ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 137 1965

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Ю. М. ТРИФОНОВ

(Представлена кафедрой АТППП)

Вопросу разложения на множители или определения корней характеристического уравнения 3 степени посвящен целый ряд работ [1, 2, 3, 4]. Методы, изложенные в этих работах, позволяют решить задачу, но требуют затраты значительного количества труда. Предлагаемый метод сокращает объем вычислительной работы, если уравнение не содержит кратных корней. Это условие практически всегда выполняется, ибо в подавляющем большинстве случаев характеристические уравнения систем автоматического регулирования вообще не содержат кратных корней [3].

Рассматриваемый ниже метод разложения на множители может применяться для характеристического уравнения вида

$$a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + 1 = 0, \tag{1}$$

где $$a_1 > 0,\ a_2 > 0,\ a_3 > 0.$$

Если выполняется условие устойчивости Раусса-Гурвица, то

$$a_1 \cdot a_2 > a_3.$$

Представим выражение (1) в виде

$$(T_1p + 1)(T_2p^2 + T_3p + 1) = 0 \tag{2}$$

при этом $T_1 > 0,\ T_2 > 0,\ T_3 > 0$.

После преобразования получим

$$T_1T_2p^3 + (T_1T_3 + T_2)p^2 + (T_1 + T_3)p + 1 = 0. \tag{3}$$

Сравнивая выражения (1) и (3), видим, что

$$\left.\begin{aligned} &T_1T_2 = a_3, && (4-а)\\ &T_1 \cdot T_3 + T_2 = a_2, && (4-б)\\ &T_1 + T_3 = a_1. && (4-в)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Определим пределы, которые ограничивают интервал существования T_1. Из выражения (4—*б*) следует

$$T_1 = \frac{a_2 - T_2}{T_3}.$$

Чтобы T_1 было положительно, необходимо выполнение неравенства $T_2 < a_2$. Из уравнения (4—a) имеем

$$T_2 = \frac{a_3}{T_1}, \text{ отсюда } T_1 > \frac{a_3}{a_2}.$$

Второй предел существования T_1 определяется из уравнения (4—$в$)

$$T_3 = a_1 - T_1.$$

Чтобы было $T_3 > 0$, необходимо выполнение условия $T_1 < a_1$.

Таким образом, T_1 и T_3 существуют в интервалах

$$\frac{a_3}{a_2} < T_1 < a_1; \; 0 < T_3 < a_1 - \frac{a_3}{a_2}.$$

Для решения системы (4) необходимо найти интервал существования $T_1 \cdot T_3$.

А. Для этого вначале найдем

$$\lim_{T_3 \to 0} T_1 = a_1, \text{ тогда } \lim_{T_3 \to 0} T_2 = \frac{a_3}{a_1}.$$

Из уравнения (4—$б$) имеем

$$T_1 T_3 \leqslant a_2 - \frac{a_3}{a_1} = c' \tag{5}$$

При

$$\lim_{T_3 \to a_1 - \frac{a_3}{a_2}} T_1 = \frac{a_3}{a_2}, \quad \lim_{T_3 \to a_1 - \frac{a_3}{a_2}} T_2 = a_2, \; T_1 T_3 = 0.$$

$T_1 T_3$ существует в интервале

$$0 < T_1 T_3 \leqslant c'.$$

Б. Положим, что произведение $T_1 \cdot T_3 = c''$.
Рассмотрим тогда систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} T_1 \cdot T_3 &= c'', \\ T_1 + T_3 &= a_1. \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &(6) \\ &(4-в) \end{aligned}$$

Выразим T_3 из уравнения (4—$в$) и подставим его в уравнение (6), тогда получим

$$T_1^2 - a_1 T_1 + c'' = 0,$$

$$T_1 = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c''},$$

так как $T_1 > 0$ и действительное число, то

$$\frac{a_1^2}{4} - c'' \geqslant 0.$$

Отсюда

$$c'' \leqslant \frac{a_1^2}{4}. \tag{7}$$

Для того, чтобы выбрать первое приближение $T_1 \cdot T_3$, необходимо сравнить следующие неравенства:

$$0 < T_1 T_3 \leqslant c', \tag{8—а}$$

$$0 < T_1 T_3 \leqslant c''. \tag{8—б}$$

Из рассмотрения выражений $(8-a)$ и $(8-б)$ следует, что

$$0 < T_1 \cdot T_3 \leqslant c_1 \quad (8-в),$$

где c_1 равно меньшему из чисел c' и c''.

Когда найдены интервалы существования T_1 и $T_1 \cdot T_3$, можно данное характеристическое уравнение 3 степени разложить на множители. При этом возможны следующие случаи:

Случай 1

$$\frac{c'}{c''} < 1,$$

тогда

$$c_1 = a_2 - \frac{a_3}{a_1}.$$

Представим графически выражения $(4-в)$ и $(8-в)$ сплошными линиями на рис. 1. Из рисунка видно, что c может лишь уменьшаться или быть равным числу c_1. Уменьшение числа c означает, что гипербола сдвигается к началу координат (см. пунктирную линию на рис. 1). Поэтому, если определить сейчас точку пересечения гипер-

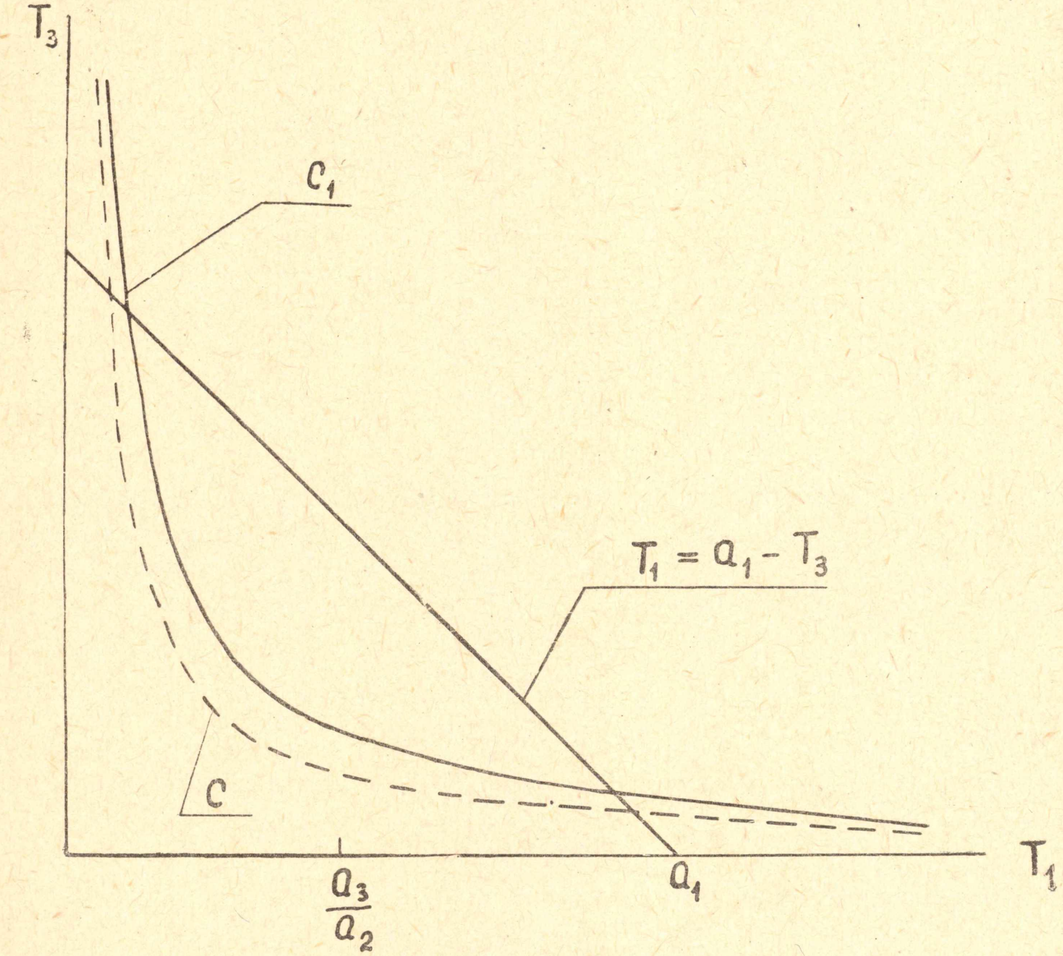

Рис. 1. Графическое представление уравнений (4—в) и (8—в).

болы c_1 с прямой, то тем самым значительно уменьшается интервал существования T_1. Система уравнений $(4-в)$ и $(8-в)$ равносильна уравнению

$$T^2 - a_1 T + c_1 = 0,$$

из которого имеем

$$T_{1,3} = \frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c_1}. \qquad (9)$$

В первом приближении значения T_1 и T_3 равны

$$T'_1 = \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c_1},$$

$$T'_3 = \frac{a_1}{2} - \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c_1}.$$

Проверка. Подсчитываем значение $T'_1 T'_3 + T'_2 = a'_2$ и сравниваем с a_2; если a'_2 отличается от a_2, то определяем c_2 по формуле

$$c_2 = a_2 - \frac{a_3}{T'_1}. \qquad (10)$$

Затем снова определяем $T'_1 \cdot T'_3 + T'_2 = a'_2$ и делаем проверку. Расчет ведем до тех пор, пока не получим требуемой точности (пример № 1).

Случай 2.

$$\frac{c'}{c''} > 1.$$

В этом случае после определения интервалов существования T_1 и $T_1 \cdot T_3$ следует определить T'_1 по выражению

$$T'_1 = \frac{a_3}{a_2 - c_1}, \qquad (11)$$

тогда из $(4-a)$ и $(4-в)$ получим:

$$T'_3 = a_1 - T'_1,$$

$$T'_2 = \frac{a_3}{T'_1}.$$

Проверка. Подсчитываем значение $T'_1 \cdot T'_3 + T'_2 = a'_2$ и сравниваем с a_2. Если a'_2 отличается от a_2, то определяем c_2 и по нему находим T''_1. Формулу для определения c_2 получим после подстановки значения T'_1 в выражение (9)

$$T'_1 = \frac{a_1}{2} + \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - c_2},$$

отсюда

$$c_2 = T'_1 (a_1 - T'_1). \qquad (12)$$

Вычисления ведем до тех пор, пока $c_{n-1} - c_n \approx 0$ с требуемой точностью.

Пример 1.

Рассмотрим уравнение

$$7p^3 + 3p^2 + 5p + 1 = 0.$$

Согласно (1) имеем

$$a_3 = 7,\ a_2 = 3,\ a_1 = 5.$$

1 шаг. Проверим, выполняется ли условие Раусса-Гурвица

$$3 \cdot 5 > 7.$$

2 шаг. Определяем интервал существования постоянной времени T_1

$$\frac{7}{3} = 2{,}33 < T_1 < 5.$$

3 шаг. Определяем по выражению (8-в) интервал существования $T_1 \cdot T_3$

$$c' = a_2 - \frac{a_3}{a_1}, \quad c' = 3 - \frac{7}{5} = 1{,}6;$$

$$c'' = \frac{a_1^2}{4}, \quad c'' = \frac{5^2}{4} = 6{,}25.$$

Следовательно, $0 < T_1 \cdot T_3 \leqslant 1{,}6.$

4 шаг. Определяем отношение

$$\frac{c'}{c''} = \frac{1{,}6}{6{,}25} = 0{,}256.$$

Так как $\frac{c'}{c''} < 1$, то вычисление T_1 ведем по формуле (9)

$$T_1' = \frac{5}{2} + \sqrt{6{,}25 - 1{,}6} = 4{,}66;$$

$$T_3' = 5 - 4{,}66 = 0{,}34; \; T_2' = \frac{7}{4{,}66} = 1{,}5.$$

Проверка. $a_2' = 4{,}66 \cdot 0{,}33 + 1{,}5 = 3{,}04.$

5 шаг. Проводим второе приближение

$$C_2 = 3 - \frac{7}{4{,}66} = 1{,}5,$$

тогда

$$T_1 = 4{,}7; \; T_3 = 0{,}3; \; T_2 = \frac{7}{4{,}7} = 1{,}49.$$

Проверка. $a_2'' = 4{,}7 \cdot 0{,}3 + 1{,}49 = 3{,}0$

Получили полное совпадение a_2'' с a_2.

Пример 2.

Решим следующее уравнение:

$$0{,}025\,p^3 + 0{,}225\,p^2 + 0{,}75\,p + 1 = 0.$$

Аналогично производим шаги 1, 2, 3.

1. $0{,}225 \cdot 0{,}75 > 0{,}025.$

2. $$\frac{0{,}025}{0{,}225} = 0{,}111 < T_1 < 0{,}75.$$

3. $$c' = 0{,}225 - \frac{0{,}025}{0{,}75} = 0{,}022; \quad c'' = \frac{0{,}75^2}{4} = 0{,}14; \; \frac{c'}{c''} = 1{,}56.$$

Следовательно, $0 < T_1 \cdot T_3 < 0{,}14.$

4. Пользуемся формулами (11) и (12)

$$T_1' = \frac{0{,}025}{0{,}225 - 0{,}140} = 0{,}294; \; c_2 = 0{,}294\,(0{,}75 - 0{,}294) = 0{,}134;$$

$$T_1'' = \frac{0,025}{0,225 - 0,134} = 0,275; \; c_3 = 0,275\,(0,75 - 0,275) = 0,130;$$

$$T_1'' = \frac{0,025}{0,225 - 0,130} = 0,263; \; c_4 = 0,263\,(0,75 - 0,263) = 0,128.$$

$$T_1^{IV} = \frac{0,025}{0,225 - 0,128} = 0,254; \; c_5 = 0,254\,(0,75 - 0,254) = 0,126.$$

$$T_1^{V} = \frac{0,025}{0,225 - 0,126} = 0,253; \; c_6 = 0,253\,(0,75 - 0,253) = 0,125.$$

$$T_1^{VI} = \frac{0,025}{0,225 - 0,125} = 0,25; \; c_7 = 0,25(0,75 - 0,25) = 0,125.$$

Проверка.

$$T_3 = 0,75 - 0.25 = 0,5; \; T_2 = \frac{0,025}{0,25} = 0,1,$$

$$a_2 = 0,25 \cdot 0,5 + 0,1 = 0,225.$$

Получили полное совпадение.

Сравним предложенный метод с методом итераций [2] для уравнений 3 порядка. В примере 2, сосчитанном методом итераций [1], решение получено после 10 итераций. При решении же этого примера данным методом результат получен после 6 приближений с той же точностью.

Вывод

Определение интервала существования постоянных времени еще до расчета уменьшает количество итераций, делает расчет более целенаправленным.

Сходимость вычислений тем большая, чем сильнее неравенство

$$\frac{c'}{c''} \gtrless 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Балансанов. Основы автоматизации технологических процессов гидрометаллургии редких и радиоактивных металлов. Атомиздат, 1960.
2. О. М. Крыжановский. Об итерационном методе определения приближенных значений корней уравнений. Автоматика и телемеханика, XI, № 3, 1950.
3. Б. Н. Наумов. Переходные процессы в линейных системах автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1960.
4. К. Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматиздат. 1961.