

УДК 681.511.22

## ПОЛУЧЕНИЕ ЖЕЛАЕМЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В.И. Гончаров, Ле Бынь, В.А. Онуфриев\*

Томский политехнический университет

\*Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники

**Гончаров Валерий Ивано-вич**, д-р техн. наук, профес-сор кафедры интегриро-ванных компьютерных систем управления Института кибернетики НИ ТПУ.  
E-mail: gvi@tpu.ru  
Область научных интересов: самонастраивающиеся системы автоматизации.

**Ле Бынь**, магистр техн. наук, кафедра интегрированных компьютерных систем управления Института кибернетики НИ ТПУ.

Область научных интересов: системы автоматического управления

**Онуфриев Вадим Александрович**, студент кафедры компьютерных систем в управлении и проектирования факультета вычислительных систем ТУСУР.

E-mail: ovavadim@gmail.com.  
Область научных интересов: идентификация систем автоматического управления.

Рассмотрена задача получения желаемых передаточных функций импульсных систем автоматического управления. Предложен способ синтеза передаточных функций низкого порядка по прямым показателям качества, обеспечивающий конечное время переходного процесса.

### Ключевые слова:

Импульсные системы автоматического управления, синтез желаемых передаточных функций, конечное время установления

### Key words:

Pulse automatic control system, the synthesis of the desired transfer functions, the finite time required.

### Введение

Синтез систем автоматического управления (САУ) во многих случаях базируется на составлении и решении уравнения синтеза (1).

$$W_{жс}^3(z) = F[W_{нч}(z); W_p(z); k_{oc}], \quad (1)$$

где  $W_{жс}^3(z)$  – желаемая передаточная функция замкнутой эталонной системы,

$W_{нч}(z)$  – передаточная функция неизменяемой части,

$W_p(z)$  – передаточная функция регулятора,

$k_{oc}$  – коэффициент обратной связи.

При определенных условиях задача сводится к параметрической постановке – определению коэффициентов передаточной функции регулятора. В этих условиях, как в свое время предложил академик В.С. Кулебакин, решение уравнения сводится к двухэтапной процедуре [1]. На первом этапе формируется эталонная модель, отвечающая требованиям по качеству, точности, устойчивости и др. На втором – определяется решение уравнения (1). В работе рассматриваются вопросы первого этапа.

Исходные данные об эталонной системе обычно представляют в области времени характеристикой переходной  $h_{жс}(kT_0)$ , импульсной переходной  $k_{жс}(kT_0)$  либо показателями качества: перерегулированием  $\sigma_s$ , временем установления переходного процесса  $t_y^3$  и другими.

В то же время в уравнении (1) эталонная система представлена моделью  $W_{жс}^3(z)$ , описывающей систему в области изображений. Поэтому возникает задача перехода от описания эталонной системы в области времени к моделям в форме передаточных функций. Сам по себе такой

переход не является простейшим, так как желаемая передаточная функция должна отвечать ряду требований, вытекающих из особенностей объекта управления, физической реализации, робастности, необходимости получения передаточной функции низкого порядка [1]. В ряде случаев к таким требованиям относятся также конечная длительность переходного процесса. Пути для решения таких задач известны [1, 2]. Известна также форма передаточной функции системы, имеющей конечное время переходного процесса (2) [2, 3].

$$W_{жс}^3(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{z^n}, m = n - 1. \quad (2)$$

Структура функции (2) позволяет получить эталонную модель системы с конечным временем переходного процесса, но имеет определенные ограничения. При малом значении параметра  $n$  функции времени  $k_{жс}(kT_0)$  и  $h_{жс}(kT_0)$  имеют мало ординат на интервале  $[0; t_y^3]$ , что не позволяет придать этим функциям необходимые особенности (по скорости нарастания, колебательности и другим параметрам). Для устранения недостатка приходится повышать порядок функции  $W_{жс}^3(z)$ , что нежелательно из-за увеличения объема последующих вычислительных операций, например, в самонастраивающихся системах. В работе предлагается компромиссный вариант решения задачи, позволяющий формировать эталонные модели, которые могут иметь, во-первых, низкий порядок и, во-вторых, переходный процесс, заканчивающийся с заданной точностью за конечное число тактов. Для этой цели привлекается вещественный интерполяционный метод (ВИМ).

### 1. Краткие сведения о вещественном интерполяционном методе

Вещественный интерполяционный метод (ВИМ) относится к числу методов, оперирующих математическими описаниями из области изображений [4]. Такой подход сам по себе создает определенные достоинства при решении многих задач. Они вытекают из того, что выполнение некоторых операций в области изображений оказывается более выгодным по сравнению с аналогичными операциями в области времени. К примеру, для непрерывных функций операция дифференцирования в области времени замещается операцией умножения в области изображений. Имеются и другие особенности, которые в определенных ситуациях делают ВИМ предпочтительным по сравнению с другими подходами [4]. Пожалуй, главная особенность состоит в том, что получаемые функции-изображения имеют вещественный аргумент. Важность этого обстоятельства проявляется в возможности широкого привлечения численных методов действий над такими функциями, тогда как в случае изображений с комплексным аргументом подобные действия проблематичны.

Получение изображений с вещественным аргументом в рамках ВИМ осуществляется по правилу (3).

$$F(v) = \sum_{n=0}^{\infty} f(kT_0) v^{-k}, \quad v \in [c_v, \infty), c_v \geq 1, \quad (3)$$

в котором значение параметра  $c_v$  выбирается из условия сходимости ряда. Формулу (3) можно рассматривать как частный случай дискретного преобразования Лапласа и  $z$ -преобразования. Такой взгляд имеет важное последствие. Он дает возможность использовать формальный способ получения вещественных изображений  $F(v)$  по изображениям  $F(z)$ , используя хорошо разработанные таблицы соответствия оригиналов и  $z$ -изображений.

Для привлечения численных методов действий над вещественными функциями  $F(v)$  предусмотрен переход к дискретной форме  $\{F(v_i)\}_{i=1, \eta} = \{F(v_1); F(v_2); \dots; F(v_\eta)\}$ , называемой численной характеристикой. Ее элементы  $F(v_i)$ ,  $i = \overline{1, \eta}$  определены как значения функции  $F(v)$  в узлах (4).

$$c_v \leq v_1 < v_2 < \dots < v_\eta. \quad (4)$$

Рекомендации по выбору узлов имеются [4].

В приложении к задачам получения эталонных моделей на основе ВИМ и его численной реализации общая схема может быть сформирована как двухэтапная процедура. На первом этапе по заданной функции времени  $f(kT_0)$  находятся элементы численной характеристики  $\{F(v_i)\}_\eta$ . Это можно сделать, например, по формуле (5).

$$F(v_i) = \sum_{n=0}^{\infty} f(kT_0)v_i^{-k}, \quad v_i \in [c_v, \infty), c_v \geq 1, \quad (5)$$

следующей из (3). На втором этапе вычисляются коэффициенты искомой формы (6).

$$F(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1}, \quad m \leq n. \quad (6)$$

С этой целью осуществляется перевод функции (6) в вещественную форму и ее дискретизация по ранее принятым узлам. Преобразование приводит к дискретной форме (7).

$$F(v_i) = \frac{b_m v_i^m + b_{m-1} v_i^{m-1} + \dots + b_1 v_i + b_0}{a_n v_i^n + a_{n-1} v_i^{n-1} + \dots + a_1 v_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}, \quad (7)$$

имеющей смысл системы  $\eta$  линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). При выполнении условия  $\eta = m + n + 1$  СЛАУ имеет единственное решение. Эта техника перехода от функций времени к изображениям может быть применена к решению близкой задачи – формированию передаточных функций эталонных систем по заданным временным динамическим характеристикам. Рассмотрим эту возможность в условиях ограничения на длительность переходного процесса.

## 2. Решение задачи

Полагаем, что задана желаемая временная динамическая характеристика импульсной системы, для определенности – переходная  $h_{жс}(kT_0)$ . Она отвечает условию окончания переходного процесса с заданной точностью за конечное число тактов. Требуется найти передаточную функцию (8)

$$W_{жс}^3(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1}, \quad m \leq n, \quad (8)$$

которая соответствует функции  $h_{жс}(kT_0)$ .

На основе технологии ВИМ разработан алгоритм решения задачи. Приведем его главные элементы.

1. Выбираются значения структурных параметров  $m$  и  $n$ , исходя из априорных условий задачи.
2. Определяется размерность численной характеристики:  $\eta = m + n + 1$ .
3. Вычисляются значения узлов интерполирования  $v_i$ ,  $i = \overline{1, 2, \dots, \eta}$ .

Полагая, что эталонная модель должна быть устойчивой, условие (4) в отношении первого узла трансформируется в равенство  $c_v = v_1 = 1$ , что позволяет найти первый элемент численной характеристики. В обозначениях вещественной передаточной функции  $W_{жс}^3(v)$  на основании теоремы о предельных значениях для  $z$ -преобразования получим выражение (9):

$$W_{\text{жс}}^3(1) = \frac{b_m + b_{m-1} + \dots + b_1 + b_0}{a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + 1} = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{\text{жс}}^3(nT_0), \eta = m + n + 1 \quad (9)$$

В отношении последнего узла  $v_\eta$  имеются рекомендации по его назначению:  $(0, 1 \dots 0, 2) [F(v_1) - F(\infty)] + F(\infty) = F(v_\eta)$ . Значения остальных узлов в наиболее простом варианте найдутся из условия равномерной сетки (10):

$$v_i = v_1 + \frac{v_\eta - v_1}{\eta - 1} (i - 1), i = \overline{2, \eta - 1}. \quad (10)$$

Очевидно, с позиций точности получаемых решений целесообразно использовать неравномерные законы распределения узлов.

4. Находятся элементы  $W_{\text{жс}}^3(v_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$  численной характеристики  $\{W_{\text{жс}}^3(v_i)\}_\eta$  по исходной желаемой переходной характеристике  $h_{\text{жс}}(kT_0)$ . Для получения расчетного соотношения обратимся к известному соотношению, связывающему желаемую передаточную функцию  $W_{\text{жс}}^3(z)$  с изображением реакции системы на единичное ступенчатое воздействие

$z/(z-1)$ :  $h_{\text{жс}}(z) = W_{\text{жс}}^3(z) \frac{z}{z-1}$ . Отсюда найдется интересующая нас  $z$ -форма

$h_{\text{жс}}(z) = W_{\text{жс}}^3(z) \frac{z}{z-1}$  и ее вещественный непрерывный  $h_{\text{жс}}(v) = W_{\text{жс}}^3(v) \frac{v}{v-1}$  и дискретный (11)

аналоги.

$$h_{\text{жс}}(v_i) = W_{\text{жс}}^3(v_i) \frac{v_i}{v_i - 1}, i = 1, 2, \dots, \eta. \quad (11)$$

Для получения искомой характеристики  $W_{\text{жс}}^3(v_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$  из соотношений (11) предварительно найдем численную характеристику  $h_{\text{жс}}(v_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, \eta$ . С этой целью воспользуемся формулой (5), связывающей функцию времени и ее изображение. Из нее в обозначениях переходной характеристики с учетом дискретизации найдется расчетная формула (12).

$$h_{\text{жс}}(v_i) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_0) v_i^k \cong \sum_{k=0}^N h(kT_0) v_i^k, i = 1, 2, \dots, \eta. \quad (12)$$

Теперь из (11) получим интересующий нас результат (13), позволяющий завершить рассматриваемый этап.

$$W_{\text{жс}}^3(v_i) = \frac{v_i - 1}{v_i} \sum_{k=0}^N h(kT_0) v_i^k, i = 1, 2, \dots, \eta, \quad (13)$$

5. Вычисляются коэффициенты желаемой вещественной передаточной функции  $W_{\text{жс}}^3(v)$ . Исходным элементом может служить выражение (13). Действительно, вводя в форму (13) обозначения передаточных функций вида (11) в вещественной форме, можно записать выражение (14).

$$W_{\text{жс}}^3(v_i) = \frac{b_m v_i^m + b_{m-1} v_i^{m-1} + \dots + b_1 v_i + b_0}{a_n v_i^n + a_{n-1} v_i^{n-1} + \dots + a_1 v_i + 1}, i = \overline{1, \eta}, \eta = m + n + 1. \quad (14)$$

Ранее было отмечено, что соотношения такого вида можно рассматривать как СЛАУ относительно коэффициентов  $b_m, b_{m-1}, \dots, b_0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$ , которые неизвестны и подлежат определению. Необходимые условия существования и единственности решения выполняются

при выборе узлов и формы модели (11) [4], так что решение СЛАУ (14) найдется достаточно просто, по крайней мере, для задач размерности  $\eta \leq 5$ . Для задач повышенной размерности нужно учитывать некорректность задачи, что является предметом особого рассмотрения.

6. Осуществляется проверка решения и, если это необходимо, выполняется его коррекция путем изменения узлов  $v_i, i = 2, 3, \dots, \eta$ . Для этого достаточно изменить значение узла  $v_\eta$  в соответствии с перекрестным свойством  $v$ -преобразования [4], что влечет за собой изменение узлов  $v_i, i = \overline{2, \eta-1}$ . Эта процедура позволяет приблизить свойства эталонной системы к заданным, например, по перерегулированию, времени установления и другим. Сказанное относится, в частности, к моменту вхождения переходного процесса в допустимую зону, фиксирующую его длительность. Этим практически определяется конечная длительность переходного процесса, и она может быть установлена желаемым образом.

Для иллюстрации алгоритма приведем простой пример, позволяющий проследить ход вычислений и методику решения задачи.

#### 4. Расчетный пример

Требуется сформировать передаточную функцию вида  $W_{жс}(z) = \frac{b_1 z + b_0}{a_2 z^2 + a_1 z + 1}$ .

Желаемые переходные характеристики представлены таблицей значений в тактовые моменты времени  $nT_0, T_0 = 2c$ .

**Таблица 1.** Значения желаемой переходной характеристики

$nT_0, c$	0	2	4	6	8	10	12
$h(nT_0)$	0	0,222	1,128	1,421	1,331	1,231	1,214
$nT_0, c$	14	16	18	20	22	24	26
$h(nT_0)$	1,229	1,239	1,239	1,237	1,236	1,237	1,237

Определим размерность численных характеристик:  $\eta = m + n + 1 = 4$ . Значение первого узла в силу устойчивости желаемой системы принимаем единичным:  $v_1 = 1$ . Значения остальных узлов найдутся по рекомендациям для вычисления узла  $v_4$ , а промежуточных узлов – по формуле (11):  $v_4 = 4, v_2 = 2, v_3 = 3$ . Теперь можно найти элементы численной формы  $h_{жс}(v_i), i = 1, 2, \dots, \eta$ . Для детализации покажем формирование элемента  $h_{жс}(2)$  в выражении (15).

$$h_{жс}(2) = 0 + 0,222 \cdot 2^{-1} + 1,128 \cdot 2^{-2} + 1,421 \cdot 2^{-3} + 1,331 \cdot 2^{-4} + 1,231 \cdot 2^{-5} + 1,214 \cdot 2^{-6} + 1,229 \cdot 2^{-7} + 1,239 \cdot 2^{-8} + 1,239 \cdot 2^{-9} + 1,237 \cdot 2^{-10} + 1,236 \cdot 2^{-11} + 1,237 \cdot 2^{-12} + 1,237 \cdot 2^{-13} = 0,731. \quad (15)$$

Остальные значения:  $h_{жс}(3) = 0,276, h_{жс}(4) = 0,155$ . Теперь по формуле (13) найдется численная характеристика передаточной функции  $W_{жс}^3(v): \{W_{жс}^3(v_i)\}_\eta = \{1,237; 0,236; 0,184; 0,116\}$ . Это позволяет сформировать СЛАУ вида (14). Это отражено в выражении (16):

$$\begin{cases} 1,237 = \frac{b_1 + b_0}{a_2 + a_1 + 1}; \\ 0,365 = \frac{2b_1 + b_0}{4a_2 + 2a_1 + 1}; \\ 0,184 = \frac{3b_1 + b_0}{9a_2 + 3a_1 + 1}; \\ 0,116 = \frac{4b_1 + b_0}{16a_2 + 4a_1 + 1}. \end{cases} \quad (16)$$

Ее решение:  $a_2 = 4,605$ ;  $a_1 = -1,698$ ;  $b_1 = 1,021$ ;  $b_0 = 3,812$ . Получили синтезированную передаточную функцию  $W_{\text{жс}}^c(z) = \frac{1,021 \cdot z + 3,812}{4,605 \cdot z^2 - 1,698 \cdot z + 1}$ .

Оценку результата можно выполнить сравнением полученного решения с точным значением  $W_{\text{жс}}(z) = \frac{z + 3,7}{4,5z^2 - 1,7z + 1}$ , которое в данном примере известно, а также по заданной переходной характеристике  $h_{\text{жс}}^3(nT_0)$  и синтезированной  $h_{\text{жс}}^c(nT_0)$ . Последняя приведена на рис. 1. Для наглядности на рис. 2 – погрешность  $\Delta h = \max |h_{\text{жс}}(nT_0) - h_{\text{жс}}^c(nT_0)|$ . Максимальное отклонение составляет  $3,964 \cdot 10^{-3}$ . Это отклонение, а также время приближения переходной характеристики к установившемуся значению во многих случаях удовлетворяют требованиям. В иных случаях следует изменить значения узлов на основе перекрестного свойства вещественного преобразования [4].

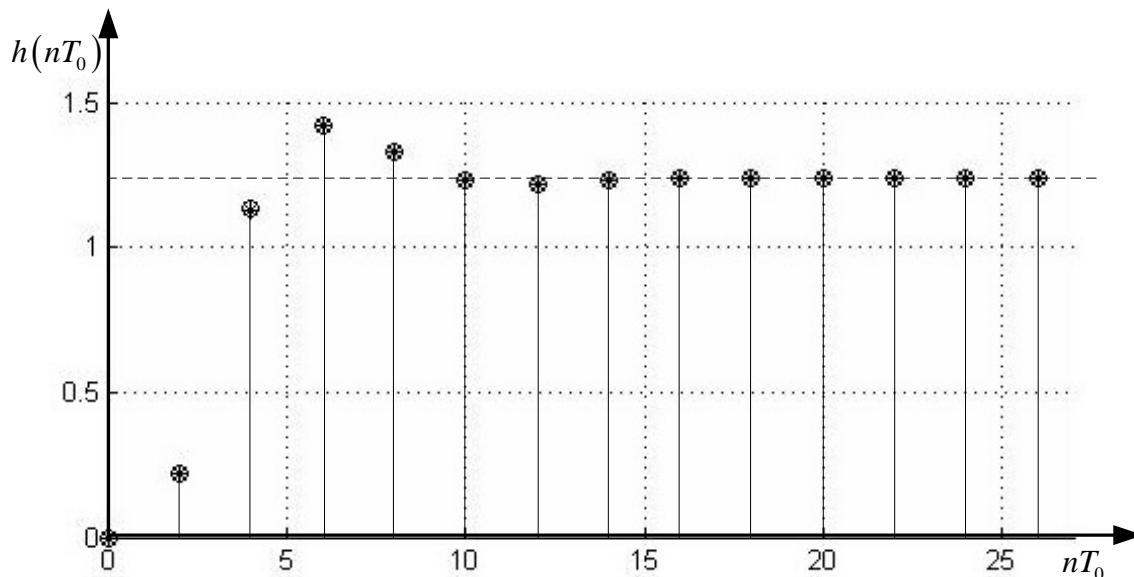


Рис. 1. Переходные характеристики синтезированной передаточной функции

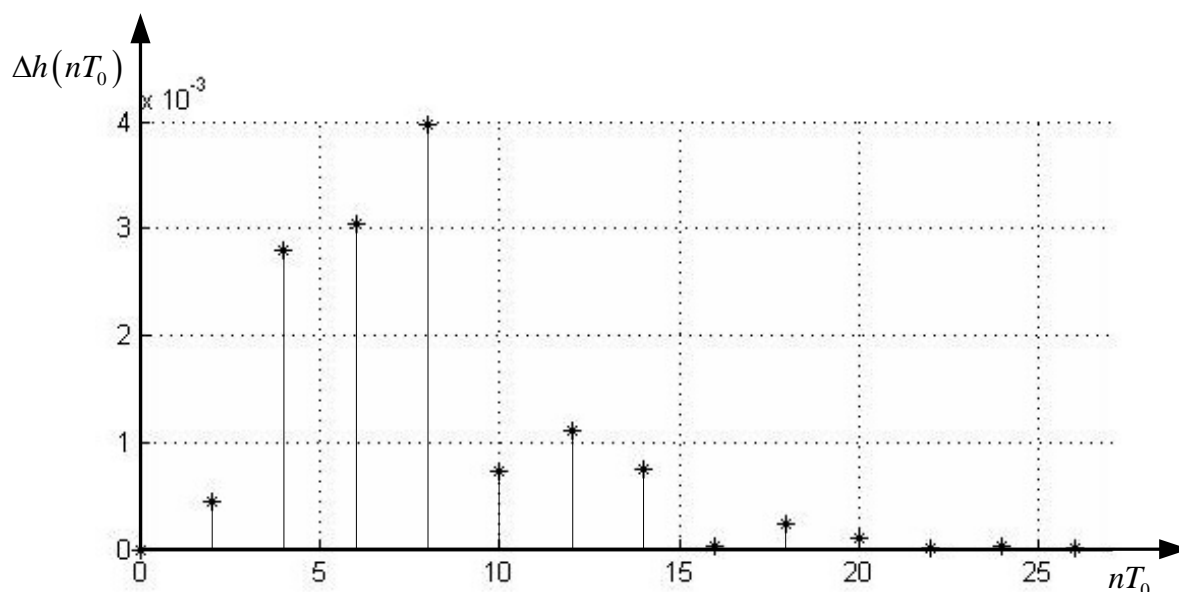


Рис. 2. Погрешность решения

### Заключение

Предложен численный вариант синтеза передаточных функций эталонных систем автоматического управления. Предложение опирается на вещественный интерполяционный метод, особенности которого приводят к использованию таких моделей систем в области изображений, которые имеют форму функций с вещественным аргументом. Возможности подхода позволяют получать передаточные функции заданного порядка с достаточно детальным описанием переходного процесса и практически конечным временем установления. Дальнейшее обобщение подхода, например, до передаточных функций повышенного порядка, оценивания погрешности в области изображений и т. д., требует дополнительного рассмотрения вопросов, часть из которых была отмечена.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пупков К.А., Егупов Н.Д. Методы классической и современной теории автоматического управления. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления/ под. ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
2. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления. – М.: Машиностроение, 1986.
3. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. Издание третье, исправленное. – М.: Наука, 1975. – 768 с.
4. Гончаров В.И. Синтез электромеханических систем промышленных роботов. – Томск: Изд-во ТПУ, 2002. – 100 с.

Поступила 18.10.2011 г.