, 1950.
7. А. Р. Ржаницын. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М., 1954.