ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 137 1965

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БРУСЕ С ВНУТРЕННИМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Л. Г. ФУКС

(Представлена кафедрой котлостроения и котельных установок)

В ряде электротехнических конструкций имеют широкое применение материалы, теплопроводность которых в различных направлениях неодинакова. К числу таких конструкций можно, например, отнести сердечники трансформаторов, магнитопроводы бетатронов и т. п., работающие в условиях внутреннего тепловыделения. Теплопроводность стальных листов вдоль пакета выше, чем в поперечном направлении, так что в целом сердечник можно рассматривать как анизотропное тело.

Задачей расчета является нахождение поля температур по сечению магнитопровода и, в частности, определение максимальной температуры перегрева.

Имеются приближенные решения задачи, например, работа [1]. Эти решения основаны на допущении большой разницы в теплопроводности анизотропного материала или применении приближенных способов численного интегрирования. Ниже приводится точное решение для бруса бесконечной длины.

Если направить оси x и y по осям симметрии поперечного сечения бруса (рис. 1), то стационарное температурное поле опишется уравнением

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + q_v = 0. \tag{1}$$

Граничные условия при отводе тепла по закону Ньютона могут быть выражены как

$$\alpha_x (t - t_0) = -\lambda_x \left(\frac{dt}{dx}\right) \text{ при } \quad x = \pm a, \tag{2}$$

$$\alpha_y (t - t_0) = -\lambda_y \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) \text{ при } y = \pm b. \tag{3}$$

Здесь обозначено:

t — температура в произвольной точке бруса,
t_0 — температура окружающей среды,
$2a$, $2b$ — линейные размеры сечения бруса,

λ_x, λ_y — теплопроводность по направлениям x и y,
q_v — внутреннее тепловыделение,
α_x, α_y — коэффициенты теплоотдачи от поверхности бруса по направлениям x и y.

Введем в уравнение (1) и граничные условия (2), (3) новую функцию и независимые переменные

$$\vartheta = t - t_0, \qquad x = u\sqrt{\lambda_x}. \qquad y = v\sqrt{\lambda_y}.$$

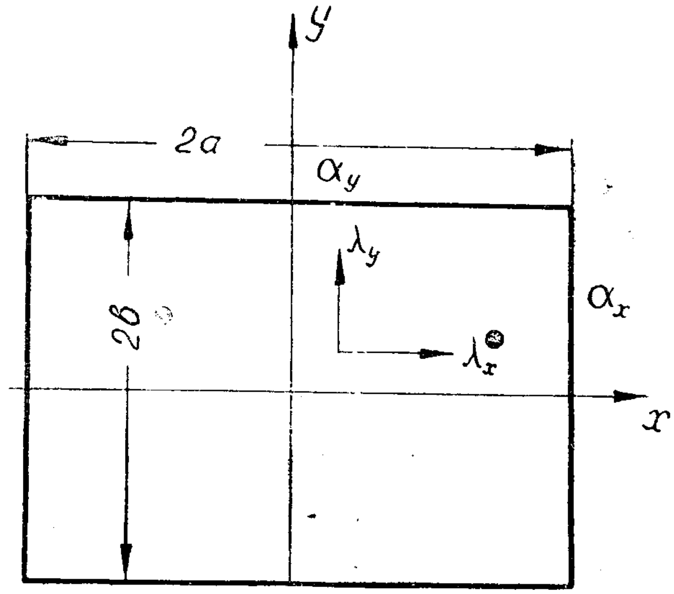

Рис. 1. Расчетная схема задачи.

При этом (1), (2) и (3) примут вид

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} + q_v = 0, \tag{4}$$

$$\vartheta = -\nu_x\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)_{u=a_1}, \qquad \vartheta = -\nu_y\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)_{v=b_1}, \qquad (5),(6)$$

где

$$\nu_x = \frac{\sqrt{\lambda_x}}{\alpha_x}, \qquad \nu_y = \frac{\sqrt{\lambda_y}}{\alpha_y}, \qquad a_1 = \frac{a}{\sqrt{\lambda_x}},$$

$$b_1 = \frac{b}{\sqrt{\lambda_y}}.$$

Будем искать решение в виде

$$\vartheta = \varphi(u) + U(u)\cdot U(v). \tag{7}$$

Подставим функцию (7) в уравнение (4)

$$UV'' + VU'' + \varphi'' + q_v = 0. \tag{8}$$

Подберем φ так, чтобы

$$\varphi'' + q_v = 0,$$

причем постоянные интегрирования определим из граничных условий. Находим следующий вид функций:

$$\varphi(u) = \frac{q_v a_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{u}{a_1}\right)^2 + \frac{2\nu_x}{a_1}\right]. \tag{9}$$

При таком выборе φ получаем из (8) после разделения переменных

$$V''/V = -U''/U = \beta^2. \tag{10}$$

Для нахождения частного решения воспользуемся условиями симметрии, которые в рассматриваемом случае записываются как

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)_{u=0} = 0, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)_{v=0} = 0. \tag{12}$$

Полное решение дифференциального уравнения (4) при граничных условиях (5) и (6) будет

$$\vartheta(u, v) = \frac{q_v a_1^2}{2}\left[1 - \left(\frac{u}{a_1}\right)^2 + \frac{2\nu_x}{a_1}\right] + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\beta_n u \cdot \operatorname{ch}\beta_n v. \tag{13}$$

Постоянные A_n и собственные числа β_n находятся из граничных условий обычным путем. Окончательное решение задачи после перехода к исходным аргументам имеет вид

$$\vartheta(x,y) = \frac{q_v a^2}{2\lambda_x}\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{2\lambda_x}{a\cdot\alpha_x} - \right.$$

$$\left. - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\mu_n \cdot \cos\mu_n \frac{x}{a} \operatorname{ch}\mu_n \frac{y}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}}{\mu_n^3\left(\mu_n \frac{\lambda_y}{a\alpha_y}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} \operatorname{sh}\mu_n \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} + \operatorname{ch}\mu_n \frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}}\right) \times \left(1 + \frac{\sin 2\mu_n}{2\mu_n}\right)}\right], \tag{14}$$

где собственные числа μ_n представляют собой корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\alpha_x a}{\lambda_x} \operatorname{ctg}\mu = \mu. \tag{15}$$

Значение первых двух корней уравнения (15) приведены на рис. 2. Более подробные таблицы имеются, например, в работе [2].

Анализ уравнения (14) показывает, что в большинстве практических случаев расчета достаточно ограничиться только первым членом бесконечной суммы. По крайней мере, если величина

$$\frac{\alpha_x a}{\lambda_x} \leqslant 0{,}5,$$

то, отбрасывая второй член, мы сделаем ошибку меньше, чем 0,2 % от всей суммы.

При работе с точным решением следует располагать ось x в том направлении, в котором величина $\frac{\alpha_x \cdot a}{\lambda_x}$ окажется наименьшей, так как в этом случае сходимость ряда будет лучшей.

В качестве примера приводим сравнение предлагаемого расчета с методом, принятым в работе [1], откуда заимствованы следующие ниже данные.

Пример: Бесконечный брус прямоугольного сечения $0,48 \times 0,16 \, м^2$, коэффициенты теплопроводности которого соответственно равны

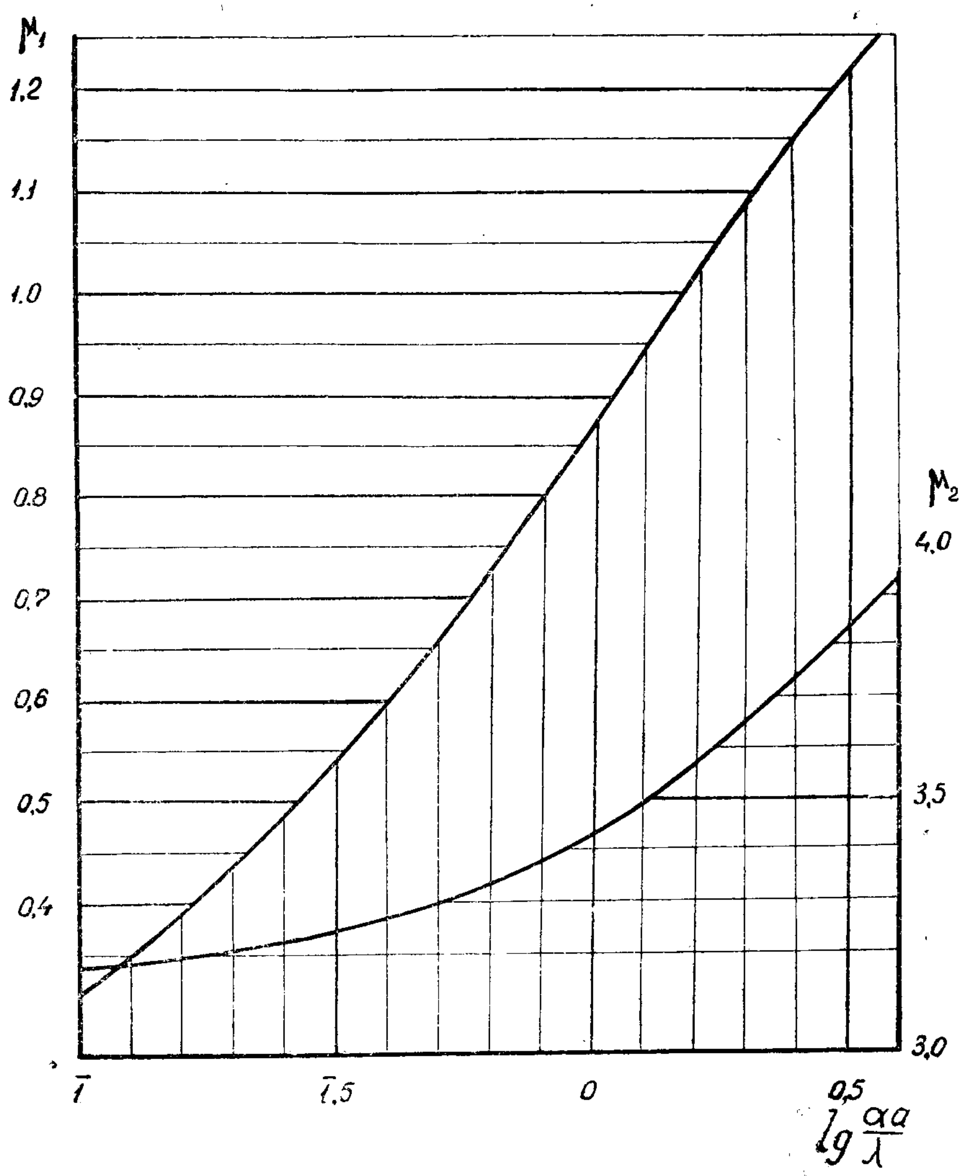

Рис. 2. Корни трансцендентного уравнения.

$$\frac{\alpha_x a}{\lambda_x} \, \mathrm{ctg} \, \mu = \mu.$$

$45,4 \, \frac{вт}{м \, ^\circ C}$ и $1,16 \, \frac{вт}{м \, ^\circ C}$ нагревается за счет внутреннего тепловыделения интенсивностью $30200 \, \frac{вт}{м^3}$. Охлаждение бруса происходит с одинаковым коэффициентом теплоотдачи $62,8 \, \frac{вт}{м^2 \, ^\circ C}$ по всем граням.

Температура окружающего воздуха 35°С. Найти температуру любой точки бруса и определить максимальную температуру в условиях стационарного нагрева.

Определим две величины

$$\frac{54\cdot 0{,}24}{39} = 0{,}332, \qquad \frac{54\cdot 0{,}08}{1} = 4{,}32.$$

Таким образом, ось x удобнее направить параллельно стороне 0,48 *м*. При этом $\mu_1 = 0{,}9547$ и $\mu_2 = 3{,}24$.

Данные задачи будут следующими:

$$a = 0{,}24\ м, \qquad b = 0{,}08\ м, \qquad \lambda_x = 45{,}4\ вт/м°С,$$

$$\lambda_y = 1{,}16\ вт/м°С, \qquad \alpha_x = \alpha_y = \alpha = 62{,}8\ вт/м^2\,°С,$$

$$q_v = 30200\ вт/м^3, \qquad t_0 = 35°С.$$

Вычисляем последовательно расчетные комплексы

$$\frac{q_v a^2}{2\lambda_x} = 19{,}2°С; \qquad \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} = 6{,}25;$$

$$\mu_1\,\frac{b}{a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} = 1{,}138; \qquad \frac{2\lambda_x}{\alpha_x\cdot a} = 6{,}02;$$

$$\mu_1\,\frac{\lambda_y}{\alpha_y\cdot a}\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda_y}} = 0{,}263$$

и, подставив эти величины в (14), с учетом только первого члена суммы получим после преобразований

$$t(x, y) = 169{,}8 - 333\,x^2 - 64{,}7\cos\cdot 2{,}28\,x\cdot \mathrm{ch}\,14{,}25\,y.$$

Для определения температуры величины x и y необходимо брать в метрах.

Максимальная температура будет в точке $x = y = 0$,

$$t_{\max} = 105{,}1°С.$$

(по расчету, приведенному в работе [1], $t_{\max} = 98$ С).

Подсчет поправки, связанной с пренебрежением вторым членом ряда, дал малую величину $0{,}2\cdot 10^{-3}$ С.

Выводы

1. При расчете температур анизотропного прямоугольного бруса с внутренним тепловыделением следует пользоваться предлагаемым точным решением, дающим величину температуры в любой точке бруса.

2. Особо рекомендуется применение точного решения при близких значениях критерия Био по двум взаимно перпендикулярным направлениям сечения бруса, так как в этом случае приближенные способы могут дать значительную ошибку.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гурченок. Расчет температуры нагрева магнитопроводов бетатронов. Известия высших учебных заведений, Электромеханика, № 3, 1959.

2. А. В. Лыков. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, Москва, 1952.

3. Заказ 5734.