

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДВУХМЕРНОГО  
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ОБМОТКАХ И СЕРДЕЧНИКАХ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН

Д. И. САННИКОВ

(Представлена научным семинаром кафедр электрических машин  
и общей электротехники)

При тепловых расчетах электрических машин и трансформаторов оказывается необходимым знать во многих случаях характер распределения температуры внутри обмоток и сердечников. Большинство таких задач может быть сведено к расчету двухмерного температурного поля с использованием приближенных методов.

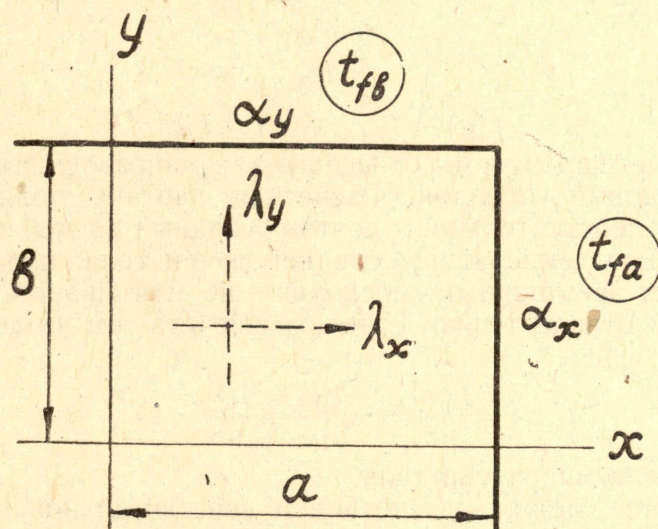


Рис. 1. Размеры и тепловые параметры тела.

Рассмотрим некоторые из этих методов на примере расчета температуры  $t(x, y)$  бруса (рис. 1) с распределенными источниками тепла  $q$ , имеющего различные размеры ( $a, b$ ), коэффициенты теплопроводности ( $\lambda_x, \lambda_y$ ) и теплоотдачи с поверхности ( $\alpha_x, \alpha_y$ ) вдоль координатных осей при различной температуре охлаждающей среды у поверхностей  $|x|=a - t_{fa}$  и  $|y|=b - t_{fb}$ . Данная задача имеет точное решение в виде функционального ряда, расчет которого представляет значительную трудоемкость.

Все приближенные методы основаны на введении упрощающих допущений при решении уравнения Пуассона

$$\lambda_x \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} + q = 0, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$-\lambda_x \frac{\partial t(a, y)}{\partial x} = \alpha_x [t(a, y) - t_{fa}], \quad (2)$$

$$-\lambda_y \frac{\partial t(x, b)}{\partial y} = \alpha_y [t(x, b) - t_{fb}].$$

**1 метод.** В случае  $\lambda_x \gg \lambda_y$  возможно простейшее допущение  $\lambda_y = 0$ , в результате которого задача сводится к одномерной

$$\lambda_x \frac{d^2 t(x)}{dx^2} + q = 0, \quad (3)$$

$$-\lambda_x \frac{dt(a)}{dx} = \alpha_x [t(a) - t_{fa}], \quad (4)$$

решением которой служит парабола

$$t(x) = q \left( \frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right). \quad (5)$$

Такое же допущение можно принять в одном из следующих случаев

$$b \gg a;$$

$$\alpha_x \gg \alpha_y;$$

$$t(a) - t_{fa} \gg t(b) - t_{fb},$$

если остальные параметры, отнесенные к направлениям обеих осей, имеют одинаковый порядок. Расчетная картина поля качественно отличается от действительной, поэтому данный метод позволяет рассчитывать только температуру средней точки тела; причем ее значение получается завышенным, поскольку не учитывается один из возможных путей отвода тепла. Точность расчета тем выше, чем больше соотношение

$$\frac{\bar{t} - t_{fa}}{\bar{t} - t_{fb}} \cdot \frac{b/\lambda_y + 1/\alpha_y}{a/\lambda_x + 1/\alpha_x}, \quad (6)$$

где  $\bar{t}$  — средняя температура тела.

Расхождение между расчетной и действительной картиной поля уменьшается с уменьшением критерия Био для координаты  $y$

$$Bi_y = \frac{\alpha_y b}{\lambda_y}.$$

**2 метод.** Приближенный учет теплового потока, отводимого в направлении оси  $y$ , дает картину поля, более близкую к реальной. В простейшем случае принимается

$$\frac{\lambda_x \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2}}{\lambda_y \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2}} = \frac{q_x}{q_y} = \xi = \text{const}, \quad (8)$$

$$q_x + q_y = q,$$

то есть тепловые потери, выделяющиеся в каждой единице объема, разделяются на две части, одна из которых  $q_x$  отводится в направлении, параллельном оси  $x$ , другая  $q_y$  — вдоль оси  $y$ , причем соотношение этих частей  $\xi$  для всех точек тела одинаково. При этом задача сводится к расчету двух одномерных полей. Решение имеет вид — для передачи тепла в направлении  $x$

$$t(x, y) = q_x \frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + t(a, y), \quad (10)$$

для передачи тепла в направлении  $y$

$$t(x, y) = q_y \frac{b^2 - y^2}{2\lambda_y} + t(x, b).$$

Оба решения должны быть идентичными, следовательно,

$$t(a, y) = q_y \frac{b^2 - y^2}{2\lambda_y} + t(a, b), \quad (11)$$

$$t(x, b) = q_x \frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + t(a, b).$$

Расчетная картина поля в сечениях  $x = \text{const}$  имеет форму парабол одинаковой кривизны, то же самое справедливо и для сечений  $y = \text{const}$ . В этом состоит ее принципиальное отличие от действительной картины поля, для которой средняя кривизна профилей  $t(x)$  при  $y \rightarrow b$  и  $t(y)$  при  $x \rightarrow a$  уменьшается. Полученное искажение вызвано, главным образом, нарушением граничных условий. Плотность теплового потока через наружные поверхности тела в расчете считается постоянной

$$w_x = q_x a, \quad (12)$$

$$w_y = q_y b.$$

С другой стороны, на основании граничных условий

$$w_x(y) = \alpha_x [t(a, y) - t_{fa}] \neq \text{const}, \quad (13)$$

аналогично для  $w_y(x)$ . Таким образом, на поверхностях тела получается разрыв плотности теплового потока.

Упрощение граничных условий в целях разрешения данного противоречия производится двумя способами:

а) согласно [1], плотность теплового потока определяется по максимальной температуре на поверхности

$$q_x a = \alpha_x [t(a, 0) - t_{fa}], \quad (14)$$

$$q_y b = \alpha_y [t(0, b) - t_{fb}];$$

б) согласно [2] — по средней температуре

$$q_x a = \alpha_x \left[ \frac{1}{b} \int_0^b t(a, y) dy - t_{fa} \right], \quad (15)$$

$$q_y b = \alpha_y \left[ \frac{1}{a} \int_0^a t(x, b) dx - t_{fb} \right].$$

На основании выражений (11), (12), (14) и (15) выводится формула для расчета  $\xi$ : при первом способе

$$\xi = \frac{q \left( \frac{b^2}{2\lambda_y} + \frac{b}{\alpha_y} \right) + t_{fb} - t_{fa}}{q \left( \frac{a^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right) + t_{fa} - t_{fb}}, \quad (16)$$

при втором способе вместо 2 в знаменателях получается 3. Далее, определив

$$q_x = q \frac{\xi}{\xi + 1}, \quad (17)$$

$$q_y = q \frac{1}{\xi + 1},$$

можно рассчитать температурное поле

$$t(x, y) = t_0 - q_x \frac{x^2}{2\lambda_x} - q_y \frac{y^2}{2\lambda_y}, \quad (18)$$

где  $t_0$  — температура в центре тела.

При первом способе

$$t_0 = q_x \left( \frac{a^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right) + t_{fa}, \quad (19)$$

при втором способе  $t_0$  больше на величину  $q_y b^2 / 6\lambda_y$ .

Погрешность метода, основанного на допущении  $\xi = \text{const}$  меньше, чем при допущении  $\lambda_y = 0$  или  $q_y = 0$ , однако, чрезмерно велика при больших значениях критерия Био. Расчет теплоотдачи с поверхности по максимальной температуре (первый способ) дает заниженные результаты, расчет по средней температуре (второй способ) — завышенные. Наибольшее искажение поля получается в периферийных частях тела.

**3 метод.** Значительное повышение точности приближенного расчета обеспечивается при допущении

$$\frac{\lambda_x \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2}}{\lambda_y \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2}} = \frac{q_x(y)}{q_y(y)} = \xi(y), \quad (20)$$

при условии

$$Bi_y = \frac{\alpha_y b}{\lambda_y} > Bi_x = \frac{\alpha_x a}{\lambda_x}. \quad (21)$$

Таким образом, принимается, что соотношение между стоком тепла в направлениях  $x$  и  $y$  одно и то же для всех точек прямой  $y = \text{const}$ , проведенной в направлении наибольшей теплопроводности, но различно для различных положений этой прямой.

Для всех точек при  $y = \text{const}$

$$q_x(y) = \text{const}.$$

Точно учитывая граничные условия на поверхности  $x = a$ , имеем

$$t(x, y) = q_x(y) \cdot \left( \frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right) + t_{fa} \quad (22)$$

— параболическое распределение вдоль направления  $x$ , причем кривизна парабол различна для различных значений  $y$ .

На основании энергетического баланса для элементарного слоя  $dy$  получаем

$$q_y(y) = -\lambda_y \frac{d^2 \bar{t}(y)}{dy^2}, \quad (23)$$

где

$$t(y) = \frac{1}{a} \int_0^a t(x, y) dx$$

— средняя температура по линии  $y = \text{const}$ .

Из (22)

$$\bar{t}(y) = q_x(y) \cdot r + t_{fa}, \quad (24)$$

где

$$r = \frac{a^2}{3\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x}. \quad (25)$$

Отсюда

$$q_y(y) = q - q_x(y) = q - \frac{\bar{t}(y) - t_{fa}}{r}. \quad (26)$$

На основании выражений (23) и (26) задача сводится к расчету нагрева однородного стержня с распределенными по длине источниками тепла, охлаждаемого по длине и с торцов,

$$\lambda_y \frac{d^2 \bar{t}(y)}{dy^2} - \frac{\bar{t}(y)}{r} + \left( q + \frac{t_{fa}}{r} \right) = 0, \quad (27)$$

$$-\lambda \frac{d\bar{t}(y)}{dy} = \alpha_y [\bar{t}(b) - t_{fb}]. \quad (28)$$

Решение задачи

$$\bar{t}(y) = qr \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t_{fa} - t_{fb}}{qr} \right) \frac{\text{ch } \beta y}{N} \right] + t_{fa}. \quad (29)$$

Здесь

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{r\lambda_y}}, \quad (30)$$

$$N = \text{ch } \beta b + \frac{\lambda_y b}{\alpha_y} \text{ch } \beta b. \quad (31)$$

Определяя из (29) и (24)  $q_x(y)$  и подставляя в (22), получаем полное приближенное решение

$$t(x, y) = q \left[ 1 - \left( 1 + \frac{t_{fa} - t_{fb}}{qr} \right) \frac{\text{ch } \beta y}{N} \right] \cdot \left( \frac{a^2 - x^2}{2\lambda_x} + \frac{a}{\alpha_x} \right) + t_{fa}. \quad (32)$$

В отличие от двух предыдущих методов, граничные условия выполняются точно на поверхностях  $|x| = a$ , а при условии  $t_{fa} = t_{fb}$  также и на поверхностях  $|y| = b$ .

На рис. 2 приводятся результаты расчета температурного поля в сечении бруса при  $a = 15$  см,  $b = 10$  см,  $\lambda_x = 20$  вт/см. град,  $\lambda_y = 0,014$  вт/см. град,  $\alpha_x = \alpha_y = 0,01$  вт/см<sup>2</sup>. град,  $q = 0,02$  вт/см<sup>2</sup>,  $t_{fa} = t_{fb} = 0$ .

Сплошные кривые представляют результат точного решения. Результаты приближенного расчета показаны точками.

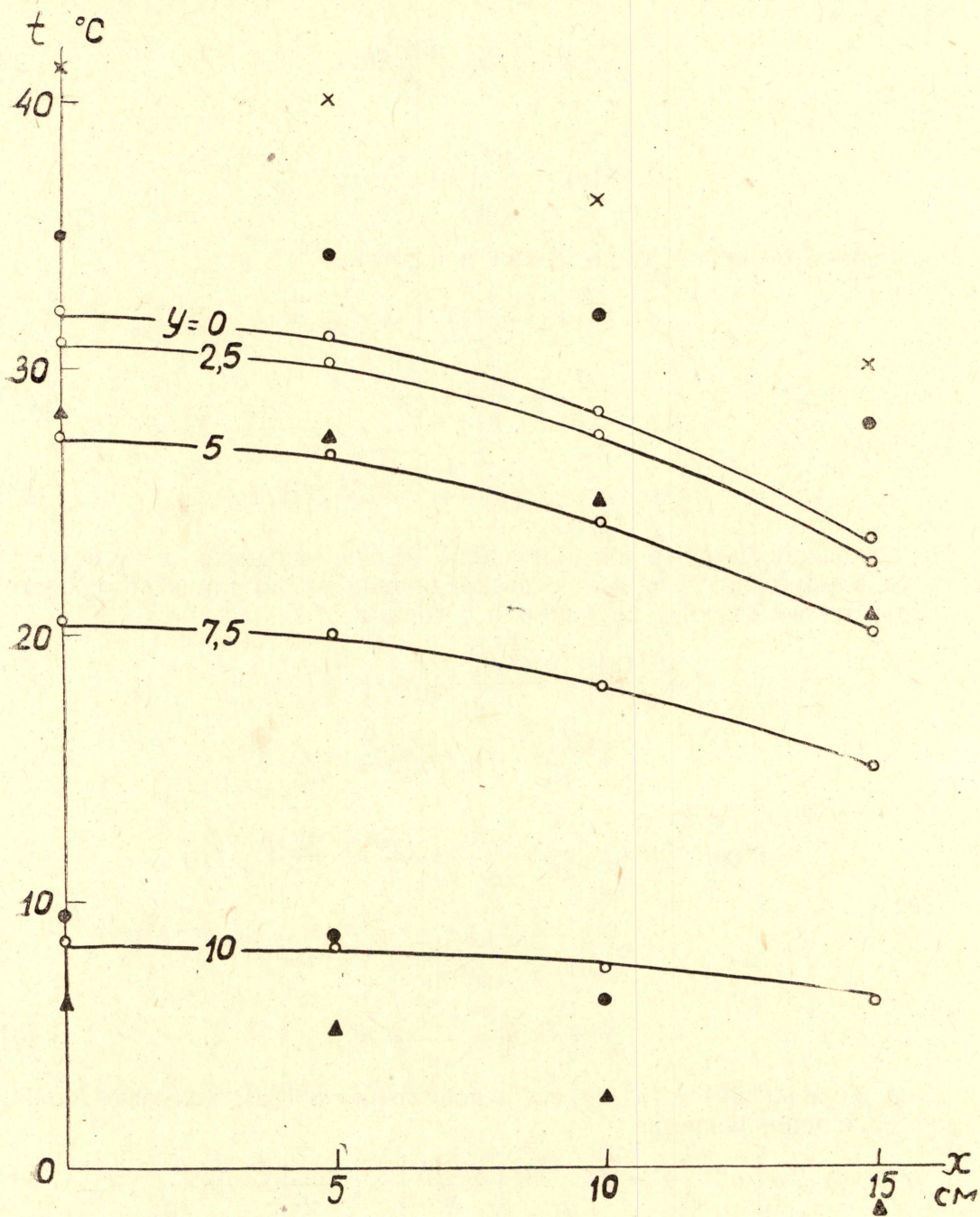


Рис. 2. Результаты расчета температурного поля.

- точное решение;
- × — 1 метод (при допущении  $\lambda_y = 0$ );
- Δ — 2 метод (при допущении  $\xi = \text{const}$ ; граничные условия по [1]),  $y = 0$  и 10;
- — 2 метод (граничные условия по [2]),  $y = 0$  и 10;
- — 3 метод (при допущении  $\xi = f(y)$ ).

Третий метод приближенного расчета — по формуле (32) обеспечивает наибольшую точность по сравнению с остальными. Максимальное отклонение от данных точного расчета в данном примере составляет  $\pm 0,7\% t_0$ ; форма профилей температурного поля не искажена.

Таким образом, принцип приближенного расчета температурного поля, основанный на допущениях (20) и (23), является наиболее эффективным и может быть рекомендован для расчета в более сложных случаях.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Готтер. Нагревание и охлаждение электрических машин. ГЭИ, 1961.
  2. Г. П. Бойков, Ю. А. Короленко. К вопросу о температурном поле тел с внутренним тепловыделением. «Известия ТПИ», т. 110, Томск, 1962.
-