

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СТРУЖКЕ

М. Ф. ПОЛЕТИКА

(Представлена профессором доктором А. М. Розенбергом)

На рис. 1 показана схема взаимодействия резца, стружки и обрабатываемой детали. Резец, перемещаясь со скоростью  $v$  относительно обрабатываемой детали, срезает слой толщиной „а“ и превращает его в стружку. Стружка непрерывно сходит по резцу, касаясь его на участке  $DB$ , длину которого обозначим через  $s$ , назвав ее длиной контакта.

Схема на рис. 1 относится к частному, но наиболее распространенному в современных производственных условиях случаю возникновения сливной стружки без заметного наростообразования. При постоянной скорости резания  $v$  и неизменных по объему свойствах обрабатываемого материала процесс образования сливной стружки характеризуется чрезвычайно высокой стабильностью во времени, причем постоянной сохраняется и картина силового взаимодействия между резцом стружки и обрабатываемой деталью. Уровень практически применяемых скоростей резания таков, что массовые силы, вызванные тем ускорением, которое получает стружка относительно обрабатываемой детали в процессе деформации, ничтожно мал. Все это дает основание рассматривать процесс образования сливной стружки как статическую задачу.

Экспериментальное исследование зоны деформации при образовании сливной стружки показывает, что правая граница этой зоны ( $AD$  на рис. 1) с достаточно высокой степенью приближения может считаться плоскостью, и, следовательно, линия  $AD$ —прямая. При отсутствии нароста объем зоны вторичной пластической деформации в стружке невелик. Основной объем стружки занят материалом, уже претерпевшим пластическую деформацию и находящимся в упругом напряженном состоянии.

Это означает, что стружку вместе с обрабатываемой деталью можно рассматривать как упруго напряженное тело. На это тело справа давит другое упругое тело—резец, и так как стружка в некоторой точке  $B$  обязательно отходит от поверхности резца, то площадь их контакта ограничена. Все это позволяет свести задачу о взаимодействии резца со стружкой к контактной задаче теории упругости.

В условиях прямоугольного свободного резания третье главное напряжение в зоне резания, действующее перпендикулярно плоскости чертежа на рис. 1, относительно невелико, что нетрудно показать экспериментально. Это позволяет принять в качестве первого прибли-

жения, что напряженное состояние в зоне резания—плоское. Следовательно, задача о взаимодействии резца со стружкой является плоской задачей и может быть решена методами плоской теории упругости.

Так как модуль упругости инструментального материала обычно в несколько раз превышает модуль упругости обрабатываемого материала, то ошибка будет невелика, если считать резец жестким (абсолютно твердым). Материал в зоне резания будем считать упругим и изотропным. Строго говоря, это неверно, так как стружка имеет четко выраженную текстуру, но в качестве первого приближения вполне допустимо.

При такой постановке мы получим задачу о контакте жесткого профиля с упругой полуплоскостью. Наиболее эффективные решения

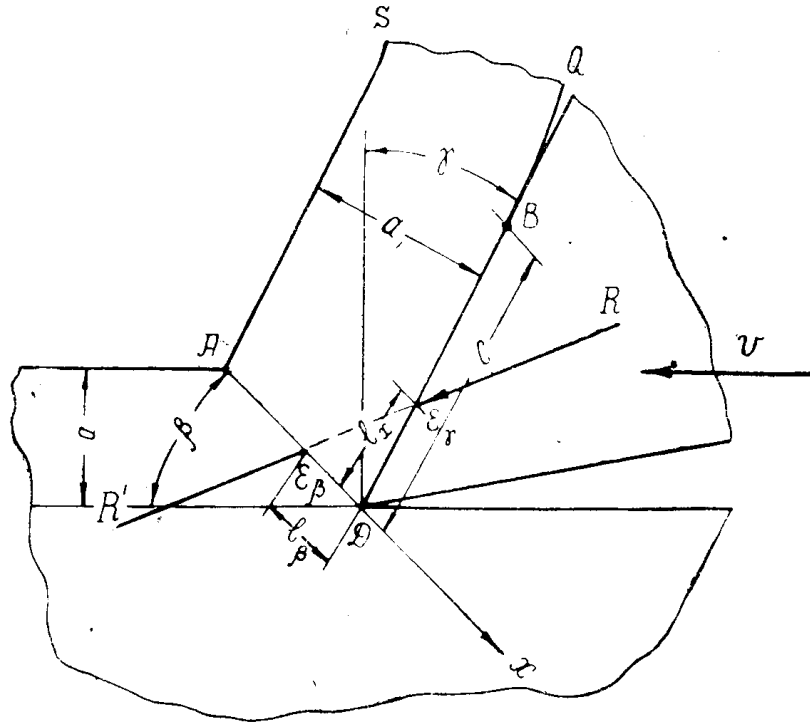


Рис. 1.

этих задач обеспечиваются методами функций комплексного переменного, которыми мы в дальнейшем и будем пользоваться.

Форма зоны резания как упругой области сложна (рис. 1), и решение поставленной задачи в общем виде встречается с математическими затруднениями. Поэтому ниже рассматривается частный случай, когда передний угол равен нулю. На рис. 2 в плоскости комплексного переменного  $z = x + iy$  изображена соответствующая схема контакта жесткого профиля—резца с упругим телом—зоной резания.

Сила, прижимающая резец к упругой области, приложена не по середине длины  $C$  его контакта со стружкой, а ближе к вершине резца. Это дает основание рассматривать резец как несимметрично нагруженный штамп, один из краев которого (точка  $B$ ) так сопрягается с упругой областью, что контактное давление в этой точке равно нулю.

Как известно, основные уравнения плоской теории упругости, характеризующие напряженное состояние тела, сводятся к следующим:

$$\varepsilon_y - i\varepsilon_{xy} = \Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} + z\overline{\Phi_0'(z)} + \overline{\Psi_0(z)}, \quad (1)$$

$$2\mu(u_0 - iv_0) = z\varphi_0(z) - \overline{z\Phi_0(z)} - \overline{\psi_0(z)}. \quad (2)$$

где  $\tau_{xy}, \tau_{yx}$  — компоненты напряжения в исследуемой упругой области, то есть в области *ТОСЛАД*;

$u_0, v_0$  — компоненты перемещения в этой области ( $u_0$  — в направлении оси  $x$ ,  $v_0$  — в направлении оси  $y$ );

$\varphi_0(z), \psi_0(z), \Phi_0(z), \Psi_0(z)$  — функции комплексного переменного  $z$ , голоморфные в указанной области, причем

$$\Phi_0(z) = \varphi_0'(z) \quad \text{и} \quad \Psi_0(z) = \psi_0'(z),$$

и, наконец,

$G, \kappa$  — упругие постоянные, определяемые по формулам, где  $E$  — модуль упругости,

$\nu$  — коэффициент Пуассона.

Примем, что напряжения исчезают на бесконечности и обусло-

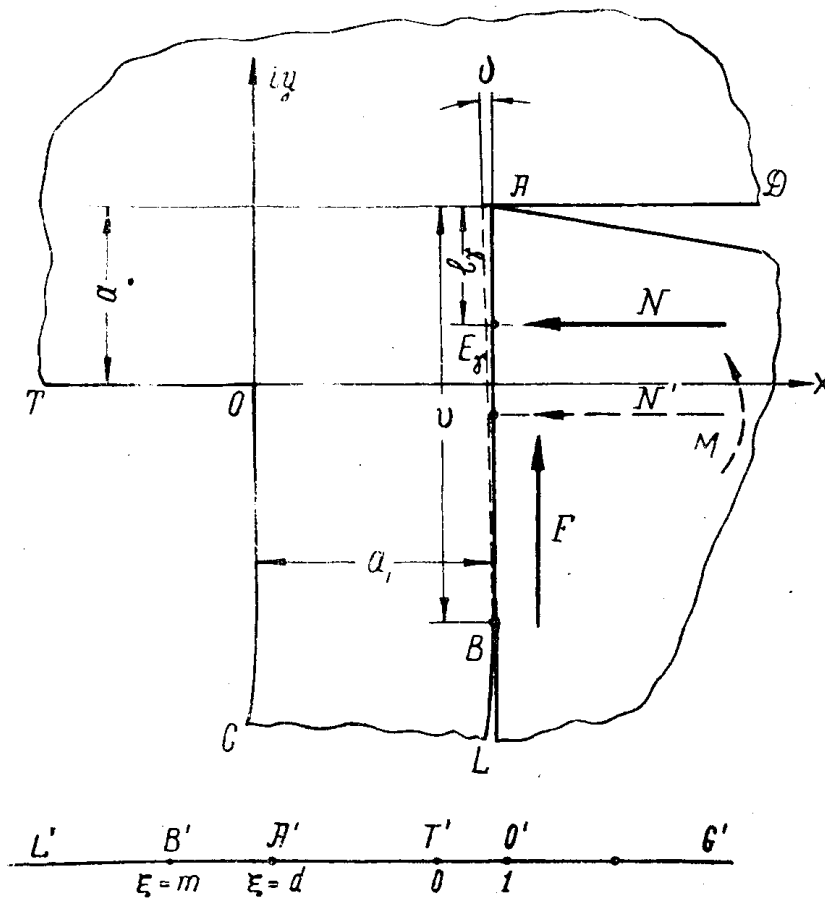


Рис. 2,

вим поведение функций  $\Phi_0(z), \Psi_0(z)$  в бесконечно удаленной точке следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0(z) &= \frac{C_1}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right), \\ \Psi_0(z) &= \frac{C_2}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Основание резца-штампа согласно рис. 2 является прямой линией и его уравнение имеет вид

$$x = -\rho y + \text{const},$$

где  $\rho$  — угловое смещение штампа.

Тем самым граничное условие для горизонтальных смещений будет определено следующим образом;

$$u_0 = -\rho y + \text{const}. \quad (5)$$

Если обозначить контактное давление через  $p(x)$ , то напряжения на участке  $AB$  под резцом будут выражаться:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -p(x) \\ \tau_{xy} &= \nu p(x) \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

где

$$\nu = \frac{F}{N} \quad (7)$$

коэффициент трения стружки о резец принимается одинаковым во всех точках длины контакта.

На остальных участках границы исследуемой упругой области будет иметь место

$$\text{на } OG \text{ и } BL : \sigma_x = 0; \tau_{xy} = 0;$$

$$\text{на } OT \text{ и } AD : \sigma_y = 0; \tau_{xy} = 0.$$

В качестве метода решения поставленной задачи используем конформное отображение верхней полуплоскости  $s = \xi + i\eta$  на исследуемую область. Прямоугольные координаты  $\xi$  и  $\eta$  полуплоскости преобразуются при этом в криволинейные ортогональные координаты внутри исследуемой области, и, выражая через них функции комплексного переменного, стоящие в правых частях уравнений (1) и (2), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(z) &= \varphi_0[\omega(s)] = \varphi(s), \\ \psi_0(z) &= \psi_0[\omega(s)] = \psi(s), \\ \Phi_0(z) &= \Phi_0[\omega(s)] = \Phi(s), \\ \Psi_0(z) &= \Psi_0[\omega(s)] = \Psi(s), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $z = \omega(s)$  — функция, с помощью которой осуществляется отображение. Кроме того, из (8) также следует

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(s) &= \omega'(s) \Phi(s), \\ \psi'(s) &= \omega'(s) \Psi(s). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Сами уравнения (1) и (2) после перехода к криволинейным координатам  $\xi$  и  $\eta$  получают вид

$$\sigma_\eta - i\tau_{\xi\eta} = \Phi(s) - \overline{\Phi(s)} + \frac{\omega(s)}{\omega'(s)} \overline{\Phi'(s)} + \frac{\overline{\omega'(s)}}{\omega'(s)} \overline{\psi(s)}; \quad (10)$$

$$2\nu(u + iv) = \frac{\overline{\omega'(s)}}{|\omega'(s)|} [x\varphi(s) - \omega(s)\overline{\Phi(s)} - \overline{\psi(s)}]. \quad (11)$$

Исследуемая упругая область  $TOGLAD$  представляет собой четырехугольник, две вершины которого лежат в бесконечно удаленной точ-

ке. Конформное отображение верхней полуплоскости на область такого вида осуществляется функцией

$$z = \omega(s) = \frac{a_1}{\pi i} \int_1^s \sqrt{(s-1)(s-d)} \frac{ds}{s^2}, \quad (12)$$

$$\omega'(s) = \frac{a_1}{\pi i} \cdot \frac{\sqrt{(s-1)(s-d)}}{s^2}. \quad (13)$$

Согласно рис. 2 вершине реза в преобразованной области будет соответствовать точка  $A'(\xi = 1)$ , а точке  $B$  отрыва стружки от реза — точка  $B'(\xi = m)$ . Ориентация загруженного участка  $A'B'$  относительно новых осей координат будет уже иной, и, следовательно, вместо (6) получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= p(s), \\ \tau_{\xi} &= \nu p(s), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $p(s)$  — контактное давление, выраженное через новое перемещенное  $s$ .

Чтобы преобразовать граничное условие (5) для перемещений, учтем, что ось  $\xi$ , как легко видеть из рис. 2, при отображении поворачивается против часовой стрелки на угол  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , что равносильно умножению на  $(-i)$ :

$$u + iv = -i(u_0 + iv_0) = v_0 - iu_0,$$

откуда вытекает, что

$$u = v_0, \quad v = -u_0,$$

и, следовательно, условие (5) принимает вид

$$v = \rho \xi + \text{const.} \quad (15)$$

Для дальнейших выкладок воспользуемся уравнением (10), придав ему такую форму:

$$\begin{aligned} (\tau_{\xi} - i\tau_{\eta}) \omega'(s) &= \omega'(s) \Phi(s) + \overline{\omega'(s) \Phi(s)} + \\ &+ \omega(s) \overline{\Phi'(s)} + \overline{\omega'(s) \Psi(s)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Поставим задачей выразить через граничные условия (14), (15) функцию  $\omega'(s) \Phi(s)$ . Согласно (13) эта функция определена в верхней полуплоскости и голоморфна в ней за исключением точки  $O'(s=0)$ , где она имеет полюс. Указанная точка является образом бесконечно удаленной точки плоскости  $z = x + iy$ . Поэтому для оценки поведения функции  $\omega'(s) \Phi(s)$  вблизи точки  $O'$ , то есть при  $s \rightarrow 0$ , мы должны воспользоваться формулой (4), которая приводит к следующему условию:

$$[\omega'(s) \Phi(s)]_{s \rightarrow 0} = -\frac{\Gamma}{s^2} + \frac{C}{s} + O(1), \quad (17)$$

где  $O(1)$  — функция, голоморфная при  $s \rightarrow 0$ .

Аналитически продолжая функцию  $\omega'(s) \Phi(s)$  в нижнюю полуплоскость через незагруженные участки границы, можно выразить через нее функцию  $\overline{\omega'(s) \Psi(s)}$  следующим образом:

$$\overline{\omega'(s) \Psi(s)} = -\overline{\omega'(s) \Phi(s)} - \overline{\omega'(s) \overline{\Phi(s)}} - \omega(s) \overline{\Phi'(s)}. \quad (18)$$

Подстановка выражения (18) в равенство (16) дает

$$\begin{aligned} (\sigma_{\tau} - i\tau_{\xi\tau}) \omega'(s) &= \omega'(s) \Phi(s) - \omega'(\bar{s}) \Phi(\bar{s}) + \\ &+ [\omega'(s) - \omega'(\bar{s})] \overline{\Phi(s)} + [\omega(s) - \omega(\bar{s})] \overline{\Phi'(s)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Так как  $\left[ \frac{\omega'(s)}{|\omega'(s)|} \right]' = 0$ , то уравнение (11) после дифференцирования и аналогичных преобразований может быть приведено к виду:

$$\begin{aligned} 2 G(u' + iv') &= \frac{\omega'(s)}{|\omega'(s)|} \left\{ x\omega'(s) \Phi(s) + \omega'(\bar{s}) \Phi(\bar{s}) + \right. \\ &+ [\omega'(\bar{s}) - \omega'(s)] \overline{\Phi(s)} + [\omega(\bar{s}) - \omega(s)] \overline{\Phi'(s)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Чтобы воспользоваться теперь граничными условиями, нужно применить уравнения (19) и (20) к точкам, расположенным на контуре, то есть на действительной оси ( $\tau = 0, s = \xi$ ). Сделав это, получим:

$$(\sigma_{\tau} - i\tau_{\xi\tau})_{\tau=0} = \Phi(s) - \Phi(\bar{s}), \quad (21)$$

$$[2G(u' + iv')]_{\tau=0} = i [x\omega'(s) \Phi(s) + \omega'(\bar{s}) \Phi(\bar{s})]. \quad (22)$$

Первое из этих равенств после перехода в правой его части к предельным значениям функций и применения в левой его части условий (14) примет вид

$$(1 - i\mu) p(s) = \Phi^+(\xi) = \Phi^-(\xi), \quad (23)$$

что может быть преобразовано так:

$$\Phi^-(\xi) = - \frac{1 + i\mu}{1 - i\mu} \Phi(s). \quad (24)$$

Далее, складывая уравнение (22) с другим, полученным из него переходом к сопряженным значениям функций, будем иметь

$$x\omega'(\bar{s}) \Phi(\bar{s}) + \omega'(\bar{s}) \Phi(\bar{s}) + \overline{\omega'(\bar{s}) \Phi(\bar{s})} + \omega'(s) \overline{\Phi(s)}. \quad (25)$$

Наконец, переходя в равенствах (24) и (25) к предельным значениям функций и решая их совместно, мы после некоторых преобразований и применения граничного условия (15) получим

$$\begin{aligned} \left( x + \frac{1 + i\mu}{1 - i\mu} \right) \omega'(\xi) \Phi^+(\xi) + \left( 1 + \right. \\ \left. + x \frac{1 + i\mu}{1 - i\mu} \right) \omega'(\xi) \Phi^-(\xi) = -4G\rho\omega'(\xi) \end{aligned}$$

или

$$[\omega'(\xi) \Phi(\xi)]^+ - g [\omega'(\xi) \Phi(\xi)]^- = f(\xi), \quad (26)$$

где

$$g = - \frac{1 + x \frac{1 + i\mu}{1 - i\mu}}{x + \frac{1 + i\mu}{1 - i\mu}} = - \frac{1 + i \operatorname{tg} \pi x}{1 - i \operatorname{tg} \pi x} = - e^{2\pi i x}, \quad (27)$$

$$f(\xi) = - \frac{4G\rho\omega'(\xi)}{x + \frac{1 + i\mu}{1 - i\mu}} = - \frac{4G\rho(1 - i\mu)\omega'(\xi) \cos \pi a e^{\pi i a}}{x + 1}, \quad (28)$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \mu \frac{x+1}{x-1}. \quad (29)$$

Уравнение (26) представляет собой формулировку так называемой задачи линейного сопряжения. Решение этой задачи дается формулой

$$\omega'(s) \Phi(s) = \frac{X(s)}{2\pi i} \int_m^{d_0} \frac{f(\xi) d\xi}{X^+(\xi)(\xi-s)} + R(s) X(s), \quad (30)$$

где  $X(s)$  — решение однородной задачи линейного сопряжения

$$X^+(\xi) - gX^-(\xi) = 0, \quad (31)$$

$R(s)$  — рациональная функция.

Форму решения однородной задачи линейного сопряжения берем в виде

$$X(s) = (s-m)^{-\gamma}(s-d_0)^{\gamma-1},$$

где

$$\gamma = \frac{\ln g}{2\pi i} = \frac{\ln(-e^{2\pi i \alpha})}{2\pi i} = \frac{1}{2} + \alpha \quad (32)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} X(s) &= (s-m)^{-\frac{1}{2}-\alpha} (s-d_0)^{-\frac{1}{2}+\alpha} = \\ &= \frac{1}{(s-m)^{\frac{1}{2}+\alpha} (s-d_0)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \end{aligned} \quad (33)$$

и

$$X^+(\xi) = X(\xi) = \frac{1}{(\xi-m)^{\frac{1}{2}+\alpha} (\xi-d_0)^{\frac{1}{2}-\alpha}}, \quad (34)$$

Рациональную функцию  $R(s)$  определим в соответствии с условиями (17), налагаемыми на функцию  $\omega'(s)\Phi(s)$ , следующим образом:

$$R(s) = \frac{D_1}{s^2} + \frac{D_2}{s}. \quad (35)$$

Если теперь формулу (28) представить так:

$$f(\xi) = A \omega'(\xi) \quad (36)$$

и произвести соответствующую подстановку в уравнении (30), то это последнее с учетом (35) запишется

$$\omega'(s) \Phi(s) = \frac{AX(s)}{2\pi i} \int_m^{d_0} \frac{\omega'(\xi) d\xi}{X^+(\xi)(\xi-s)} + \left( \frac{D_1}{s^2} + \frac{D_2}{s} \right) X(s). \quad (37)$$

В соответствии с выражениями (13) и (34) интеграл, входящий в формулу (37), имеет вид

$$I = \frac{a_1}{\pi i} \int_m^{d_0} \frac{V(\xi-1) (\xi-d_0)(\xi-m)^{\frac{1}{2}+\alpha} (\xi-d_0)^{\frac{1}{2}-\alpha} d\xi}{\xi^2 (\xi-s)}. \quad (38)$$

Интеграл (38) в элементарных функциях не вычисляется. Поэтому, оставляя выражение решения задачи через данный интеграл

предметом дальнейших исследований, мы ниже рассматриваем только частный случай, когда  $\psi = 0$ .

При этом допущении формулы (29), (32), (33) и (34) упрощаются и принимают вид

$$\alpha = 0; \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad g = -1; \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{V(s-d_0)(s-1)}, \\ X^+(\xi) = X(\xi) &= \frac{1}{V(\xi-d_0)(\xi-1)}, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

а интеграл (38) преобразуется следующим образом:

$$I = \frac{a_1}{\pi i} \int_m^{d_0} \frac{V(\xi-1)(\xi-m)(\xi-d_0)}{\xi^2(\xi-s)} d\xi. \quad (41)$$

Вычисление интеграла (41) производится элементарными приемами с помощью подстановки

$$q = \sqrt{\frac{\xi-1}{\xi-m}},$$

которая после громоздких преобразований и вычислений приводит к такому окончательному выражению:

$$\begin{aligned} I &= A_1 + \frac{A_2}{s} + \frac{A_3(d_0 - d_0s - s)}{s^2} + \\ &+ \frac{(s-d_0)V(m-s)(s-1)}{s^2} \left[ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1-d_0)(s-m)}{d_0-m}} - \pi \right], \end{aligned} \quad (42)$$

в котором значения постоянных коэффициентов  $A_{1,2,3}$  даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1}{\pi} \left( 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-d_0}{d_0-m}} - \pi \right); \\ A_2 &= -\frac{a_1}{\pi} \left[ \sqrt{(1-d_0)(d_0-m)} + \right. \\ &+ \left. \frac{d_0(m-1)}{2\sqrt{-m}} \ln \frac{\sqrt{m(d_0-1)} + \sqrt{d_0-m}}{\sqrt{m(d_0-1)} - \sqrt{d_0-m}} \right]; \\ A_3 &= \frac{a_1\sqrt{-m}}{\pi} \ln \frac{\sqrt{m(d_0-1)} + \sqrt{d_0-m}}{\sqrt{m(d_0-1)} - \sqrt{d_0-m}}; \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Подставляя полученное выражение (42) в уравнение (37), будем иметь

$$\begin{aligned} \omega'(s)\Phi(s) &= \frac{AA_1X(s)}{2\pi i} + \frac{AA_2X(s)}{2\pi is} + \frac{AA_3(d_0 - d_0s - s)X(s)}{2\pi is^2} + \\ &+ \frac{A(s-d_0)V(m-s)(s-1)}{2\pi is^2} \left[ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1-d_0)(s-m)}{d_0-m}} - \pi \right] \times \end{aligned}$$



$$\times X(s) + \left( \frac{D_1}{s^2} + \frac{D_2}{s} \right) X(s). \quad (44)$$

Для определения постоянных  $D_{1,2}$  воспользуемся соотношением (17), оценивающим поведение функции  $\omega'(s)\Phi(s)$  в окрестности точки  $s=0$ . Нетрудно показать, что функция  $X(s)$  вблизи этой точки представляется рядом

$$\begin{aligned} |X(s)_{s \rightarrow 0} &= [(s-d_0)(s-m)]_{s \rightarrow 0}^{-\frac{1}{2}} = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{md_0}} - \frac{(m+d_0)s}{2md_0\sqrt{md_0}} - \frac{(3d_0^2 + 2md_0 + 3m^2)s^2}{8m^2d_0^2\sqrt{md_0}} + \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Поэтому главная часть полюса функции  $\omega'(s)\Phi(s)$  согласно (44) и (45) определится выражением

$$\frac{D_1 a_0}{s^2} + \frac{D_1 a_1 + D_2 a_0}{s} = -\frac{D_1}{\sqrt{md_0} s^2} - \frac{(m+d_0)D_1 + 2md_0 D_2}{2md_0 \sqrt{md_0}} \quad (46)$$

и из сопоставления (46) и (17) будет следовать

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \sqrt{md_0} \cdot \Gamma, \\ (m+d_0)D_1 + 2md_0 D_2 &= -2Cm d_0 \sqrt{md_0}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Постоянная  $\Gamma$  пропорциональна значению напряжения в бесконечно удаленной точке. Нами было принято, что напряжения на бесконечности исчезают. Следовательно, должно быть:  $\Gamma=0$  и тогда уравнения (47) дают:

$$D_1 = 0,$$

$$D_2 = -C \sqrt{md_0},$$

а подстановка вычисленных значений постоянных в уравнение (44) преобразует его к виду:

$$\begin{aligned} \omega'(s)\Phi(s) &= \frac{AA_1 X(s)}{2\pi i} + \frac{AA_2 X(s)}{2\pi i s} + \\ &+ \frac{AA_3(d_0 - d_0 s - s) X(s)}{2\pi i s^2} + \frac{A(s-d_0)\sqrt{(m-s)(s-1)} f_1(s) X(s)}{2\pi i s^2} - \\ &- \frac{C\sqrt{md_0} X(s)}{s}. \end{aligned} \quad (48)$$

Замена

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{(1-d_0)(s-m)}{d_0-m}} - \pi = f_1(s) \quad (49)$$

введена для сокращения записи.

Функция  $\Phi(s)$  на основании (13) и (48) выразится

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{AA_1 X(s) s^2}{2a_1 \sqrt{(s-d_0)(s-1)}} + \frac{AA_2 X(s) s}{2a_1 \sqrt{(s-d_0)(s-1)}} + \\ &+ \frac{AA_3(d_0 - d_0 s - s) X(s)}{2a_1 \sqrt{(s-d_0)(s-1)}} + \frac{\pi i A_1 \sqrt{(s-d_0)(m-s)} f_1(s) X(s)}{2a_1 s^2} - \\ &- \frac{\pi i C \sqrt{md_0} s X(s)}{a_1 \sqrt{(s-d_0)(s-1)}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Напомним, что в постоянную  $A$  согласно (28) и (36) входит неизвестная величина  $\rho$  упругого поворота резца-штампа. Чтобы исключить  $A$  из уравнения (50) потребуем, чтобы функция  $\Phi(s)$  была ограниченной в точке  $s = m$ . Для этого приравняем к нулю коэффициент при  $(s - m)^{-\frac{1}{2}}$  в правой части равенства (50), положив предварительно  $s = m$ .

Нетрудно убедиться, что, выполнив эту операцию, мы придем к выражению

$$\frac{AA_1 m^2}{2} + \frac{AA_2 m}{2} + \frac{AA_3(d_0 - md_0 - m)}{2} - \pi i C m \sqrt{md_0} = 0,$$

из которого находим постоянную  $A$ :

$$A = \frac{2\pi i C m \sqrt{md_0}}{A_1 m^2 + A_2 m + A_3(d_0 - md_0 - m)}. \quad (51)$$

Для определения контактного давления  $p(\xi)$  перейдем в уравнении (50) к предельным значениям функции  $\Phi(s)$  при стремлении  $s$  к  $\xi$  сначала из верхней, а затем из нижней полуплоскости. С учетом (39) разность предельных значений будет равна:

$$\begin{aligned} p(\xi) = \Phi^+(\xi) - \Phi^-(\xi) = & \frac{AA_1 \xi^2 X(\xi)}{a_1 \sqrt{(\xi - d_0)(\xi - 1)}} + \\ & + \frac{AA_1 \xi X(\xi)}{a_1 \sqrt{(\xi - d_0)(\xi - 1)}} + \frac{AA_3(d_0 - d_0 \xi - \xi) X(\xi)}{a_1 \sqrt{(\xi - d_0)(\xi - 1)}} - \\ & - \frac{2\pi i C \sqrt{md_0} \xi X(\xi)}{a_1 \sqrt{(\xi - d_0)(\xi - 1)}}. \end{aligned} \quad (52)$$

Если теперь в полученном равенстве заменить  $A$  согласно (51), то после элементарных преобразований приходим к следующей формуле:

$$p(\xi) = \frac{2\pi C \sqrt{md_0} (A_1 m \xi - A_3 d_0) \sqrt{\xi - m}}{a_1 D (d_0 - \xi) \sqrt{1 - \xi}}, \quad (53)$$

где

$$D = A_1 m^2 + A_2 m + A_3 (d_0 - md_0 - m). \quad (54)$$

Для вычисления постоянной  $C$  воспользуемся тем очевидным обстоятельством, что интегральная сумма контактных давлений на длине контакта должна быть равна действующей на резец нормальной силе  $N$ . В исходной области ( $z = x + iy$ ) это условие при обозначениях рис. 2 выразится

$$\int_{a-c}^a p(y) dy = N. \quad (55)$$

Так как  $p(y) = p(\xi)$ , а из того же рис. 2 вытекает

$$a_1 + iy = \omega(\xi),$$

откуда

$$idy = \omega'(\xi) d\xi,$$

то, делая соответствующие подстановки в выражении (55) и меняя

должным образом пределы интегрирования, получим в преобразованной области

$$\int_m^{d_0} p(\xi) \omega'(\xi) d\xi = iN \quad (56)$$

или с учетом (53) и (54)

$$\frac{2CV\sqrt{md_0}}{D} \int_m^{d_0} \frac{(A_1 m \xi - A_3 d_0) \sqrt{\xi - m}}{\xi^2 \sqrt{d_0 - \xi}} d\xi = -N. \quad (57)$$

Интеграл в последнем уравнении вычисляется элементарными приемами и приводит к выражению

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_m^{d_0} \frac{(A_1 m \xi - A_3 d_0) \sqrt{\xi - m}}{\xi^2 \sqrt{d_0 - \xi}} d\xi = \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{md_0}} \left[ 2mA_1(\sqrt{md_0} - m) + A_3(m - d_0) \right]. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в равенство (57), находим значение постоянной  $C$

$$C = \frac{DN}{\pi[2mA_1(\sqrt{md_0} - m) + A_3(m - d_0)]}, \quad (58)$$

с учетом которого формула (53) приобретает вид:

$$p(y) = p(\xi) = - \frac{2NV\sqrt{md_0}(A_1 m \xi - A_3 d_0) \sqrt{\xi - m}}{a_1[2mA_1(\sqrt{md_0} - m) + A_3(m - d_0)] \sqrt{1 - \xi}}. \quad (59)$$

Подставляя (40), (51), (54) и (58) в уравнение (50), получим окончательное выражение для функции напряжений;

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{NV\sqrt{md_0} [A_1 ms^2 + A_2 ms + A_3 m(d_0 - ds - s) - D]}{\pi[2mA_1(\sqrt{md_0} - m) + A_3(m - d)] (s - d_0) \sqrt{(s-1)(s-m)}} + \\ &+ \frac{Nm\sqrt{md_0}(m-s) f_1(s)}{\pi[2mA_1(\sqrt{md_0} - m) + A_3(m - d_0)] s^2 \sqrt{s-1}}. \end{aligned} \quad (60)$$

Напомним, что постоянные  $A_{1,2,3}$ , входящие в равенство (59) и (60), вычисляются по формулам (43), а функция  $f_1(s)$  определяется выражением (49).

На основании формулы (60) и уравнения (18) может быть получено выражение для функции  $\Psi(s)$ , что позволяет с помощью соотношения (10) и ему аналогичных, а также с помощью представления (12) отображающей функции вычислять компоненты напряжения во всех точках исследуемой упругой области. Соответствующие формулы из-за их громоздкости мы не приводим.

Для вычисления контактных давлений достаточно располагать формулой (59) и выражением (12), которое для точек, лежащих на оси  $\xi$ , имеет вид:

$$y = a + \frac{a\zeta}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{(1-\xi)(d_0-\xi)}}{\xi} + \frac{2}{\zeta} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{d_0-\xi}{d_0(\xi-1)}} - \right]$$

$$- \ln \frac{\sqrt{1-\xi} + \sqrt{d_0-\xi}}{\sqrt{1-\xi} - \sqrt{d_0-\xi}} \Big], \quad (61)$$

где  $a$  — толщина среза (рис. 2),

$\zeta$  — усадка стружки;

$d_0$  определяется формулой.

$$d_0 = - \left( \frac{1 - \sqrt{1 + \zeta^2}}{\zeta} \right)^2.$$

---