

следования теоретической точности работы механизмов третьей группы. Эти результаты могут быть использованы также и для выявления точности работы копировальных приспособлений, принцип действия которых аналогичен рассматриваемым механизмам.

В соответствии с принятой нами классификацией к третьей группе механизмов относятся: 1. Циркуль для вычерчивания эллипсов и других кривых И. Гюнтера [5]. 2. Эллипсограф П. П. Николаенко [6]. 3. Циркуль для вычерчивания эллипсов Н. А. Кожемякина [7]. 4. Прибор для вычерчивания эллипсов В. Ф. Гумилевского [8].

Определение теоретической ошибки механизмов производилось путем сопоставления кривых, образованных этими механизмами с геометрически точными кривыми эллипса, построенными в тех же полуосях. Предположим, что кривая 1 с полуосями a и b (рис. 1) представляет собой заданную кривую эллипса, относительно которой по радиусам-векторам откладываются одинаковые расстояния d и получается кривая конхоида 2, которую образуют данные механизмы. Теоретическую ошибку f , следуя принципу работы механизмов этой группы, будем находить по радиусам-векторам, построив эллипс 3 с теми же полуосями $a + d$ и $b + d$, что и кривая 2. Для кривой эллипса 1 имеем

$$\begin{aligned}x &= a \cos t; \\y &= b \sin t.\end{aligned}\quad (1)$$

Из рис. 1 видно

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Подставляя сюда значения x и y из (1), получим

$$\operatorname{tg} t = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \quad (2)$$

или

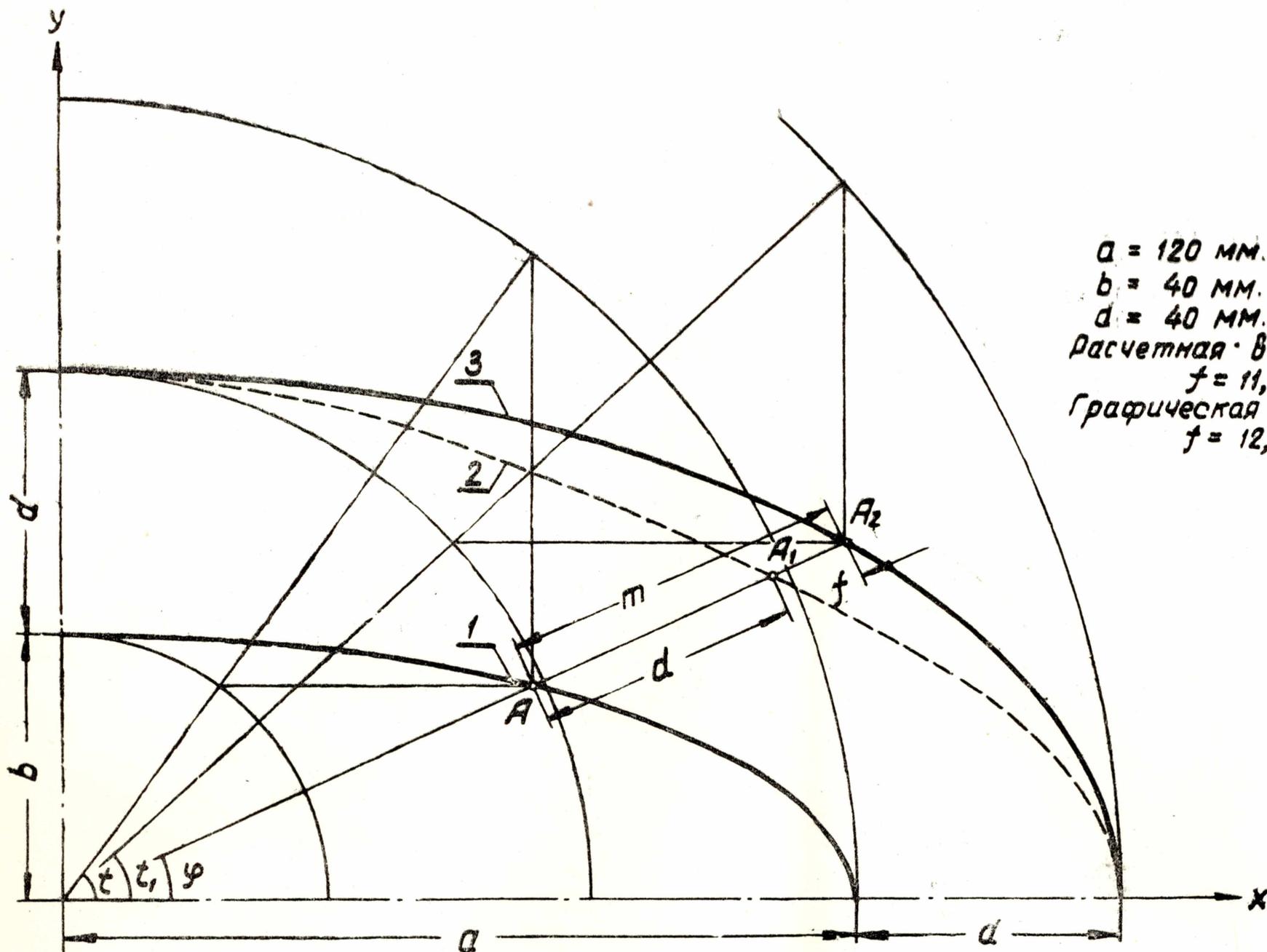
$$t = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

На основании (3) выражение (1) можно записать так

$$\left. \begin{aligned}x &= a \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \\y &= b \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi\end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Для эллипса 3 соответственно

$$\left. \begin{aligned}x_2 &= (a + d) \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a + d}{b + d} \operatorname{tg} \varphi \\y_2 &= (b + d) \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a + d}{b + d} \operatorname{tg} \varphi\end{aligned} \right\} \quad (5)$$



$a = 120 \text{ мм.}$
 $b = 40 \text{ мм.}$
 $d = 40 \text{ мм.}$
 Расчетная величина
 $f = 11,9 \text{ мм.}$
 Графическая величина
 $f = 12,1 \text{ мм.}$

Рис. 1. Сопоставление кривой 2, образованной механизмами, с кривой 3 точного эллипса.

Искомую величину f с целью упрощения решения задачи выразим следующим образом

$$f = m - d, \quad (6)$$

где m — расстояние между эллипсами 1 и 3, измеряемое по радиусам-векторам. Величину m можно выразить так

$$m = \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}.$$

Подставив сюда значения x , x_2 , y , y_2 из (4) и (5), получим

$$m = \sqrt{\left[\left(a + d \right) \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a + d}{b + d} \operatorname{tg} \varphi - a \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right]^2 + \left[\left(b + d \right) \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a + d}{b + d} \operatorname{tg} \varphi - b \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right]^2} \quad (7)$$

Задаваясь различными значениями угла φ , можно для любых параметров a , b и d определить величину m . По найденной величине m с помощью (6) можно найти f .

Из рис. 1 видно, что с изменением угла φ от 0 до 90° значение теоретической ошибки f меняется от нуля до максимума и наоборот. Для нас наибольший интерес представляет максимальная величина f . Чтобы ее определить, нужно найти значение угла φ , при котором она будет иметь место, подставить это значение угла в (7) и от (7) переходить к (6). Для этого возьмем производную от f по φ , предварительно подставив значение m из (7) в (6)

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\varphi} &= \frac{1}{m} \left\{ \left[(a+d) \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi - a \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right] \times \right. \\ &\times \left[- (a+d) \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{1 + \frac{(a+d)^2}{(b+d)^2} \operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{a+d}{b+d} \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \right. \\ &+ \left. a \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{a}{b} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right] + \\ &+ \left[(b+d) \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi - b \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right] \times \\ &\times \left[(b+d) \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{1 + \frac{(a+d)^2}{(b+d)^2} \operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{a+d}{b+d} \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \right. \\ &\left. - b \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{a}{b} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right] \Big\} = 0. \end{aligned}$$

Выражение $\frac{1}{m}$ равно нулю. Приравниваем нулю выражение, заключенное в фигурные скобки, и запишем его следующим образом:

$$\begin{aligned} & \left[(a+b) \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi - a \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right] \times \\ & \times \left\{ a^2 b \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \left[(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \right] - \right. \\ & \quad \left. - (a+d)^2 (b+d) \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi (b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \right\} + \\ & + \left[(b+d) \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi - b \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \right] \times \\ & \times \left\{ (a+d) (b+d)^2 \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi (b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) - \right. \\ & \quad \left. - ab^2 \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \left[(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \right\} = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Из рис. 1 видно также, что

$$\operatorname{tg} t_1 = \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi. \quad (9)$$

Учитывая (2) и (9), произведем следующую замену тригонометрических функций

$$\left. \begin{aligned} \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi &= \sin t_1 = \frac{(a+d) \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \\ \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+d}{b+d} \operatorname{tg} \varphi &= \cos t_1 = \frac{b+d}{\sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \\ \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi &= \sin t = \frac{a \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \\ \cos \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi &= \cos t = \frac{b}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

На основании (10) выражение (8) можно представить так

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(a+d)(b+d)}{\sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} - \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right] \times \\ & \times \left\{ \frac{a^3 b \operatorname{tg} \varphi [(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi] \sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(a+d)^3 (b+d) \operatorname{tg} \varphi (b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} + \\
& + \operatorname{tg} \varphi \frac{(a+d)(b+d)^3 (b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi) \sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} - \\
& - \operatorname{tg} \varphi \frac{ab^3 [(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi] \sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \Big\} = 0. \quad (11)
\end{aligned}$$

Часть уравнения (11), заключенная в квадратные скобки, т. е.

$$\left[\frac{(a+d)(b+d)}{\sqrt{(b+d)^2 + (a+d)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} - \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \right] = 0$$

вещественных корней не имеет. Исследуем другую его часть, заключенную в фигурные скобки. Для этого сделаем соответствующее преобразование и представим ее так

$$\begin{aligned}
& a^2(a+d)^2 \{ (a+d)^4 (a^2 - b^2)^2 b^2 - (b+d)^2 a^4 [(a+d)^2 - (b+d)^2]^2 \} \operatorname{tg}^6 \varphi + \\
& + 3(a+d)^2 (b+d)^2 a^2 b^2 \{ (a+d)^2 (a^2 - b^2)^2 - a^2 [(a+d)^2 - (b+d)^2]^2 \} \operatorname{tg}^4 \varphi + \\
& + 3(a+d)^2 (b+d)^2 a^2 b^2 \{ (b+d)^2 (a^2 - b^2)^2 - b^2 [(a+d)^2 - (b+d)^2]^2 \} \operatorname{tg}^2 \varphi + \\
& + (b+d)^2 b^2 \{ (b+d)^4 a^2 (a^2 - b^2)^2 - (a+d)^2 b^4 [(a+d)^2 - (b+d)^2]^2 \} = 0. \quad (12)
\end{aligned}$$

Произведем следующую замену

$$\left. \begin{aligned}
a^2(a+d)^2 \{ (a+d)^4 (a^2 - b^2)^2 b^2 - (b+d)^2 a^4 [(a+d)^2 - (b+d)^2]^2 \} &= A \\
3(a+d)^2 (b+d)^2 a^2 b^2 \{ (a+d)^2 (a^2 - b^2)^2 - a^2 [(a+d)^2 - (b+d)^2]^2 \} &= B \\
3(a+d)^2 (b+d)^2 a^2 b^2 \{ (b+d)^2 (a^2 - b^2)^2 - b^2 [(a+d)^2 - (b+d)^2]^2 \} &= C \\
(b+d)^2 b^2 \{ (b+d)^4 a^2 (a^2 - b^2)^2 - (a+d)^2 b^4 [(a+d)^2 - (b+d)^2]^2 \} &= D
\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$\operatorname{tg}^2 \varphi = z_0$

Тогда уравнение (12) запишется следующим образом

$$Az^3_0 + Bz^2_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (14)$$

Полученное уравнение третьей степени будем решать по формуле Кардано [9]. Для этого уравнение (14) разделим на A и получим

$$z^3_0 + \frac{B}{A} z^2_0 + \frac{C}{A} z_0 + \frac{D}{A} = 0. \quad (15)$$

Произведем следующую замену коэффициентов

$$\frac{B}{A} = \eta; \quad \frac{C}{A} = \theta; \quad \frac{D}{A} = \varepsilon. \quad (16)$$

Тогда уравнение (15) запишется так

$$z_0^3 + \eta z_0^2 + \Theta z_0 + \varepsilon = 0. \quad (17)$$

Неизвестное z_0 заменим новым неизвестным z , которое с неизвестным z_0 связано равенством

$$z_0 = z - \frac{\eta}{3}. \quad (18)$$

После этого уравнение (17) приобретет вид неполного кубического уравнения и запишется следующим образом

$$z^3 + \frac{3\Theta - \eta^2}{3} z + \frac{\eta(2\eta^2 - 9\Theta) + 27\varepsilon}{27} = 0. \quad (19)$$

Сделаем замену

$$\frac{3\Theta - \eta^2}{3} = p; \quad \frac{\eta(2\eta^2 - 9\Theta) + 27\varepsilon}{27} = q. \quad (20)$$

Неполное кубическое уравнение (19) приобретет вид

$$z^3 + pz + q = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) обладает тремя корнями. Пусть один из этих корней будет z_1 . Формула Кардано, выражающая корни уравнения (21) через его коэффициенты, при помощи квадратных и кубических радикалов запишется следующим образом

$$z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (22)$$

От найденного корня z_1 с помощью (18) переходим к z_0 , а от z_0 с помощью (13) переходим к углу φ . На рис. 2 показано изменение

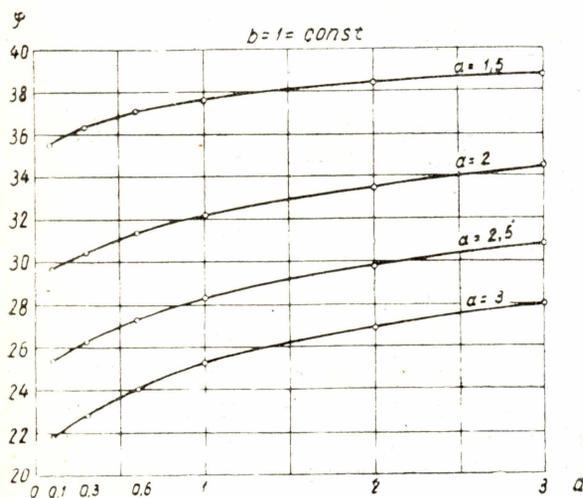


Рис. 2. Зависимость угла φ , при котором ошибка механизмов для образования эллипсов приобретает свое максимальное значение от a и d .

более интенсивным.

При найденной величине угла φ , в соответствии с (7) m приобретает максимальное свое значение. По этому значению m с помощью

угла φ в зависимости от переменных величин a и d при $b = \text{const}$, причем указанные параметры a и d являются приведенными величинами, т. е. выраженными через b . Из этого рисунка видно, что с увеличением a значение угла φ при одной и той же величине d падает, причем это падение угла φ несколько отстает от увеличения a . Из этого же рисунка видно, что с увеличением d значение угла φ при одной и той же величине a тоже увеличивается, причем с переходом от меньших значений a к большим это увеличение становится бо-

(6) определяем искомую величину f . Эта величина f характеризует собой то максимальное отклонение, которое имеет место по радиусам-векторам между кривой, полученной механизмами, и точной кривой эллипса, построенными в одних и тех же полуосях. Задача решена в общем виде.

В целях ускорения процесса определения абсолютных величин f для тех или иных конкретных значений a и d при $b = \text{const}$ произведен подсчет значений f по вышеприведенным формулам и данные выражены графически. На рис. 3 представлена зависимость абсолютной величины f от переменных a и d при $b = \text{const}$. Анализ характера кривых показывает, что с увеличением a абсолютная ошибка f при постоянной величине d повышается, причем с переходом от меньших значений d к большим это повышение становится более интенсивным. Аналогично с увеличением d абсолютная ошибка f при постоянной величине a повышается, и это повышение также становится более интенсивным при переходе от меньших значений a к большим.

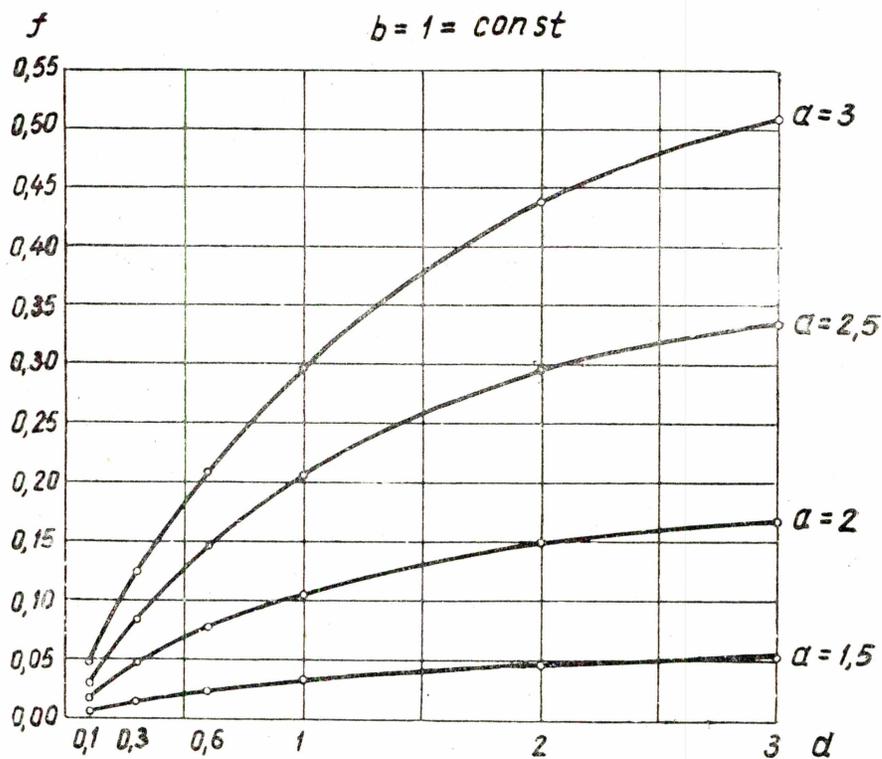


Рис. 3. Зависимость абсолютной ошибки f от переменных a и d .

В практике машиностроения чаще представляет интерес не абсолютная величина отклонения от номинального размера, а относительная. В нашем случае применительно к деталям, имеющим эллиптическую форму, за меру отклонения от номинального размера можно взять, например, отношение абсолютной ошибки f к большой полуоси эллипса 3, которая является полуосью также и конхоиды 2 (рис. 1). На рис. 4 представлена графическая зависимость относительной ошибки механизмов $f_{\text{отн}}$ от переменных a и d при $b = \text{const}$, где за меру искажения точной кривой эллипса принято отношение абсолютной ошибки f к величине $a + d$. Для удобства отсчетов относительная ошибка $f_{\text{отн}}$ представлена на графике величиной, в тысячу раз превышающей ее действительное значение.

Анализ кривых показывает, что с увеличением $a f_{отн}$ при постоянной величине d повышается. С переходом от меньших значений d к большим при $a = const f_{отн}$ вначале увеличивается интенсивно, а затем, достигнув определенной величины, максимума, постепенно начинает падать. Точки I, II, III, IV представляют собой максимальные значения $f_{отн}$ при соответствующих значениях a . На рис. 5 представлена графическая зависимость $f_{отн.мах}$ от переменной a . Величина d

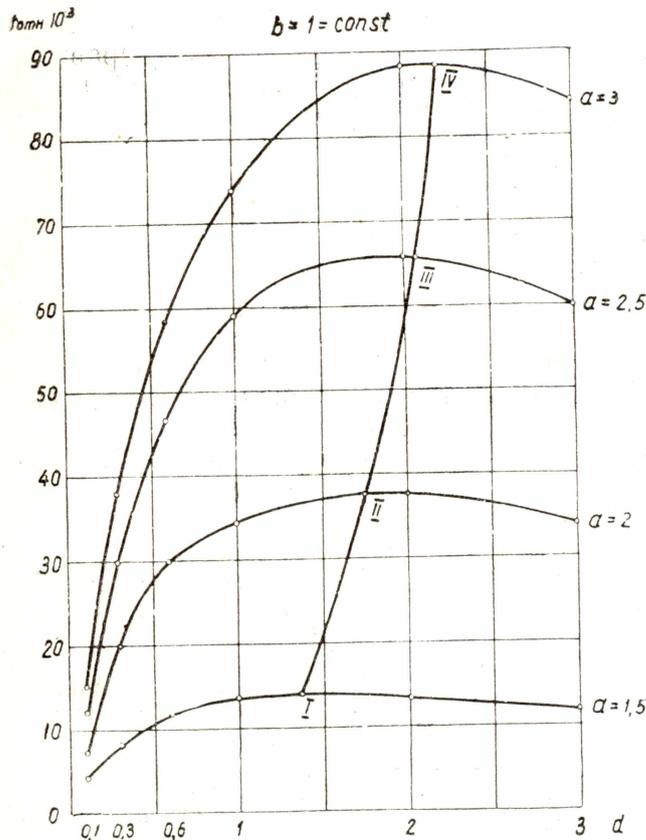


Рис. 4. Зависимость относительной ошибки $f_{отн}$ от переменных величин a и d .

в этом случае не учитывается. При надобности ее можно определить из рис. 4.

С целью проверки правильности приведенных аналитических и графических выражений, рассмотрим конкретный пример (рис. 1). Примем $a = 120 \text{ мм}$, $b = 40 \text{ мм}$ и $d = 40 \text{ мм}$. Так как определение ошибки механиз-

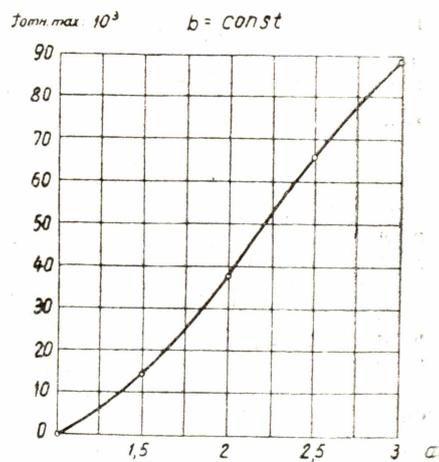


Рис. 5. Зависимость максимальной относительной ошибки $f_{отн.мах}$ от переменной a .

мов производилось с учетом приведения параметров кривых к одному, а именно к b , то сделаем следующее:

$$a = \frac{120 \text{ мм}}{40 \text{ мм}} = 3; \quad d = \frac{40 \text{ мм}}{40 \text{ мм}} = 1.$$

При этом переводный масштаб единиц получит значение

$$M = \frac{40 \text{ мм}}{1} = 40 \text{ мм}. \quad (23)$$

По рис. 2 определяем угол φ , при котором значение ошибки f будет максимальным $\varphi \cong 25^\circ$. По графику, приведенному на рис. 3, находим абсолютную ошибку $f \cong 0,3$. На основании (23) для нашего конкретного примера ошибка механизмов составит: $f \cong 0,3 \cdot 40 \text{ мм} \cong 12 \text{ мм}$.

В случае необходимости более точного решения задачи следует поступить так. В соответствии с (13) определить коэффициенты $A, B,$

С и D. Для нашего примера при $a = 3$, $b = 1$ и $d = 1$ они составят соответственно: $A = -43,5917 \cdot 10^5$; $B = -4,70016 \cdot 10^5$; $C = 1,93536 \cdot 10^5$; $D = 0,34560 \cdot 10^5$. Согласно (16) найти η , θ и ε ; $\eta = 0,10782$; $\theta = -0,04440$; $\varepsilon = -0,00793$. Из (20) определить значения p и q : $p = -0,04827$; $q = -0,00631$. По формуле (22) вычислить один из корней $z_1 = 0,238$. Приравнять z_1 к z и по уравнению (18) определить $z_0 = 0,2021$. В соответствии с (13) найти $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{z_0} = \sqrt{0,2021} = 0,45$, а $\varphi = 24^\circ 14'$. По формуле (7) найти $m = 1,2975$. С помощью (23) выразить m в мм; $m = 1,2975 \cdot 40 \text{ мм} = 51,9 \text{ мм}$. И окончательно по уравнению (6) найти значение абсолютной ошибки $f = 51,9 - 40 = 11,9 \text{ мм}$. Относительная ошибка для данного примера составит

$$f_{\text{отн}} = \frac{f}{a + d} = \frac{11,9}{120 + 40} = 0,0744.$$

С точностью, достаточной для практических целей, эту же величину $f_{\text{отн}}$ можно определить из рис. 4.

Таким образом, в итоге анализа теоретической точности работы пространственных механизмов для образования эллипса третьей группы найдены значения абсолютной и относительной ошибок их, что позволяет определить область практического применения этих механизмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сперанский Н. В. Мальтийский механизм с приводом от эллиптических зубчатых колес. Труды института машиноведения. Семинар по теории машин и механизмов. Том XVII, вып. 67, издательство АН СССР. М., 1957.
2. Литвин Ф. Л. Некруглые зубчатые колеса. Машгиз М.—Л., 1956.
3. Литвин Ф. Л. Проектирование некруглых зубчатых колес, применяющихся в машиностроении. Труды института машиноведения. Семинар по теории машин и механизмов. Том XIV, вып. 55, Издательство АН СССР, М., 1954.
4. Торопыгин Е. И. Исследование эллиптических циркулей. Известия Томского политехнического института. Том 85, 1957.
5. Гюнтер И. Циркуль для вычерчивания эллипсов. Советский патент №11464 по кл. 42 а 12 от 26 марта 1928 г.
6. Николаенко П. П. Эллипсограф. Советский патент №9695 по кл. 42 а, 12 от 29 марта 1928 г.
7. Кожемякин Н. А. Циркуль для вычерчивания эллипсов. Советское авторское свидетельство №42693 по кл. 42 а, 12 от 3 сентября 1934 г.
8. Гумилевский В. Ф. Прибор для вычерчивания эллипсов. Советское авторское свидетельство №28022 по кл. 42 а, 12 от 28 сентября 1931 г.
9. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. Гос. из-во технико-теоретической литературы. М., 1955.
10. Граур А. В. Математическая картография, Изд. Ленинградского Ордена Ленина Гос. университета, Л. 1957.