

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ИЗМЕРЕНИЕМ ТВЕРДОСТИ

Г. Д. ДЕЛЬ

(Представлена научным семинаром кафедры сопротивления материалов).

Известно [1, 2, 3], что в процессе пластической деформации твердость деформируемого тела возрастает. Установлено [2], что кривые «интенсивность касательных напряжений κ — твердость H », построенные по результатам испытания материала на растяжение, сжатие и кручение, совпадают. Отсюда было сделано предположение о возможности определения κ по твердости и в случае сложного напряженного состояния.

В подтверждение этого предположения можно привести также результаты экспериментов Бриджмена [1], показавшие, что гидростатическое давление практически не влияет на твердость.

Наличие связи между напряжениями и твердостью уже достаточно широко используется при исследовании пластической деформации. Для этого путем испытания на растяжение, сжатие или кручение и параллельного измерения твердости строят тарировочный график «твердость — напряжение». Затем на различных стадиях деформации в различных точках исследуемого тела или модели измеряется твердость. По тарировочному графику получают соответствующую ей интенсивность касательных напряжений, а по кривой течения — соответствующую интенсивность деформаций. В случае линейного напряженного состояния получают полную информацию о напряженно-деформированном состоянии. В случае сложного напряженного состояния информация является весьма ограниченной.

1. Предлагается метод расшифровки, позволяющий по известной в различных точках исследуемого тела интенсивности касательных напряжений κ , установленной измерением твердости, определить напряженное и кинематическое состояние деформируемого тела.

Компоненты напряжений удовлетворяют уравнению

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) = 6\kappa^2(x, y, z, q). \quad (1.1)$$

Здесь параметр q характеризует стадию деформации исследуемого тела. Например, при осевом сжатии в качестве q может фигурировать осадка, переменная высота и т. д. Функцию $\kappa(x, y, z, q)$ будем в дальнейшем считать известной.

Совместно с (1.1) предлагается рассматривать систему дифференциальных уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

и соотношения теорий течения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} &= \lambda (\sigma_x - \sigma), \dots \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= \lambda \tau_{xy}, \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Здесь v_x, v_y, v_z — компоненты вектора скорости перемещения частиц, σ — гидростатическое давление, λ — неизвестный параметр.

Для определения 10 неизвестных $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, v_x, v_y, v_z, \lambda$ имеем 10 уравнений (1.1) — (1.3).

Укажем на определенную аналогию с оптическим методом, при котором экспериментально устанавливается величина разности и направление главных напряжений. Для определения напряженного состояния решаются при этих данных дифференциальные уравнения равновесия. Деформации находят по закону Гука.

Так как систему (1.1) — (1.3) практически приходится решать при фиксированном параметре q , рассматриваемая задача формально совпадает с задачей о неоднородном идеально пластическом теле при условии пластичности Мизеса. Однородному неупрочняющемуся телу соответствует частный случай, когда $\kappa = const.$

Заметим, что вместо соотношений (1.3), когда это оказывается оправданным, можно использовать соответствующие соотношения деформационных теорий.

Перейдем к рассмотрению частных случаев.

2. Кручение. В случае чистого кручения $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ и в силу этого уравнения (1.1), (1.2) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 &= \kappa^2 (x, y, q) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

(ось z совмещена с осью скручиваемого стержня).

Введем функцию напряжений F , положив

$$\tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (2.2)$$

Тогда одно из уравнений (2.1) удовлетворится автоматически, другое примет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 = \kappa^2. \quad (2.3)$$

Как и в случае идеально пластического тела, уравнение (2.3) является уравнением гиперболического типа.

Линии $F = \text{const}$ называют линиями напряжений. Линией напряжений, в частности, является контур закручиваемого стержня. Линии, нормальные к линиям напряжений, называют нормальными. Нормали являются характеристиками уравнения (2.3).

Располагая системой линий напряжений, легко получить в каждой точке поперечного сечения стержня касательные напряжения:

$$\tau_{xz} = \pm \kappa \sin \varphi, \quad \tau_{yz} = \mp \kappa \cos \varphi, \quad (2.4)$$

где φ — угол между нормалью и осью x . Выбор знака определяется направлением закручивания. Поэтому для расшифровки в данном случае достаточно построить на поперечном сечении стержня систему линий напряжений. Нормали являются проекциями на поперечное сечение линий наибольшего ската поверхности $z = F(x, y)$. Касательные к линиям наибольшего ската образуют с плоскостью поперечного сечения угол α , тангенс которого согласно (2.3) $\text{tg } \alpha = \kappa$. Это обстоятельство может быть использовано для построения семейства линий напряжений.

Построим контур поперечного сечения закрученного образца. Зададимся ΔF — разностью значений функции F между соседними линиями напряжений. В различных точках контура проведем к нему нормали и отложим вдоль них в направлении к центру сечения отрезки длиной

$$h = \frac{\Delta F}{\text{tg } \alpha} = \frac{\Delta F}{\kappa}. \quad (2.5)$$

Соединяя концы этих отрезков плавной кривой, получаем линию напряжений. Повторяя в дальнейшем эту операцию, можно построить семейство линий напряжений.

Построив семейство линий напряжений при различной величине относительного угла закручивания, который в данном случае может служить в качестве параметра φ , можно получить представление о напряженном состоянии при кручении упрочняющихся стержней.

Для определения деформированного состояния в данном случае оказывается возможным использование соотношений деформационных теорий [4].

На рис. 1 приведено распределение $\kappa(x, y)$ при кручении трехгранной призмы из стали X13 до относительного угла закручивания 15 1/м и

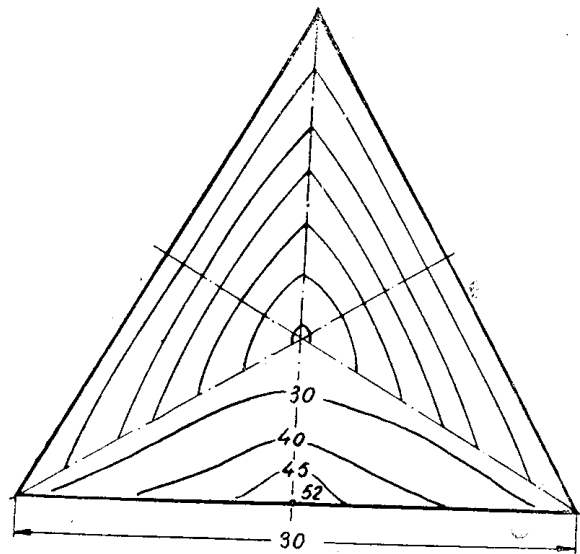


Рис. 1. Кручение трехгранной призмы.

соответствующая система линий напряжений. Поверхность напряжений существенно отличается от пирамиды, имеющей место при отсутствии упрочнения. Линии напряжений искривляются, расстояние между ними при движении к центру увеличивается. Расчет был проверен по крутящему моменту. Момент, найденный приближенным интегрированием

$$M = 2 \iint F dx dy, \quad (2.6)$$

отличался от действительного на 3%.

3. Плоская деформация. При плоской деформации перемещения частиц тела происходят в одной плоскости. Направим ось z по нормали к этой плоскости. Тогда скорость v_z и компоненты напряжений τ_{xz} , τ_{yz} будут равны нулю, а неравные нулю компоненты вектора скорости и тензора напряжений не зависят от z .

Из условия несжимаемости следует [4]

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \sigma. \quad (3.1)$$

В силу этого уравнение (1.1) упрощается

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\kappa^2(x, y, q). \quad (3.2)$$

Уравнения равновесия в случае плоской деформации

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим методику решения системы (3.2)—(3.3) методом линий скольжения.

Линиями скольжения называются линии, в каждой точке касающиеся площадки максимального касательного напряжения. Имеется два ортогональных семейства линий скольжения. Назовем одно из них семейством α , другое — семейством β . Направление линий α , β будем фиксировать так, чтобы они образовывали правую систему координат, в которой касательное напряжение имело бы положительное направление. Угол наклона касательной к линии α , отсчитываемый в положительном направлении от оси x , обозначим через Θ .

По известным соотношениям

$$\sigma_x = \sigma - \kappa \sin 2\Theta, \quad \sigma_y = \sigma + \kappa \sin 2\Theta, \quad \tau_{xy} = \kappa \cos 2\Theta \quad (3.4)$$

перейдем к новым переменным σ и Θ . Уравнение (3.2) при этом удовлетворится автоматически, а (3.3) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} - 2\kappa \cos 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} - 2\kappa \sin 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= \sin 2\Theta \frac{\partial \kappa}{\partial x} - \cos 2\Theta \frac{\partial \kappa}{\partial y} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} - 2\kappa \sin 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\kappa \cos 2\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial y} &= -\cos 2\Theta \frac{\partial \kappa}{\partial x} - \sin 2\Theta \frac{\partial \kappa}{\partial y} \end{aligned} \right\}. \quad (3.5)$$

(3.5) является системой гиперболического типа, характеристики ее совпадают с линиями скольжения [5].

Перейдем к локальной системе координат, образованной касательными к линиям скольжения. При этом $\Theta = 0$, поэтому имеем

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(\sigma - 2\kappa\Theta) = -\frac{\partial \kappa}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial}{\partial \beta}(\sigma + 2\kappa\Theta) = -\frac{\partial \kappa}{\partial \alpha}, \quad (3.6)$$

где $\frac{\partial}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial}{\partial \beta}$ — производные вдоль линий α , β . Следовательно, вдоль линий скольжения α , β имеем соответственно:

$$\frac{\sigma}{2\kappa} - \Theta = -A_\alpha, \quad \frac{\sigma}{2\kappa} + \Theta = -A_\beta. \quad (3.7)$$

Здесь положено

$$A_\alpha = \frac{1}{2\kappa} \int_\alpha \frac{\partial \kappa}{\partial \beta} d\alpha, \quad A_\beta = \frac{1}{2\kappa} \int_\beta \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} d\beta. \quad (3.8)$$

Рассмотрим приемы численного решения основных краевых задач, основанные на соотношениях (3.7) и замене интегралов (3.8) конечной суммой. При этом будем считать производные $dk/d\alpha$ и $dk/d\beta$ неразрывными.

1. **Задача Коши.** Функции ε и Θ заданы на некоторой дуге гладкой кривой AB , не имеющей характеристических направлений ни в одной точке и лежащей в плоскости деформации. Требуется найти решение системы (3.5), удовлетворяющее на дуге AB заданным значениям ε и Θ . Искомое решение существует и единственно в треугольной области, ограниченной дугой AB (рис. 2) и линиями скольжения α, β , исходящими из ее концов.

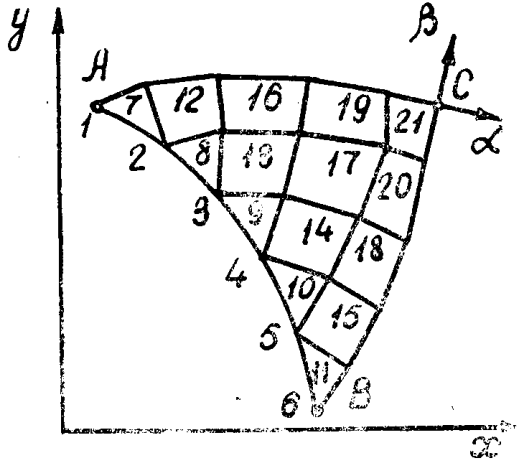


Рис. 2.

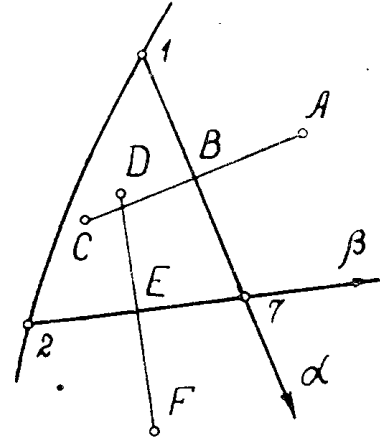


Рис. 3.

Разделим дугу AB на ряд достаточно малых частей точками $1, 2, 3, \dots, 6$. По (3.7) найдем A_x и A_β в этих точках. Исходя из известных Θ графически или по уравнениям

$$y_7 - y_2 = -\operatorname{ctg} \Theta_2 (x_7 - x_2), \quad y_7 - y_1 = \operatorname{tg} \Theta_1 (x_7 - x_1) \quad (3.9)$$

найдем положение точек $7, 8, \dots, 11$. Далее находим (см. рис. 3)

$$\left. \begin{aligned} (A_x)_7 &= (A_x)_1 + \frac{\kappa_A - \kappa_C}{2\kappa_7 \Delta l} \cdot l_{1-7} \\ (A_\beta)_7 &= (A_\beta)_2 + \frac{\kappa_F - \kappa_D}{2\kappa_7 \Delta l} \cdot l_{2-7} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Здесь l_{1-7}, l_{2-7} — расстояния между точками 1 и $7, 2$ и 7 . Отрезки AC и DF перпендикулярны к $1-7, 2-7$ и проходят через их середину, причем $AB = BC = DE = EF = \frac{\Delta l}{2}$. По формулам

$$\varepsilon = \kappa (-A_x - A_\beta), \quad \Theta = \frac{1}{2} (A_x - A_\beta), \quad (3.11)$$

следующим из (5.7), найдем ε_7 и Θ_7 . Аналогично найдем ε и Θ в точках $8, 9, 10, 11$. Теперь ряд точек $7, 8, 9, 10, 11$ рассматриваем как исходный и продолжаем решение, и т. д. по всей области.

Уточнить полученное решение можно введя в (3.9) вместо углов Θ_1 и Θ_2 средние углы $\frac{1}{2} (\Theta_1 + \Theta_7)$ и $\frac{1}{2} (\Theta_2 + \Theta_7)$.

2. **Начальная характеристическая задача.** Требуется найти решение системы (3.5), если неизвестные функции даны вдоль двух ортогональных отрезков линий скольжения OA и OB (рис. 4). Решение определено в области $OACB$.

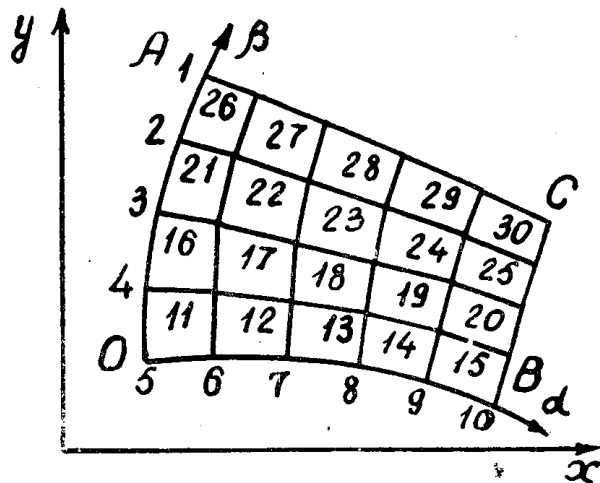


Рис. 4.

Разобьем отрезки OA и OB на ряд достаточно малых. На рис. 3 это выполнено точками 1, 2, 3, ..., 10. По (3.7) найдем A_x и A_z в этих точках. Положение точки 11 и значения σ , θ , A_x , A_z в ней находятся по известным θ , A_x , A_z в точках 4 и 6, как и в случае задачи Коши.

Аналогично определяются точки 12, 13, ..., 16, 17 и т. д. во всей области.

Рассмотрим вырожденный случай этой задачи, когда отрезок линии скольжения OB стягивается в точку O (рис. 5). Даны угол раствора в точке O (т. е. угол AOC) и вдоль отрезка линии скольжения OA σ и θ . Требуется найти решение системы (3.5), удовлетворяющее этим данным. Решение определено в области OAE .

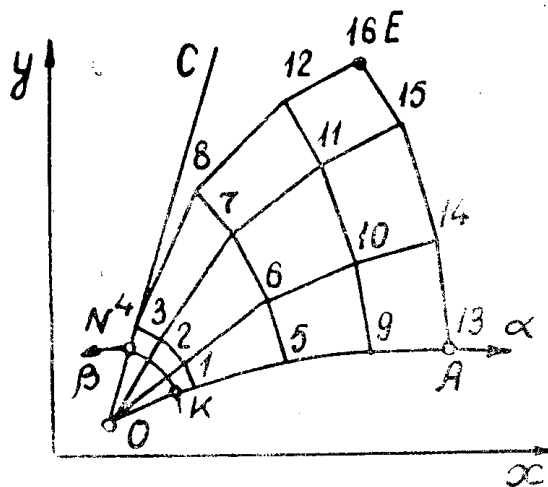


Рис. 5.

Пусть OA будет отрезком линии скольжения α . Тогда в точке O радиус кривизны линии β $R_\beta = 0$. Так как

$$\frac{1}{R_\beta} = -\frac{\partial \theta}{\partial \beta}, \quad (3.12)$$

из (3.6) при этом следует, что в точке O σ разрывно.

В точке N согласно (3.8)

$$(A_\beta)_N = (A_\beta)_K + \frac{1}{2\kappa_N} \int_K^N \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} d\beta. \quad (3.13)$$

Устремим точку K к узлу O . Тогда в силу непрерывности $\partial \kappa / \partial \alpha$ второе слагаемое в (3.13) устремится к нулю. Следовательно, инте-

грал A_3 в точке O одинаков у всех линий скольжения α , проходящих через эту точку. Если в точку стягивается отрезок линии скольжения α , общим является интеграл A_α .

Разобьем отрезок OA на ряд достаточно малых точками $0, 1, 5, \dots$. Найдем в этих точках A_3 . Разделим угол OAC на ряд малых лучами $01, 02, \dots$. Определим углы Θ , соответствующие этим лучам в точке O . По ним и известному A_3 найдем в этой точке A_α для каждого луча. Затем по известному в точке 1 Θ находим положение точки 2 . По формулам, аналогичным (5.10), находим в этой точке A_α , A и по (3.11) Θ и ε . Аналогично определяем точки 3 и 4 . В дальнейшем задача решается как в общем случае начальной характеристической задачи.

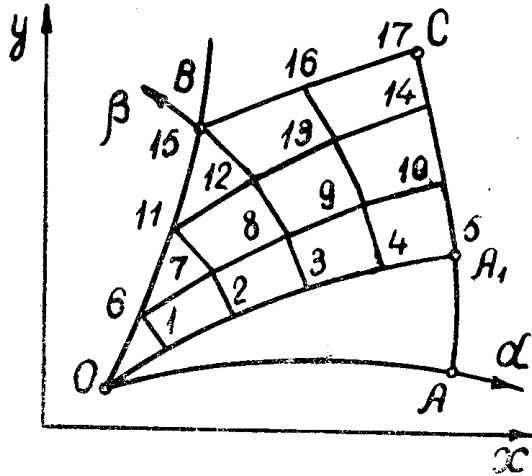


Рис. 6.

3. **Смешанная задача.** Задача заключается в отыскании решения системы (3.5), если вдоль отрезка линии скольжения OA (рис. 6) даны σ и Θ и вдоль кривой OB , не имеющей характеристических направлений, задан угол Θ . Решение задачи существует и единственно в области OAA_1CB .

По значению Θ в точке O отрезка OB определяем угол AOA_1 (предполагается, что он является острым). В области треугольника AOA_1 решение строится, как в вырожденном случае начальной характеристической задачи. Затем делим отрезок OA_1 на ряд малых частей точками $0, 1, 2, \dots$. Построение начинаем с точки 1 . Проведя из нее луч под углом $\frac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_0)$

к оси y (в общем случае, когда Θ изменяется вдоль OB , это может быть достигнуто рядом последовательных приближений), находим положение точки 6 . A_3 в ней определяем по известному A_3 в точке 1 . По известным Θ и A_3 находим A_α и ε . Точка 7 определяется, как в случае начальной характеристической задачи. Точка 11 определяется, как точка 6 , и т. д.

Поле скоростей определяется по известному полю напряжений так же, как и в случае идеально пластического тела. Если исходить из гипотезы о единой кривой течения „интенсивность касательных напряжений κ — интенсивность деформаций e_i “, то по твердости можно определить величину e_i . Располагая известной e_i и исходя из условия несжимаемости, можно в любой точке найти величину главных логарифмических деформаций e_1 и e_2 . Действительно, из системы

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + e_1^2 + e_2^2} = e_i, \quad e_1 + e_2 = 0 \quad (3.14)$$

находим

$$e_1 = -e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_i. \quad (3.15)$$

Для определения направлений этих деформаций требуются дополнительные условия. Направления главных деформаций известны, на-

пример, вдоль осей симметрии — одно из направлений совпадает с осью, другое — перпендикулярно к ней.

Разработанная методика успешно опробована при исследовании напряженно-деформированного состояния цилиндра, сжатого в радиальном направлении.

4. Осесимметричная деформация. Осесимметричная деформация возникает при нагружении тела, имеющего ось симметрии, осесимметричной нагрузкой.

В цилиндрической системе координат (ось z совмещена с осью симметрии) компоненты напряжений и скорости не зависят от полярного угла φ , причем $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = v_{\varphi} = 0$. Задача является статически неопределенной, решение ее весьма затруднительно. Ограничимся рассмотрением методики исследования напряженного состояния в предположении Хаара — Кармана о равенстве окружного напряжения одному из главных напряжений в меридиональных плоскостях ($\sigma_{\varphi} = \sigma_z$), широко используемом в инженерной теории пластичности. В этом предположении А. Ю. Ишлинским [6] и позднее Шилдом [7] исследована задача об осесимметричной деформации идеально пластичного материала.

Уравнение (1.1), записанное в главных напряжениях, принимает вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 3\kappa^2. \quad (4.1)$$

После подстановки известных соотношений для главных напряжений имеем

$$(\sigma_z - \sigma_r)^2 + 4\tau_{rz}^2 = 3\kappa^2(r, z, q) \quad (4.2)$$

Уравнения равновесия при осесимметричной деформации

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_z}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (4.3)$$

По соотношениям [7]

$$\begin{aligned} \sigma_r &= p - \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa \sin 2\theta, & \sigma_z &= p + \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa \sin 2\theta, \\ \tau_{rz} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa \cos 2\theta, & \sigma_z &= p \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \kappa \end{aligned} \quad (4.4)$$

перейдем к новым переменным — нормальному давлению

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \quad (4.5)$$

и углу θ между касательной к линии скольжения α и осью x . Уравнение (4.2) удовлетворяется при этом тождественно, а (4.3) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial p}{\partial r} - \sqrt{3} \kappa \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} - \sqrt{3} \kappa \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} = \\ & = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \kappa}{\partial r} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta \frac{\partial \kappa}{\partial z} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\kappa}{r} (\pm 1 + \sin 2\theta), \\ & \frac{\partial p}{\partial z} - \sqrt{3} \kappa \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} + \sqrt{3} \kappa \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} = \\ & = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2\theta \frac{\partial \kappa}{\partial r} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\theta \frac{\partial \kappa}{\partial z} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\kappa}{r} \cos 2\theta. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Уравнения (4,6) отличаются от аналогичных уравнений, записанных для идеально пластического материала, только правой частью. Так как правая часть дифференциальных уравнений не влияет ни на тип уравнений, ни на направление характеристик, система (4,6), как и в случае идеально пластического материала, является системой гиперболического типа. Характеристики ее совпадают с линиями скольжения.

В локальной системе координат, образованной касательными к линиям скольжения, имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} (p - \sqrt{3} \kappa \Theta) &= \frac{\sqrt{3} \kappa}{2 r} (\sin \Theta \pm \cos \Theta) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \kappa}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (p \pm \sqrt{3} \kappa \Theta) &= -\frac{\sqrt{3} \kappa}{2 r} (\cos \Theta \pm \sin \Theta) - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \kappa}{\partial \alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Проинтегрировав уравнения (4.7), получаем соотношения на линиях скольжения:

$$\frac{p}{\sqrt{3} \kappa} - \Theta = -A_\alpha, \quad \frac{p}{\sqrt{3} \kappa} + \Theta = -A_\beta, \quad (4.8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_\alpha &= \frac{1}{2\kappa} \int_\alpha \left[\frac{\partial \kappa}{\partial \beta} - \frac{\kappa}{r} (\sin \Theta \pm \cos \Theta) \right] dz, \\ A_\beta &= \frac{1}{2\kappa} \int_\beta \left[\frac{\partial \kappa}{\partial \alpha} + \frac{\kappa}{r} (\cos \Theta \pm \sin \Theta) \right] d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Решение краевых задач в рассматриваемом случае может строиться так же, как и в случае плоской деформации. Вместо соотношений (3.10) можно рекомендовать следующие:

$$\left. \begin{aligned} (A_\alpha)_7 &= (A_\alpha)_1 + \frac{l_{1-7}}{2\kappa_7} \left[\frac{\kappa_A - \kappa_C}{\Delta l} - \frac{\kappa_B}{r_B} (\sin \Theta_1 \pm \cos \Theta_1) \right], \\ (A_\beta)_7 &= (A_\beta)_2 + \frac{l_{2-7}}{2\kappa_7} \left[\frac{\kappa_F - \kappa_D}{\Delta l} + \frac{\kappa_E}{r_E} (\cos \Theta_2 \pm \sin \Theta_2) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Нормальное давление и угол Θ определяются по известным A_α , A_β

$$p = \sqrt{3} \kappa (-A_\alpha - A_\beta), \quad \Theta = \frac{1}{2} (A_\alpha - A_\beta). \quad (4.11)$$

По этой методике были получены эпюры напряжений в шейке растянутого образца.

Таким образом, располагая необходимым набором граничных условий и определив в различных точках повышенный за счет наклепа предел текучести, можно в рассмотренных случаях определить напряженно-деформированное состояние при пластической деформации упрочняющегося тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Бриджмен. Исследование больших пластических деформаций и разрыва, Москва, 1955.
2. А. М. Розенберг, Л. А. Хворостухин. ЖТФ, т. XXV, вып. 2, 1955.
3. Г. А. Смирнов-Аляев. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Москва, 1962.
4. Л. М. Качанов. Основы теории пластичности. М., 1956.
5. А. И. Кузнецов. Вестник ЛГУ, № 13, 1958.
6. А. Ю. Ишлинский. Прикладная математика и механика, т. VII, в. 3, 1944.
7. Шилд. Механика, 1, 41, 1957.