ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА имени С. М. КИРОВА

Том 138 1965

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЧНОГО ИНТЕРВАЛА КВАНТОВАНИЯ ПРИ РЕГИСТРАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

И. Э. НААЦ

(Представлена объединенным научным семинаром кафедр физико-технического факультета)

При проектировании устройств регистрации пространственно распределенных параметров, предназначенных для представления непрерывной кривой распределения по совокупности дискретных отсчетов (показаний датчиков), одним из основных вопросов является определение необходимого расстояния между датчиками.

Совершенно очевидно, что расстояние между датчиками, т. е. пространственный интервал квантования, должен определяться заданной величиной погрешности представления (интерполирования) и сложностью рельефа контролируемого поля. В данной работе рассматривается определение граничного интервала квантования h_o, когда датчики в поле распределены равномерно и представление кривой распределения $f(l)$ по дискретным отсчетам $f(l_k)$ осуществляется с помощью тригонометрических интерполяционных многочленов. При этом под граничным интервалом пространственного квантования h_o понимается некоторое расстояние между соседними датчиками в поле такое, что регистрация с интервалом $h<h_o$ не устраняет неопределенности представления кривой, обусловленной погрешностью средств регистрации. Иными словами, при регистрации с интервалом между датчиками h_o погрешность представления непрерывной кривой распределения $f(l)$ по дискретным отсчетам $f(l_k)$ не превышает погрешности измерения значений параметра в точках отсчета.

При выводе расчетных соотношений для определения величины h_o считаем известными корреляционную функцию, параметрического поля (поле параметра считается случайным) и среднеквадратичную погрешность измерения значений параметра устройством регистрации.

Как уже отмечалось выше, представление непрерывной кривой $f(l)$ распределения параметра (рассматривается одномерный случай) по совокупности дискретных отсчетов $\{f(l_k)\}$, взятых в точках поля

$$l_к = \frac{Lk}{2n+1} \tag{1}$$

осуществляется с помощью тригонометрического многочлена.

$$T_n(l) = A + \sum_{m=1}^{n} \left(a_m \cos\frac{2\pi}{L} ml + b_m \sin\frac{2\pi}{L} ml\right), \tag{2}$$

где

$$A = \frac{1}{2n+1} \sum_{\kappa=0}^{2n} f(l_\kappa),$$

$$a_m = \frac{1}{2n+1} \sum_{\kappa=0}^{2n} f(l_\kappa) \cos \frac{2\pi}{L} ml_\kappa, \tag{3}$$

$$b_m = \frac{1}{2n+1} \sum_{\kappa=0}^{2n} f(l_\kappa) \sin \frac{2\pi}{L} ml_\kappa.$$

В соотношениях (2) и (3) L — длина параметрического поля.

В практических задачах, в частности, при контроле пространственного распределения технологического параметра с помощью точечных датчиков значения $f(l_k)$ известны лишь с определенной степенью точности, поэтому коэффициенты, определяемые выражением (3), являются также приближенными величинами.

Ошибка представления функции $f(l)$ многочленам $T_n(l)$, т. е. ошибка интерполирования определяется следующим выражением [1]:

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{\kappa=n+1}^{\infty} (a_\kappa^2 + b_\kappa^2)}, \tag{4}$$

где a_κ и b_κ — коэффициенты отброшенных членов ряда. С прибавлением к ряду нового члена ошибка интерполирования уменьшается на величину

$$\delta_\kappa = \sqrt{\frac{1}{2} (a_\kappa^2 + b_\kappa^2)}. \tag{5}$$

Поскольку значения отсчетов $f(l_\kappa)$ известны лишь с определенной степенью точности, естественно произвести ограничение ряда, и при этом критерием усечения может служить то соображение, что точность интерполяции не должна превышать точности исходных данных. Учитывая это, условие ограничения ряда (2) запишем в виде

$$\delta_n = \delta_0 = \sqrt{\frac{1}{2} (a_n^2 + b_n^2)}, \tag{6}$$

где δ_0 — среднеквадратичная ошибка измерения значений параметра.

Определив из уравнения (6) величину числа n, которое определяет степень интерполяционного многочлена, можно рассчитать значение граничного интервала пространственного квантования

$$h_0 = \frac{L}{2n+1}. \tag{7}$$

Определение числа n из выражения (6) можно провести методом последовательного приближения, т. е. вычислением ряда значений δ_n так, чтобы $\delta_m > \delta_{m+1} > \delta_{m+2} \ldots > \delta_0 \geqslant \delta_n$. Число n определяется из условия $\delta_0 \geqslant \delta_n$.

Такой способ расчета достаточно сложен и не всегда выполним, однако, используя соотношение (6), можно получить более простой метод определения величины h_0. Для этой цели можно воспользоваться оценками коэффициентов a_n и b_n, которые могут быть просто получены, если заранее считать известными некоторые аналитические свойства функции $f(l)$.

При контроле пространственного параметрического поля естественно сделать следующие предположения: функция распределения $f(l)$ непрерывна на отрезке $[O, L]$ вместе с первой производной $f'(l)$, обладающей ограниченной вариацией V_1. Условие непрерывности $f'(l)$ означает непрерывность градиента в любой точке физического поля, а наличие ограниченной вариации V_1 означает, что градиент поля имеет конечное число минимумов и максимумов на отрезке $[O, L]$. Далее, полагая, что функции $f(l)$ и $f'(l)$ удовлетворяют граничным условиям

$$f(0) = f(L),$$
$$f'(0) = f'(L),$$

для коэффициентов Фурье могут быть получены следующие оценки [2]:

$$|a_n| < \frac{LV_1}{2\pi^2 n^2}, \qquad |b_n| < \frac{LV_1}{2\pi^2 n^2}, \tag{8}$$

и уравнение (6) запишется в виде

$$\delta_0^2 = \frac{L^2 V_1^2}{4\pi^4 n^4}. \tag{9}$$

Для случайного параметрического поля соответственно получим

$$\delta_0^2 = \frac{L^2 \overline{V_1^2}}{4\pi^4 n^4}. \tag{10}$$

Введем относительную среднеквадратичную ошибку регистрации

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{M\,[(\bar{f}(l) - f(l))^2]}{M\,[f(l)^2]}} = \frac{\delta_0}{\sqrt{M\,[f(l)^2]}}, \tag{11}$$

где $\bar{f}(l)$ — истинное значение функции распределения, $f(l)$ — регистрируемое значение и M — оператор математического ожидания.

Для однородного случайного поля [3]

$$M\,[\bar{f}(l)^2] = K(0), \tag{12}$$

где $K(0)$ — корреляционная функция в точке $h = 0$. При этом предполагается, что корреляционная функция определена с ошибкой, не большей ε.

Используя определение полной вариации функции на отрезке $[O, L]$ [3] и свойства корреляционной функции однородного случайного поля [4] для среднего квадрата вариации градиента поля $f'(l)$, можно получить выражение

$$\overline{V_1^2} = 8n^2\,[K^{(2)}(0) - K^{(2)}(h_0)]. \tag{13}$$

Учитывая соотношения (11), (12) и (13), уравнение (10) перепишется в виде

$$h_0^2 \left[\frac{K^{(2)}(0) - K^{(2)}(h_0)}{K(0)}\right] = \frac{\pi^4 \varepsilon^2}{8}. \tag{14}$$

В частном случае, когда корреляционная функция поля может быть представлена в виде

$$K(h) = K(0)\, e^{-\alpha|h|}\,, \tag{15}$$

уравнение (15) примет вид

$$h_0^2(1 - e^{-\alpha h_0}) = \frac{\pi^4\varepsilon^2}{8\alpha^2}. \tag{16}$$

Уравнение (17) так же, как и уравнение (15) относительно h_0, является транцендентным и может быть просто решено графически. Действительно, обозначим, например, в уравнении (17) через

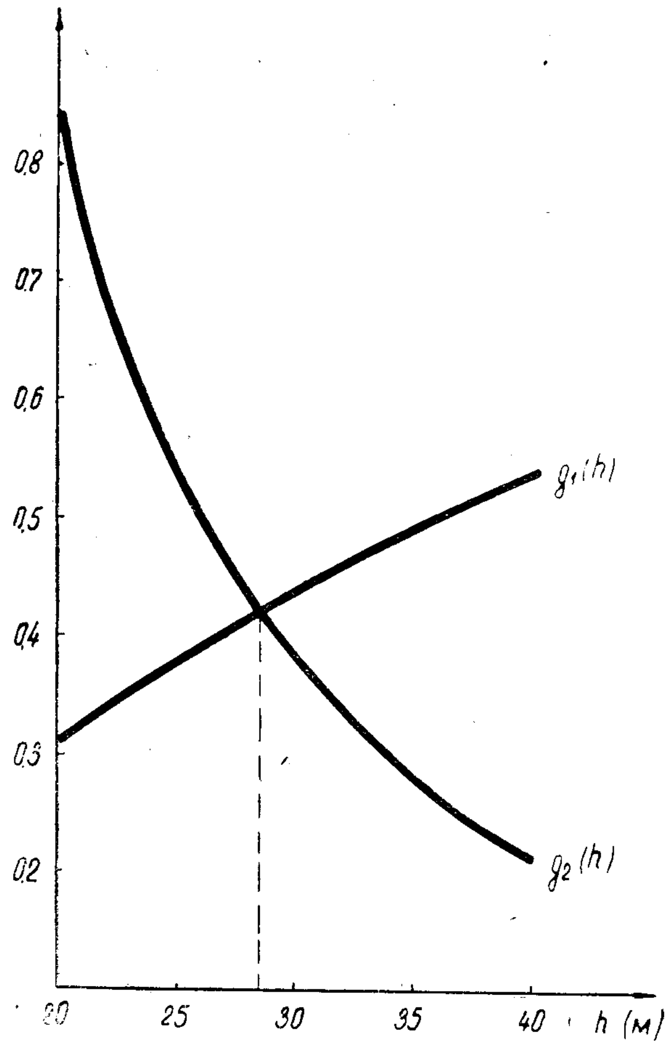

Рис. 1.

$$g_1(h) = 1 - e^{-\alpha|h|} \tag{17}$$

и

$$g_2(h) = g_0/h^2, \tag{18}$$

где

$$g_0 = \frac{\pi^4\varepsilon^2}{8\alpha^2}. \tag{19}$$

Тогда решение уравнения (17) определится из равенства этих двух функций в точке $h = h_0$, т. е.

$$g_1(h_0) = g_2(h_0).$$

Графически точка h_0 определяется пересечением на графике функций $g_1(h)$ и $g_2(h)$.

Пример. Для иллюстрации данного метода рассмотрим пример, приведенный в работе [5]. В этом примере рассчитывается расстояние между датчиками при контроле температурного поля цементно-обжигательной печи. Расчет ведется на основе представления функции распределения с помощью многочленов Лагранжа. В данном случае корреляционная функция поля представляется в виде

$$K(h) = K(0)\, e^{-0{,}019|h|}.$$

При погрешности средств регистрации $\varepsilon = 0{,}1$, $g_0 = 337$ и соответственно функции

$$g_1(h) = 1 - e^{-0{,}019|h|},$$

$$g_2(h) = 337/h^2.$$

Графики этих функций приведены на рис. 1, откуда и определяется интервал квантования $h_0 = 28{,}5$ *м* как точка их пересечения. При длине поля $L = 150$ *м* необходимое число датчиков $N = 7$.

Таким образом, для данного случая, используя показания семи датчиков в каждый момент времени с помощью тригонометрического интерполяционного многочлена (2) степени $n = 3$, можно полностью, т. е. с точностью средств регистрации представить непрерывное распределение температуры вдоль поля.

Выводы

1. Интервал квантования функции пространственного распределения параметра h^0 определяется ее структурными свойствами и среднеквадратичной погрешностью измерения.

2. Используя метод усечения ряда (2) для функции $f(l)$ и соответствующие оценки коэффициентов разложения, получено уравнение для определения граничного интервала квантования при заданной погрешности измерения ε и статистическим характеристикам параметрического поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов. Курс высшей математики. Т. 1, 2. Физматгиз, 1958.
2. Ш. Е. Микеладзе. Численные методы математического анализа. Гостехиздат, стр. 190, 1953.
3. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Физматгиз, стр. 256, 1960.
4. А. М. Яглом. Введение в теорию стационарных функций. Успехи математических наук, т. VII, вып. 5, 1952.
5. Э. Л. Ицкович. Определение расстояния между датчиками при контроле пространственно распределенных полей. «Автоматика и телемеханика», т. XXIV, № 2, 1963.