СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. – 1973. – May/Jun. – P. 637–657.
2. Merton R. Theory of rational option pricing // Bell J. Economics and Management Science. – 1973. – V. 4. – P. 141–183.
3. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: ФАЗИС, 1998. – 1010 с.
4. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 80–129.
5. Новиков А.А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и её применения. – 1998. – Т. 43. – № 1. – С. 152–161.
6. Follmer H., Len K.P. Quantile hedging // Finance and Stochastic. – 1999. – V. 3. – № 3. – P. 251–273.
7. Rubinstein M. Exotic options // Finance working paper. – 1991. – № 220. – Inst. of Business and Economic research. University of California. Berkley.
8. Кожин К. Все об экзотических опционах // Рынок ценных бумаг. – 2002. – № 15. – С. 53–57; № 16. – С. 60–64; № 17. – С. 68–73.
9. Демин Н.С., Лазатникова А.В. Исследование портфеля, капитала и стоимости опциона в случае стандартного Европейского опциона продажи с непрерывным временем // Вестник ТГУ. Приложение. – 2002. – №1(I). – С. 147–149.

Поступила 16.10.2006 г.

УДК 519.865

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЦИОНА КУПЛИ В СЛУЧАЕ ХЕДЖИРОВАНИЯ С ЗАДАННОЙ ВЕРОЯТНОСТЬЮ

Н.С. Демин, А.И. Трунов

Томский государственный университет
E-mail: anton.trunov@ngs.ru

Получены формулы, определяющие стоимость опциона, а также эволюцию во времени портфеля и капитала для Европейского опциона купли в случае хеджирования с заданной вероятностью (квантильного хеджирования) при непрерывном времени и диффузионной модели (B, S)-финансового рынка. Исследуются некоторые свойства решения.

1. Введение

Используемые на рынках финансовые инструменты становятся более разнообразными и порождают довольно изощренные потоки платежей. Ситуация усложняется тем, что изменение процентных ставок и доходностей на рынках стохастические, а математические модели этих изменений – случайные процессы. Поэтому такая основная задача участников финансовых рынков, как определение цен финансовых инструментов, может быть решена только с привлечением вероятностных методов. При этом построение математической модели финансового рынка и анализ процессов, которые там происходят, требуют использования математических методов на достаточно высоком уровне. В связи с этим большую популярность приобрела финансовая математика, основным объектом исследования которой являются различные модели рынка ценных бумаг [1, 2]. В данной работе проводится исследование неклассической задачи теории опционов – задачи хеджирования с заданной вероятностью выполнения платежного обязательства, для случая опциона купли, когда в отличие от стационарных опционов платежное обязательство выполняется не с вероятностью единица, а с вероятностью меньшей единицы, что более соответствует реалиям финансового рынка.

2. Постановка задачи

Рассмотрим модель финансового рынка, как пары активов: безрискового (банковский счет) B и рискового (акции) S, представляемых своими ценами B_t и S_t, $t\in[0,T]$. В этом случае говорят о (B, S) – рынке с непрерывным временем [1, 2]. Активы B и S будем называть *основными активами* или *основными ценными бумагами*. Относительно банковского счета B предполагается, что $B=(B_t)_{t\geq 0}$ – детерминированная функция, подчиняющаяся уравнению $dB_t=rB_tdt$, т. е. $B_t=B_0e^{rt}$, $B_0>0$, $r\geq 0$ где r – процентная ставка (банковский процент). Для описания эволюции стоимости акции $S=(S_t)_{t\geq 0}$ будем предполагать, что рассмотрение задачи происходит на винеровском стохастическом базисе $(\Omega,F,\mathbf{F}=(F_t)_{t\geq 0},\mathrm{P})$ [1, 3].

Введение в рассмотрение винеровского процесса обусловлено ролью случайного ингредиента, который определяет «хаотическую» структуру в реально наблюдаемых флуктуациях цен акций. В этой связи П. Самуэльсоном была предложена модель «геометрического», или «экономического», броуновского движения $S=(S_t)_{t\geq 0}$, согласно которой S является случайным процессом с

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), \qquad (1)$$

где $W=(W_t)_{t\geq 0}$ – винеровский процесс, $\sigma>0$, $\mu\in R$. Используя формулу Ито [3] из (1) находим, что стохастический дифференциал $dS_t=S_t(\mu dt+\sigma dW_t)$.

Представим некоторого инвестора, имеющего начальный капитал $X_0=x$ в момент времени $t=0$, находящийся на банковском счете B и в акциях S в соответствии с портфелем $\pi_0=(\beta_0,\gamma_0)$, где β_0 – часть безрискового актива (сумма, находящаяся на банковском счете), γ_0 – часть рискового актива (сумма, вложенная в акции). Таким образом, получим начальный капитал $X_0=\beta_0 B_0+\gamma_0 S_0$. Аналогично, пусть $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$ – есть пара, описывающая состояние портфеля ценных бумаг инвестора в момент времени $t>0$. Тогда текущий капитал $X_t=\beta_t B_t+\gamma_t S_t$.

Задача: Найти капитал X_t, соответствующий ему портфель $\pi_t=(\beta_t,\gamma_t)$ и начальное значение $X_0=C_T$ капитала, как стоимости вторичной ценной бумаги опциона, при котором обеспечивается выполнение платежного обязательства $X_T=f_T(S_T)$, где $f_T(S_T)$ – платежная функция, с вероятностью $P(A)=1-\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ [2, 4].

Заметим, что в стандартной задаче хеджирования опционов выполнение платежного обязательства обеспечивается с вероятностью единица [1], т. е. на каждой траектории стохастического процесса S_t, моделирующего эволюцию цены рискового актива.

3. Нахождение цены опциона

Рассмотрим задачу хеджирования с заданной вероятностью $P(A)$ (квантильного хеджирования) стандартного опциона покупателя (*call*-опциона) с функцией выплаты $f_T=(S_T-K)^+=\max(0,S_T-K)$ [1]. По теореме 6.1 из [2] имеем, что оптимальная стратегия в задаче квантильного хеджирования совпадает с совершенным хеджем платежного обязательства $f=f_T\cdot I_A$, где I_A – индикатор множества (события) A, которое имеет вид

$$A=\left\{\omega:\frac{dP}{dP^*}>\mathrm{const}\cdot f_T\right\},\tag{2}$$

P^* – мартингальная мера, т. е. мера, относительно которой процесс $\hat{X}_t=X_t/B_t$ является мартингалом. Используя то, что процесс плотности мартингальной меры P^* относительно P есть ([2], § 3.2)

$$\frac{dP_T^*}{dP_T}=\exp\left\{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T^*+\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2T\right\},$$

где $W_t^*=W_t+\left(\dfrac{\mu-r}{\sigma}\right)t$ – винеровский процесс относительно меры P^*, можем переписать (2) в следующем виде:

$$A=\left\{\exp\left(\frac{\mu-r}{\sigma}W_T^*-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2T\right)>\mathrm{const}\cdot(S_T-K)^+\right\}=$$

$$=\left\{\exp\left(\frac{\mu-r}{\sigma^2}\left(\ln S_0+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T^*\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\left(\ln S_0+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2T\right)\right)>\mathrm{const}\cdot(S_T-K)^+\right\}=$$

$$=\left\{S_T^{\frac{\mu-r}{\sigma^2}}\exp\left(-\frac{\mu-r}{\sigma^2}\left(\ln S_0+\frac{\mu+r-\sigma^2}{2}T\right)\right)>\mathrm{const}\cdot(S_T-K)^+\right\}.\tag{3}$$

Необходимо рассмотреть отдельно два случая: $(\mu-r)/\sigma^2\leq 1$, $(\mu-r)/\sigma^2>1$.

Замечание 1. Далее всюду $\Phi^{-1}(y)$ означает функцию, обратную функции Лапласа

$$\Phi(y)=\int_{-\infty}^{y}\varphi(x)dx,\quad \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Теорема 1. Пусть

$$y_0(T,S_0)=\left(\ln\frac{K}{S_0}-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)\Big/\sigma\sqrt{T}.\tag{4}$$

Тогда при $(\mu-r)/\sigma^2\leq 1$ цена опциона определяется формулой

$$C_T=S_0\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})\right]-$$

$$-Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}\right)-\Phi(y_0(T,S_0))\right],\tag{5}$$

где константа b_C имеет вид

$$b_C=\sqrt{T}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)+\frac{\mu-r}{\sigma}T.\tag{6}$$

Доказательство. Случаю $(\mu-r)/\sigma^2\leq 1$ соответствует рис. 1, определяющий структуру множества хеджирования A.

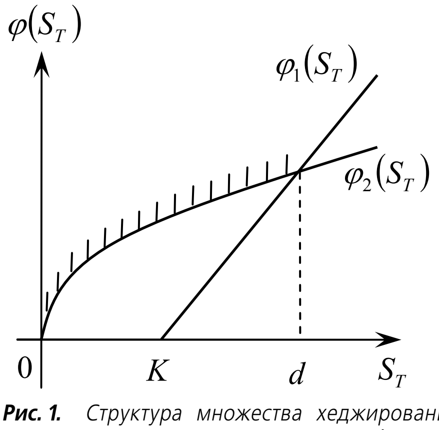

Рис. 1. *Структура множества хеджирования:* $(\mu-r)/\sigma^2\leq 1$; $\varphi_1(S_T)=\mathrm{const}(S_T-K)^+$; $\varphi_2(S_T)=S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$

Заштрихованная область является областью решения неравенства (3). Таким образом, в этом случае множество (событие) A представляется в виде

$$A=\{S_T<d\}=\{W_T^*<b\}=$$

$$=\left\{S_T<S_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right)\right\}\tag{7}$$

при ограничении (E^* – усреднение по мере P^*) $E^*(I_A;f_T/B_T)=x_0$ [2]. Из (7) имеем, что

$$P(A)=P\left\{S_T<S_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right)\right\}. \tag{8}$$

Так как согласно (1)

$$S_T=S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right\}, \tag{9}$$

то использование (9) в (8) дает, что

$$P(A)=P\left\{\begin{array}{l} S_0\exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right)< \\ <LS_0\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right) \end{array}\right\}=$$

$$=P\left\{\begin{array}{l} \exp\left(\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T\right)< \\ <\exp\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right) \end{array}\right\}=$$

$$=P\left\{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T<\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+b\sigma\right\}=$$

$$=P\{\sigma W_T<b\sigma-(\mu-r)T\}=$$

$$=P\left\{W_T<b-\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)T\right\}. \tag{10}$$

С учетом того, что винеровский процесс W_i имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией t, из (10) получаем

$$P(A)=\Phi\left(\left(b-\frac{\mu-r}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right),$$

где $P(A)=1-\varepsilon$ есть вероятность успешного хеджирования, $0<\varepsilon<1$. Следовательно, для нахождения константы $b=b_c$ имеем условие

$$\left(b-\frac{\mu-r}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}=\Phi^{-1}(1-\varepsilon),$$

что и доказывает (6). В соответствии с Теоремой 1 из [1] имеем, что цена опциона купли определяется по формуле

$$C_T=e^{-rT}F_T(S_0), \tag{11}$$

где $F_T(S_0)=E^*\{I_A;f_T(S_T)|S_0\}$. Тогда, с учетом вида платежной функции для опциона купли, получим

$$F_T(S_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b_C/\sqrt{T}} f_T\left(S_0\exp\left\{\begin{array}{l}\sigma\sqrt{T}y+ \\ +(r-\frac{\sigma^2}{2})T\end{array}\right\}\right)e^{-y^2/2}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0(T,S_0)}^{b_C/\sqrt{T}}\left(S_0\exp\left\{\begin{array}{l}\sigma\sqrt{T}y+ \\ +(r-\frac{\sigma^2}{2})T\end{array}\right\}-K\right)e^{-y^2/2}dy, \tag{12}$$

где $y_0(T,S_0)$ – решение уравнения

$$S_0\exp\{\sigma\sqrt{T}y+(r-\frac{\sigma^2}{2})T\}-K=0,$$

которое определяется по формуле (4). Подставив $F_T(S_0)$ вида (12) в (11), получим с учетом (6), что

$$C_T=e^{-rT}F_T(S_0)=$$

$$=\frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0(T,S_0)}^{b_C/\sqrt{T}}\left(S_0\exp\left\{\begin{array}{l}\sigma\sqrt{T}y+ \\ +(r-\frac{\sigma^2}{2})T\end{array}\right\}-K\right)e^{-y^2/2}dy=$$

$$=\frac{S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0(T,S_0)}^{b_C/\sqrt{T}}e^{-\frac{1}{2}[y-\sigma\sqrt{T}]^2}dy-\frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0(T,S_0)}^{b_C/\sqrt{T}}e^{-y^2/2}dy=$$

$$=S_0\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})\right]-$$

$$-Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}\right)-\Phi(y_0(T,S_0))\right],$$

то есть пришли к (5). Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $y_0(T,S_0)$ определяется по формуле (4). Тогда при $(\mu-r)/\sigma^2>1$ цена опциона определяется формулой

$$C_T=S_0\left[\begin{array}{l}\Phi\left(\frac{b_1}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})+ \\ +\Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T}}+\sigma\sqrt{T}\right)\end{array}\right]-$$

$$-Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{b_1}{\sqrt{T}}\right)-\Phi(y_0(T,S_0))+\Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T}}\right)\right], \tag{13}$$

где константы b_1 и b_2 такие, что удовлетворяют условию

$$P(A)=1-\varepsilon=\Phi\left(\left(b_1-\frac{\mu-r}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right)+$$

$$+\Phi\left(\left(-b_2+\frac{\mu-r}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right). \tag{14}$$

Доказательство. Случаю $(\mu-r)/\sigma^2>1$ соответствует следующий аналог, рис. 2.

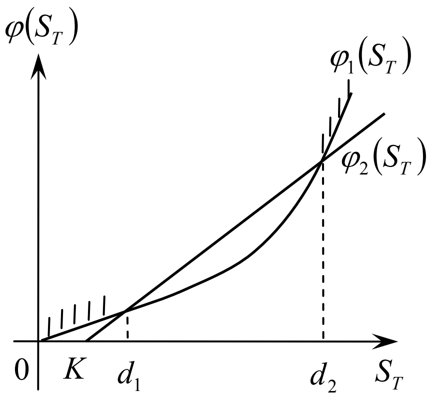

Рис. 2. *Структура множества хеджирования:* $(\mu-r)/\sigma^2>1$; $\varphi_1(S_T)=\mathrm{const}(S_T-K)^+$; $\varphi_2(S_T)=S_T^{(\mu-r)/\sigma^2}$

В этом случае множество A имеет следующую структуру: $A=\{S_T<d_1\}\cup\{S_T<d_2\}=\{W_T^*<b_1\}\cup\{W_T^*>b_2\}$. Так как множества $\{S_T<d_1\}$ и $\{S_T<d_2\}$ не пересекаются, то

$$P(A)=P\{S_T<d_1\}+P\{S_T>d_2\}=$$

$$=P\{S_T<S_0\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})T+b_1\sigma)\}+$$

$$+P\{S_T>S_0\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})T+b_2\sigma)\}. \quad (15)$$

С учетом (9) из (15) следует

$$P(A)=P\{W_T<b_1-\frac{\mu-r}{\sigma}T\}+P\{W_T>b_2-\frac{\mu-r}{\sigma}T\}. \quad (16)$$

Так как W_t имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией t, то с учетом свойства $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$, из (16) следует (14). Таким образом, получили, что константы b_1 и b_2 должны удовлетворять условию (14), но в явном виде они не находятся. Аналогично (12)

$$F_T(S_0)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{b_1/\sqrt{T}} f_T(S_0\exp\{\sigma\sqrt{T}y+\frac{r-\sigma^2}{2}\})\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{b_1/\sqrt{T}}^{\infty} f_T(S_0\exp\{\sigma\sqrt{T}y+\frac{r-\sigma^2}{2}\})\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dy. \quad (17)$$

Дальнейшие преобразования по выводу формулы (13) после подстановки (17) в (11) аналогичны преобразованиям по выводу формулы (5) и поэтому не приводятся. Теорема доказана.

4. Нахождение капитала и портфеля

Обозначим через $\pi^*=(\beta^*,\gamma^*)$ – минимальный хедж (оптимальный портфель), где β^* – часть безрискового актива (сумма, находящаяся на банковском счете), а γ^* – часть рискового актива (сумма, вложенная в акции). Отрицательное значение β^* либо γ^* означает взятие соответствующего актива в долг.

Теорема 3. Для случая $(\mu-r)/\sigma^2\le 1$ капитал X_t и портфель $\pi_t^*=(\beta_t^*,\gamma_t^*)$ определяются формулами

$$X_t=S_t\left[\begin{array}{l}\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\\ -\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\end{array}\right]-$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))\right], \quad (18)$$

$$\gamma_t^*=\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-$$

$$-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}), \quad (19)$$

$$\beta_t^*=-\frac{K}{B_T}\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))\right], \quad (20)$$

где $y_0(T-t,S_t)$ и b_C определяются по формулам (4) и (6) с заменами $T\to(T-t)$ и $S_0\to S_t$.

Доказательство. По Теореме 1 из [1] имеем, что

$$X_t=e^{-r(T-t)}F_{T-t}(S_t), \quad (21)$$

где $F_{T-t}(S_t)=E^*\{I_A;f_T(S_T)|S_t\}$. Тогда, подставив выражение (12) для функции $F_T(S_0)$ с заменами $T\to(T-t)$ и $S_0\to S_t$ в (21), получаем формулу, определяющую эволюцию текущего капитала

$$X_t=e^{-r(T-t)}F_{T-t}(S_t)=$$

$$=\frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0(T-t,S_t)}^{b_C/\sqrt{T-t}}\left(S_t\exp\left\{\begin{array}{l}\sigma\sqrt{T-t}y+\\ +(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)\end{array}\right\}-K\right)e^{-y^2/2}dy=$$

$$=\frac{S_t}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T}}^{\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}}\int_{y_0(T-t,S_t)}^{b_C/\sqrt{T-t}} e^{-y^2/2}dy=$$

$$=S_t\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})\right]-$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))\right],$$

что доказывает формулу (18).

По формулам (4.22), (4.23) из [1] имеем:

$$\gamma_t^*=e^{-r(T-t)}\frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t), \quad (22)$$

$$\beta_t^*=\frac{1}{B_T}\left[F_{T-t}(S_t)-S_t\frac{\partial F_{T-t}(s)}{\partial s}(S_t)\right]=\frac{X_t-\gamma_t^*S_t}{B_t}. \quad (23)$$

Согласно (18), (21)

$$e^{-r(T-t)}F_{T-t}(s)=$$

$$=s\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\Phi(y_0(T-t,s)-\sigma\sqrt{T-t})\right]-$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\left[\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,s))\right].$$

Тогда из (22) следует

$$\gamma_t^*=\frac{\partial}{\partial s}(e^{-r(T-t)}F_{T-t}(s))\Big|_{S_t}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\Phi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\\ -\Phi\Big(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t}\Big)\end{array}\right]-$$

$$-s\frac{\partial}{\partial s}\Phi(y_0(T-t,s)-\sigma\sqrt{T-t})\Big|_{S_t}+$$

$$+Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(y_0(T-t,s))\Big|_{S_t}. \quad (24)$$

С учетом вида функции $y_0(T-t,s)$ получаем

$$\frac{\partial}{\partial s}\Phi(y_0(T-t,s))=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y_0(T-t,s)} e^{\frac{-x^2}{2}}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(y_0(T-t,s))^2}{2}}\frac{\partial}{\partial s}y_0(T-t,s)=$$

$$=-\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{\frac{-(y_0(T-t,s))^2}{2}}. \quad (25)$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial s}\Phi(y_0(T-t,s)-\sigma\sqrt{T-t})=$$

$$=-\frac{1}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{\frac{-(y_0(T-t,s)-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}. \qquad (26)$$

Из (25), (26) с учетом вида функции $y_0(T-t,s)$ следует, что

$$s\frac{\partial}{\partial s}\Phi(y_0(T-t,s)-\sigma\sqrt{T-t})-$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\frac{\partial}{\partial s}\Phi(y_0(T-t,s))=$$

$$=-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{(y_0(T-t,s)-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}+$$

$$+\frac{Ke^{-r(T-t)}}{s\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}e^{-\frac{(y_0(T-t,s)-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}}\times$$

$$\times e^{-\frac{(y_0(T-t,s))^2}{2}}\left[\frac{Ke^{-r(T-t)}}{s}-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{s}\right]=0. \qquad (27)$$

Подстановка (27) в (24) приводит к (19). Из (18), (19), (23) следует

$$\beta_t^*=\frac{S_t}{B_t}[\Phi(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t})-$$

$$-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})]-$$

$$-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{B_t}[\Phi(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}})-\Phi(y_0(T-t,S_t))]-$$

$$-\frac{S_t}{B_t}[\Phi(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t})-$$

$$-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})]=$$

$$=-\frac{Ke^{-r(T-t)}}{B_t}[\Phi(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}})-\Phi(y_0(T-t,S_t))]=$$

$$=-\frac{K}{B_T}[\Phi(\frac{b_C}{\sqrt{T-t}})-\Phi(y_0(T-t,S_t))],$$

то есть пришли к (20). Теорема доказана.

Теорема 4. Для случая $(\mu-r)/\sigma^2>1$ капитал X_t и портфель $\pi_t^*=(\beta_t^*,\gamma_t^*)$ определяются формулами

$$X_t=S_t\begin{bmatrix}\Phi\left(\frac{b_1}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-\\ -\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})+\\ +\Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T-t}}+\sigma\sqrt{T-t}\right)\end{bmatrix}-$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\begin{bmatrix}\Phi\left(\frac{b_1}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))+\\ +\Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T-t}}\right)\end{bmatrix}, \qquad (28)$$

$$\gamma_t^*=\Phi\left(\frac{b_1}{\sqrt{T-t}}-\sigma\sqrt{T-t}\right)-$$

$$-\Phi(y_0(T-t,S_t)-\sigma\sqrt{T-t})+$$

$$+\Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T-t}}+\sigma\sqrt{T-t}\right), \qquad (29)$$

$$\beta_t^*=-\frac{K}{B_T}\begin{bmatrix}\Phi\left(\frac{b_1}{\sqrt{T-t}}\right)-\Phi(y_0(T-t,S_t))+\\ +\Phi\left(-\frac{b_2}{\sqrt{T-t}}\right)\end{bmatrix}. \qquad (30)$$

где $y_0(T-t,S_t)$, b_1 и b_2 находятся по формулам (4), (14) с заменами $T\to(T-t)$ и $S_0\to S_t$.

Доказательство данной теоремы проводиться аналогично доказательству Теоремы 3 с использованием вместо (12) формулы (17).

Следствие. Пусть $\tilde{C}_T,\tilde{X}_t,\tilde{\gamma}_t,\tilde{\beta}_t^*$ означают соответствующие величины при $\varepsilon=0$, когда достигается совершенное хеджирование. Тогда

$$\tilde{C}_T=S_0\Phi(\sigma\sqrt{T}-y_0(T,S_0))-Ke^{-rT}\Phi(-y_0(T,S_0)), \qquad (31)$$

$$\tilde{X}_t=S_t\Phi(\sigma\sqrt{T-t}-y_0(T-t,S_t))-$$

$$-Ke^{-r(T-t)}\Phi(-y_0(T-t,S_t)), \qquad (32)$$

$$\gamma_t^*=\Phi(\sigma\sqrt{T-t}-y_0(T-t,S_t)), \qquad (33)$$

$$\beta_t^*=-\frac{K}{B_T}\Phi(-y_0(T-t,S_t)). \qquad (34)$$

Доказательство. Рассматриваем случай $(\mu-r)/\sigma^2\le1$. Так как $\Phi^{-1}(1)=\infty$, то из (6) следует, что $b_C=\infty$ при $\varepsilon=0$. Так как $\Phi(\infty)=1$, то согласно (5)

$$\tilde{C}_T=S_0[1-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})]-$$

$$-Ke^{-rT}[1-\Phi(y_0(T,S_0))]. \qquad (35)$$

Так как $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$, то (31) следует из (35). Формулы (32)–(34) следуют из (18)–(20) аналогичным образом.

Рассмотрим теперь случай $(\mu-r)/\sigma^2>1$. Тогда при $\varepsilon=0$ с учетом свойства функции $\Phi(x)$ из (14) следует, что

$$\Phi\left(\left(b_1-\frac{\mu-r}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right)=\Phi\left(\left(b_2-\frac{\mu-r}{\sigma}T\right)\Big/\sqrt{T}\right),$$

т. е. $b_1=b_2=b$.

Следовательно, согласно (13),

$$\tilde{C}_T=S_0\begin{bmatrix}\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-\Phi(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})+\\ +\Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}+\sigma\sqrt{T}\right)\end{bmatrix}-$$

$$-Ke^{-rT}\left[\Phi\left(\frac{b}{\sqrt{T}}\right)-\Phi(y_0(T,S_0))+\Phi\left(-\frac{b}{\sqrt{T}}\right)\right]. \qquad (36)$$

Тогда формула (31), с учетом свойства $\Phi(x)+\Phi(-x)=1$, следует из (36) очевидным образом, и аналогичным образом формулы (32)–(34) следуют из (28)–(30). Следствие доказано.

Замечание 2. В случае $\varepsilon=0$, когда квантильное хеджирование переходит в совершенное хеджирование (с вероятностью единица), результаты Теорем 1–4 переходят в результаты Теоремы 2 из [1], так как формулы (31)–(34) представляют собой формулы (4.26), (4.29)–(4.31) из [1].

5. Коэффициенты чувствительности

Представляют интерес зависимости цены опциона от параметров μ и ε, отсутствующих в решении задачи совершенного хеджирования [1]. Эти зависимости определяются величинами $C_T^\mu=dC_T/d\mu$ и $C_T^\varepsilon=dC_T/d\varepsilon$.

Теорема 5. Для случая $(\mu-r)/\sigma^2\le 1$ коэффициенты чувствительности C_T^μ и C_T^ε определяются формулами

$$C_T^\mu=\frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left[S_0\varphi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-Ke^{-rT}\varphi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}\right)\right], \qquad (37)$$

$$C_T^\varepsilon=\sqrt{2\pi}\cdot e^{\frac{(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))^2}{2}}\left[\begin{array}{l} Ke^{-rT}\varphi\left(\dfrac{b_C}{\sqrt{T}}\right)- \\ -S_0\varphi\left(\dfrac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)\end{array}\right]. \qquad (38)$$

Доказательство. Согласно (4) и (6)

$$\frac{dy_0(T,S_0)}{d\mu}=\frac{d(y_0(T,S_0)-\sigma\sqrt{T})}{d\mu}=0,$$

$$\frac{d\left(\dfrac{b_C}{\sqrt{T}}\right)}{d\mu}=\frac{d\left(\dfrac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)}{d\mu}=\frac{\sqrt{T}}{\sigma}.$$

Тогда, с учетом формулы (5) и обозначения для функции $\varphi(x)$ (см. *Замечание 1*)

$$C_T^\mu=\frac{dC_T}{d\mu}=S_0\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{T}}{\sigma}\right)-$$

$$-Ke^{-rT}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{T}}{\sigma}\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{T}{2\pi\sigma^2}}\left[S_0e^{-\frac12\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}-y\sqrt{T}\right)^2}-Ke^{-rT}e^{-\frac12\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}\right)^2}\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{T}}{\sigma}\left[S_0\varphi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)-Ke^{-rT}\varphi\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}\right)\right],$$

т. е. пришли к формуле (37). Используя правило дифференцирования обратных функций

$$\frac{d(\phi^{-1}(x))}{dx}=\left[\frac{d\phi(\phi^{-1}(x))}{dx}\right]^{-1},$$

получим, что

$$\frac{d(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))}{d\varepsilon}=\left[\frac{d\Phi(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))}{d\varepsilon}\right]^{-1}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac12(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))^2}.$$

Тогда из формулы (6) следует, что

$$db_C/d\varepsilon=-\sqrt{2\pi T}e^{\frac12(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))^2}.$$

Таким образом

$$C_T^\varepsilon=\frac{dC_T}{d\varepsilon}=S_0\left[-e^{-\frac12\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)^2}e^{\frac{(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))^2}{2}}\right]-$$

$$-Ke^{-rT}\left[-e^{-\frac12\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}\right)^2}e^{\frac{(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))^2}{2}}\right]=$$

$$=\sqrt{2\pi}e^{\frac{(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))^2}{2}}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}Ke^{-rT}e^{-\frac12\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}\right)^2}- \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}S_0e^{-\frac12\left(\frac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)^2}\end{array}\right]=$$

$$=\sqrt{2\pi}e^{\frac{(\Phi^{-1}(1-\varepsilon))^2}{2}}\left[\begin{array}{l}Ke^{-rT}\varphi\left(\dfrac{b_C}{\sqrt{T}}\right)- \\ -S_0\varphi\left(\dfrac{b_C}{\sqrt{T}}-\sigma\sqrt{T}\right)\end{array}\right],$$

т. е. пришли к формуле (38). Теорема доказана.

6. Заключение

1. В случае совершенного хеджирования, согласно (31)–(34), решение обладает существенным недостатком, т. к. не зависит от параметра изменчивости μ, характеризующего тенденцию в изменении цены рискового актива: если $\mu=0$, то цена в среднем флуктуирует возле начального значения S_0, т. е. процесс S_t ведет себя как мартингал; если $\mu>0$, то цена в среднем возрастает, т. е. процесс S_t ведет себя как субмартингал; если $\mu<0$, то цена в среднем убывает, т. е. процесс S_t ведет себя как супермантингал. Полученное решение задачи хеджирования с заданной вероятностью снимает этот недостаток, т. к. содержит зависимость от μ через b_C, b_1 и b_2.

2. Численные исследования показали, что $C_T^\mu>0$ и $C_T^\varepsilon<0$, т. е. с ростом параметра μ цена опциона купли будет возрастать, а с ростом параметра ε – убывать. Действительно, с ростом μ происходит увеличение в среднем цены рискового актива S_t, что уменьшает риск для покупателя опциона купли, а за меньший риск следует больше платить. С ростом ε вероятность успешного хеджирования $P(A)=1-\varepsilon$ уменьшается, что приводит к увеличению риска, а за возросший риск следует меньше платить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типа. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 80–129.
2. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.
3. Скороход А.В., Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1975.
4. Новиков А.А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее применения. – 1998. – Т. 43. – № 1. – С. 152–161.

Поступила 26.10.2006 г.

УДК 539.371

ТЕОРИИ «МАЛЫХ» И «БОЛЬШИХ» ИСКРИВЛЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ В ОБЩЕМ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

А.В. Анфилофьев

Томский политехнический институт
E-mail: zvm@tpu.ru

Анализируются теории «малых» и «больших» перемещений при изгибе стержней с оценкой и определением назначения их разделяющих допущений. Формируется общее математическое обеспечение на базе выражений кривизны линии в параметрической форме. Краевая задача определения геометрии искривления стержня представляется двумя задачами: «восстановление линии» по функции кривизны и начальным условиям, затем «спрямление линии» – определение длины дуги кривой по условиям на конце.

1. Введение

Механика деформируемых тел призвана устанавливать функциональные связи между параметрами, характеризующими их состояния, и внешними воздействиями. Её задачи сводятся, в основном, к установлению изменений геометрии тел.

Для большинства конструкций требование жесткости ограничивает величину изменений формы и размеров, образующих их элементов, и соответственно представлениям о «малом» и «большом» сформировано два подхода в определении геометрии деформирования. Различают короткие (жёсткие) стержни, у которых физический ресурс упругости материалов исчерпывается при «малых» изменениях форм и размеров, и длинные (гибкие), допускающие «большие» изменения в геометрии при том же ресурсе упругости.

Для определения «малых» изменений сформирован ряд «руководящих правил и принципов» (несущественное изменение формы, правило относительной жесткости, принцип неизменности начальных размеров), образующих понятийный аппарат теории «малых перемещений» или «малых деформаций», методы и приемы которой составляют основное содержание инженерного курса «Сопротивление материалов». В этой теории по виду функциональной связи между нагрузкой и «характерным перемещением» возникает деление систем на линейные и нелинейные, появляются и терминологические тонкости: слабо искривлённая ось стержней называется упругой линией или упругой кривой, «точная форма упругой оси» называется эластикой [1].

Подход к задаче определения геометрии деформирования систем с длинными (гибкими) стержнями характерен убеждением, что к решению её «нельзя применить обычную теорию сопротивления материалов. Необходимо построить совершенно иную прикладную теорию изгиба, справедливую для сколь угодно больших упругих перемещений и коренным образом отличающуюся от обычной теории, начиная с основных положений и понятий» [2].

Основные уравнения механики деформируемых тел любой формы «давно сведены к определяющим уравнениям» [3] и к настоящему времени «теория больших перемещений, отличающаяся от обычной теории» существует [2], имеются отдельные исследования [1, 4], которые отличает сложность преобразований, сводящих решение к специальным функциям без видимой физической связи их переменных с определяемыми параметрами эластики.

Замечено [3], что «механика деформируемых тел состоит не только из уравнений, а также из определений точного физического смысла всех входящих в эти уравнения параметров и функций и самих уравнений». Очевидно, по причине отсутствия этих определений специальная теория без общих основ и видимых связей с обычной теорией не стала инструментом инженера. В инженерном образовании доминирует приближённая «теория малых перемещений», а результаты решения отдельных задач по специальной теории используются для подтверждения результатов приближённой теории и демонстрации нелинейного поведения некоторых систем при «малых» изменениях [5].