

КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ВИБРАТОРА,  
РАБОТАЮЩЕГО ОТ ИСТОЧНИКА  
СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ БЕЗ ВЫПРЯМИТЕЛЯ

Ю. Я. КОВЫЛИН

(Представлена научным семинаром кафедр факультета автоматических систем)

На рис. 1 показан простейший электромагнитный вибратор, состоящий из ферромагнитного якоря 1, укрепленного на пружине 2, и электромагнита 3. Обмотка электромагнита питается от источника синусоидального напряжения.

Исходную систему дифференциальных уравнений можно записать в следующем виде:

$$U_M \cos(\omega t + \psi) = Ri + \frac{d}{dt}(Li), \quad (1)$$

$$iU_M \cos(\omega t + \psi) dt = Ri^2 dt + d \frac{Li^2}{2} + PdY, \quad (2)$$

$$M \frac{d^2Y}{dt^2} + H \frac{dY}{dt} + CY = P. \quad (3)$$

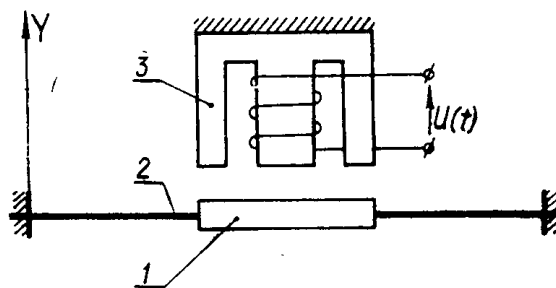


Рис. 1.

Здесь  $U_M$ —амплитуда напряжения сети;  
 $\omega$ —круговая частота сети,  
 $t$ —время;  
 $\psi$ —начальная фаза напряжения;  
 $i$ —текущее значение силы тока в обмотке;  
 $L$ —индуктивность обмотки магнита;  
 $R$ —активное сопротивление электрического контура;  
 $P$ —электромагнитная сила, приложенная к якорю;

$Y$ —смещение якоря, измеряемое от положения его статического равновесия при  $i=0$ , причем положительным смещениям якоря отвечает уменьшение зазора в магнитной цепи;

$M$ —приведенная масса подвижных частей вибратора;

$H$ —коэффициент, учитывающий поглощение энергии в механической цепи;

$C$ —приведенный к якору коэффициент жесткости пружины.

Из совместного решения (2) и (3) в предположении линейности характеристики намагничивания магнита получим формулу для тяговой силы магнита

$$P = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dY}. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (1) запишем в виде

$$i = \frac{U_M}{\omega L} e^{-\int \frac{R}{\omega L} d\omega t} \left[ \int e^{\int \frac{R}{\omega L} d\omega t} \cos(\omega t + \psi) d\omega t + K_0 \right]. \quad (5)$$

Здесь  $K_0$ —постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.

Индуктивность обмотки магнита можно приближенно выразить как

$$L = \frac{L_0}{1 - \frac{Y(t)}{S}}, \quad (6)$$

где  $L_0$ —индуктивность обмотки при  $Y=0$ ;

$S$ —приведенный воздушный зазор между якорем и статором.

Предположим, что закон движения якоря можно представить рядом Фурье

$$Y = A_0 + A_2 \sin 2\omega t - A_4 \sin (4\omega t - \varphi_4) + \dots \quad (7)$$

Для упрощения выкладок введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Y}{S} &= y; \quad \frac{A_0}{S} = a_0; \quad \frac{A_2}{S} = a_2; \quad \frac{A_4}{S} = a_4; \dots \\ \frac{H}{M} &= h; \quad \frac{C}{M} = \omega_0^2; \quad \omega t = x; \\ \frac{R}{\omega L_0} &= q; \quad \frac{a_2 q}{2} = \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Если частота собственных незатухающих колебаний системы  $\omega_0$  не сильно отличается от частоты  $2\omega$  вынужденных колебаний, то

$$\int \frac{R}{\omega L} d\omega t \approx qx + \Delta \cos 2x.$$

Далее, так как обычно  $\Delta < 0,2 \div 0,3$  даже в том случае, если амплитуда колебания регулируется с помощью реостата, то из (5) с достаточной для практических расчетов точностью имеем

$$i = \frac{U_M}{\omega L} e^{-\Delta \cos 2x} \left\{ \frac{I_0(\Delta)}{1+q^2} [q \cos(x+\psi) + \sin(x+\psi)] + K_0 e^{-qx} \right\}.$$

Здесь  $I_0(\Delta)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для установившегося режима ( $x \rightarrow \infty$ ), независимо от начальных условий, с учетом (6) получаем простую формулу для силы тока

$$i = (1-y) \frac{U_M}{\omega L_0} I_0(\Delta) e^{-\Delta \cos 2x} \xi \sin(x + \psi + \delta), \quad (9)$$

где

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}; \quad \delta = \arctg q.$$

Подставив (9) в (4), определим силу тяги электромагнита

$$P = \frac{L_0}{2S} \left( \frac{U_M}{\omega L_0} \right)^2 I_0^2(\Delta) e^{-2\Delta \cos 2x} \cdot \frac{\xi^2}{2} [1 - \cos 2(x + \psi + \delta)]. \quad (10)$$

Множитель  $e^{-2\Delta \cos 2x}$  в правой части (10) разложим в ряд Фурье

$$e^{-2\Delta \cos 2x} \sim I_0(2\Delta) - 2I_1(2\Delta) \cos 2x + \dots, \quad (11)$$

в котором для упрощения дальнейших выкладок удержим всего два первых члена, поскольку при оговоренных выше значениях  $\Delta$  этот ряд весьма быстро сходится. Теперь, подставив (11) в (10) с учетом (8), дифференциальное уравнение (3) можно представить в виде

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + h \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_c I_0^2(\Delta) \frac{\xi^2}{2} (Q + B_2 \sin 2x + C_2 \cos 2x + B_4 \sin 4x + C_4 \cos 4x), \quad (12)$$

где

$$y_c = \frac{L_0}{CS^2} \left( \frac{U_{\text{Э}}}{\omega L_0} \right)^2; \quad (13)$$

$U_{\text{Э}}$  — эффективное напряжение сети, равное  $\frac{U_M}{\sqrt{2}}$ ;

$$Q = I_0(2\Delta) + I_1(2\Delta) \cos 2(\psi + \delta); \quad (14)$$

$$B_2 = I_0(2\Delta) \sin 2(\psi + \delta); \quad (15)$$

$$C_2 = -2I_1(2\Delta) - I_0(2\Delta) \cos 2(\psi + \delta); \quad (16)$$

$$B_4 = -I_1(2\Delta) \sin 2(\psi + \delta); \quad (17)$$

$$C_4 = I_1(2\Delta) \cos 2(\psi + \delta). \quad (18)$$

Как видим, спектр возмущающего усилия согласуется с видом предполагавшегося ранее решения (7). Подставляя (7) в (12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях слева и справа, получаем систему уравнений для определения неизвестных амплитуд и фаз:

$$a_0 = y_c I_0^2(\Delta) \frac{\xi^2}{2} Q; \quad (19)$$

$$a_2 \left[ 1 - \left( \frac{2\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] = y_c I_0^2(\Delta) \frac{\xi^2}{2} B_2; \quad (20)$$

$$a_2 h \frac{2\omega}{\omega_0^2} = y_c I_0^2(\Delta) \frac{\xi^2}{2} C_2; \quad (21)$$

$$a_4 \left[ 1 - \left( \frac{4\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \cos \varphi_4 + a_4 h \frac{4\omega}{\omega_0^2} \sin \varphi_4 = y_c I_0^2(\Delta) \frac{\xi^2}{2} B_4; \quad (22)$$

$$- a_4 \left[ 1 - \left( \frac{4\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \sin \varphi_4 + a_4 h \frac{4\omega}{\omega_0^2} \cos \varphi_4 = y_c I_0^2(\Delta) \frac{\xi^2}{2} C_4. \quad (23)$$

Из (20) и (21) с учетом (15) и (16) найдем формулу для определения частоты  $\omega_0$  при заданной амплитуде первой гармоники колебания и начальную фазу напряжения сети

$$\frac{2\omega}{\omega_0} = \sqrt{ \left[ 1 \mp \sqrt{ \frac{y_c}{2a_2} I_0^2(\Delta) I_0(2\Delta) \xi^2 } \right]^2 - \left[ \frac{y_c}{a_2} I_0^2(\Delta) I_1(2\Delta) \xi^2 + \frac{h_0}{\omega_0} \right]^2 }; \quad (24)$$

$$\operatorname{tg} 2(\psi + \delta) = \frac{\left( \frac{2\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1}{\frac{y_c}{a_2} I_0^2(\Delta) I_1(2\Delta) \xi^2 + \frac{h_0}{\omega_0}}. \quad (25)$$

Последние две формулы выведены с привлечением известной гипотезы Бокка о независимости потерь энергии в механическом контуре от частоты колебания. Формула (24) позволяет построить амплитудно-частотную кривую вибратора в зоне главного резонанса в предположении  $\omega = \text{const}$  и  $\omega_0 = \text{var}$ . Все значения суммы углов, определяемой из (25), заключены в пределах

$$45^\circ < \delta + \psi < 135^\circ.$$

Постоянная слагающая смещения  $a_0$  легко определяется непосредственно при помощи (19), (14) или через исходные величины:

$$a_0 = y_c I_0^2(\Delta) \frac{\xi^2}{2} \left[ I_0(2\Delta) - 2 \frac{I_1^2(2\Delta)}{I_0(2\Delta)} \right] - a_2 \frac{h_0}{\omega_0} \frac{I_1(2\Delta)}{I_0(2\Delta)}. \quad (26)$$

Из совместного решения (22) и (23) с учетом (17) и (18) определяются амплитуда второй гармоники колебания якоря и ее начальная фаза

$$a_4 = \frac{y_c I_0^2(\Delta) I_1(2\Delta) \frac{\xi^2}{2}}{\sqrt{ \left[ 1 - \left( \frac{4\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \left( \frac{h_0}{\omega_0} \right)^2 }}; \quad (27)$$

$$\varphi_4 = \gamma - 90^\circ - 2(\psi + \delta). \quad (28)$$

Здесь

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{\frac{h_0}{\omega_0}}{1 - \left( \frac{4\omega}{\omega_0} \right)^2}; \quad 0 \leq \gamma \leq 180^\circ. \quad (29)$$

Из (24) нетрудно определить величину коэффициента силы  $y_c$ , потребную для поддержания заданной амплитуды колебания  $a_2$ :

$$\frac{y_c}{a_2} = \frac{\frac{h_0}{\omega_0} I_1(2\Delta)}{I_0^2(\Delta) \xi^2 \left( \frac{I_0^2(2\Delta)}{4} - I_1^2(2\Delta) \right)} +$$

$$+ \frac{\sqrt{\left(\frac{h_0}{\omega_0} I_1(2\Delta)\right)^2 + \left(\frac{I_0^2(2\Delta)}{4} - I_1^2(2\Delta)\right) \left\{ \left[ 1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^2 + \left(\frac{h_0}{\omega_0}\right)^2 \right\}}{I_0^2(\Delta) \xi^2 \left(\frac{I_0^2(2\Delta)}{4} - I_1^2(2\Delta)\right)} \quad (30)$$

Эффективная сила тока, потребляемого из сети, определяется известной формулой

$$i_{\text{Э}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2(x) dx} \quad (31)$$

Подставив сюда значение  $i$  из (9), и заметив, что в зоне главного резонанса  $a_4 \ll a_2$ , получим в первом приближении без учета влияния второй гармоники колебания якоря

$$i_{\text{Э}} = \frac{U_{\text{Э}}}{\omega L_0} I_0(\Delta) \xi \sqrt{\left[ (1 - a_0)^2 + \frac{a_2^2}{4} \right] [I_0(2\Delta) + I_1(2\Delta) \cos 2(\psi + \delta)] - (1 - a_0) a_2 I_0(2\Delta) \sin 2(\psi + \delta) + \frac{a_2^2}{4} I_0(2\Delta)} \quad (32)$$

Активная мощность в электрической цепи определяется как

$$w_a = \frac{U_{\text{Э}}^2}{\omega L_0} I_0(\Delta) \xi \left\{ (1 - a_0) [I_0(\Delta) \sin \delta - I_1(\Delta) \sin (2\psi + \delta)] - \frac{1}{2} a_2 I_0(\Delta) \cos (2\psi + \delta) \right\}, \quad (33)$$

где, как и в предыдущем случае, опущены малые члены, пропорциональные  $a_4$ .

Наконец, коэффициент мощности,  $\cos \varphi$ , электромагнитного вибратора при работе в зоне главного резонанса равен

$$\cos \varphi = \frac{(1 - a_0) [I_0(\Delta) \sin \delta - I_1(\Delta) \sin (2\psi + \delta)] - \frac{1}{2} a_2 I_0(\Delta) \cos (2\psi + \delta)}{\sqrt{\left[ (1 - a_0)^2 + \frac{a_2^2}{4} \right] [I_0(2\Delta) + I_1(2\Delta) \cos 2(\psi + \delta)] - (1 - a_0) a_2 I_0(2\Delta) \sin 2(\psi + \delta) + \frac{a_2^2}{4} I_0(2\Delta)}} \quad (34)$$

При наличии однополупериодного выпрямителя в цепи обмотки магнита задача решается, в общем, аналогичным методом. Однако ввиду возникающих особенностей эта задача рассматривается отдельно.