СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов европейского и американского типа. II. Непрерывное время // Теория вероятностей и ее применения. – 1994. – Т. 39. – № 1. – С. 80–129.
2. Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.Л. Математика финансовых обязательств. – М.: ГУ ВШЭ, 2001. – 260 с.
3. Скороход А.В., Гихман И.И. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1975.
4. Новиков А.А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью // Теория вероятностей и ее применения. – 1998. – Т. 43. – № 1. – С. 152–161.

Поступила 26.10.2006 г.

УДК 539.371

ТЕОРИИ «МАЛЫХ» И «БОЛЬШИХ» ИСКРИВЛЕНИЙ СТЕРЖНЕЙ В ОБЩЕМ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

А.В. Анфилофьев

Томский политехнический институт
E-mail: zvm@tpu.ru

Анализируются теории «малых» и «больших» перемещений при изгибе стержней с оценкой и определением назначения их разделяющих допущений. Формируется общее математическое обеспечение на базе выражений кривизны линии в параметрической форме. Краевая задача определения геометрии искривления стержня представляется двумя задачами: «восстановление линии» по функции кривизны и начальным условиям, затем «спрямление линии» – определение длины дуги кривой по условиям на конце.

1. Введение

Механика деформируемых тел призвана устанавливать функциональные связи между параметрами, характеризующими их состояния, и внешними воздействиями. Её задачи сводятся, в основном, к установлению изменений геометрии тел.

Для большинства конструкций требование жесткости ограничивает величину изменений формы и размеров, образующих их элементов, и соответственно представлениям о «малом» и «большом» сформировано два подхода в определении геометрии деформирования. Различают короткие (жёсткие) стержни, у которых физический ресурс упругости материалов исчерпывается при «малых» изменениях форм и размеров, и длинные (гибкие), допускающие «большие» изменения в геометрии при том же ресурсе упругости.

Для определения «малых» изменений сформирован ряд «руководящих правил и принципов» (несущественное изменение формы, правило относительной жесткости, принцип неизменности начальных размеров), образующих понятийный аппарат теории «малых перемещений» или «малых деформаций», методы и приемы которой составляют основное содержание инженерного курса «Сопротивление материалов». В этой теории по виду функциональной связи между нагрузкой и «характерным перемещением» возникает деление систем на линейные и нелинейные, появляются и терминологические тонкости: слабо искривлённая ось стержней называется упругой линией или упругой кривой, «точная форма упругой оси» называется эластикой [1].

Подход к задаче определения геометрии деформирования систем с длинными (гибкими) стержнями характерен убеждением, что к решению её «нельзя применить обычную теорию сопротивления материалов. Необходимо построить совершенно иную прикладную теорию изгиба, справедливую для сколь угодно больших упругих перемещений и коренным образом отличающуюся от обычной теории, начиная с основных положений и понятий» [2].

Основные уравнения механики деформируемых тел любой формы «давно сведены к определяющим уравнениям» [3] и к настоящему времени «теория больших перемещений, отличающаяся от обычной теории» существует [2], имеются отдельные исследования [1, 4], которые отличает сложность преобразований, сводящих решение к специальным функциям без видимой физической связи их переменных с определяемыми параметрами эластики.

Замечено [3], что «механика деформируемых тел состоит не только из уравнений, а также из определений точного физического смысла всех входящих в эти уравнения параметров и функций и самих уравнений». Очевидно, по причине отсутствия этих определений специальная теория без общих основ и видимых связей с обычной теорией не стала инструментом инженера. В инженерном образовании доминирует приближённая «теория малых перемещений», а результаты решения отдельных задач по специальной теории используются для подтверждения результатов приближённой теории и демонстрации нелинейного поведения некоторых систем при «малых» изменениях [5].

Представление о коренном отличии теорий «коротких» и «длинных» стержней появилось не сразу [6]. Сложность решения задач в строгой постановке предопределили появление теории «малых» перемещений, а её результативность, отвечающая требованиям практики, отодвинули несколько в сторону от научных интересов и инженерных запросов и как бы устранили необходимость разработки их общей теории.

Развитие численных методов и вычислительной техники создало новое мышление с убеждением, что при машинном анализе «та нелинейность, с которой приходится встречаться при решении практических задач, связанных с расчётом конструкций, не порождает непреодолимых трудностей» [5]. Созданы программные комплексы, которые «могут с успехом использоваться и для нелинейных задач». Однако следует заметить, что современное машинное исследование есть многократное решение линейной задачи. Процесс без физического содержания не способствует установлению однозначных смысловых связей. Возможности такого анализа и его успехи следует, очевидно, оценивать с позиции значимости его результатов. Безусловно, требования к значимости промежуточных и конечных результатов различны. Для конечных результатов любая форма представления имеет несомненную ценность, для промежуточных результатов важна ещё, на наш взгляд, аналитичность (выражение в элементарных функциях) или возможность математического манипулирования ими. Это требование не является следствием приверженности к аналитическим выражениям, это есть естественное и необходимое условие физической интерпретируемости изучаемого явления.

В механике деформирования твёрдых тел, как и в любой науке, имеется немало белых пятен, которые, прикрытые создавшимися представлениями, длительное время остаются таковыми. С.П. Тимошенко указывал [6], что «время от времени необходимо обсуждать основные допущения, на которых основаны методы анализа». Л.И. Седов отмечал [7], что «явное установление общих основ и внутренних связей между различными теориями и наблюдаемыми эффектами способствует углублённому пониманию действительного состояния науки, правильной оценке известных и развивающихся научных достижений». Соответственно, целью работы является выявление общих основ и внутренних связей между двумя обсуждаемыми теориями.

2. Современное математическое обеспечение теорий

Для стержней, упруго изгибаемых по плоской кривой, задача её установления формулируется уравнением Я. Бернулли

$$K = M/EJ, \tag{1}$$

где K – кривизна линии, M – изгибающий момент, EJ – жёсткость стержня.

Кривизна характеризует меру изогнутости линии и определяется как скорость изменения угла наклона касательной θ в точке при её движении по кривой L:

$$K = \frac{d\theta}{dL}. \tag{2}$$

Для линии заданной уравнением $y=f(x)$ параметры кривизны (2), выраженные через соответствующие переменные, приводят к известной формуле математического анализа:

$$K = \frac{d^2y}{dx^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{-3/2}. \tag{3}$$

С выражениями (2) или (3) уравнение (1) образует нелинейное дифференциальное уравнение, которым корректно формулируется задача эластики.

В такой постановке этими задачами занимались Я. Бернулли, Л. Эйлер, Ж.Л. Лагранж, Ж.Р. Кирхгоф, А. Клебш, Б. Сен-Венан и многие другие. Ж.Р. Кирхгоф к 1859 г. [6] установил тождественность уравнений вращения твёрдого тела относительно закреплённой точки и уравнений равновесия стержня деформированного силами, приложенными на его концах. «Динамическая аналогия Кирхгофа» в настоящее время составляет основу «теории больших перемещений», представленной методами [2], которые нашли некоторое применение [8], но не вписались в традиционные инженерные курсы.

Основу теории «малых перемещений» составляет «метод нахождения кривых линий, имеющих несущественное отклонение от прямых», предложенный Л. Эйлером. Метод заключается в замене точного выражения кривизны (3) упрощенным:

$$K^* = d^2y/dx^2. \tag{4}$$

Л. Эйлер не дал своему предложению математической оценки. До настоящего времени считается [9], что «ограничиваясь рассмотрением весьма «малых деформаций», он счёл возможным принять приблизительно дифференциал дуги dL за дифференциал абсциссы dx и преобразовал таким образом точное выражение в приблизительное». Это утверждение в этой или иной форме до настоящего времени доказывается в учебной и технической литературе.

Ф.С. Ясинский [9], разложив (3) в ряд

$$K = \frac{d^2y}{dx^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{3\cdot 5}{2!\cdot 2^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4+\cdots\right],$$

оценивал (4) по остатку ряда

$$K^* - K \approx \frac{3}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2}\,\mathrm{tg}^2\theta,$$

чтобы показать, что предложенное им выражение кривизны

$$K^*_я = d^2y/dL^2$$

является более точным.

Эта приближённая оценка и существующие объяснения замены (3) на (4) являются недостаточными для представления об ограничениях на величину определяемых перемещений и следствиях, которые обусловлены принятым упрощением. В названиях «метод нахождения кривых линий, имеющих несущественное отклонение от прямых» или «метод малых перемещений (деформаций)» молчаливо предполагается, что величина перемещений определяется в системе координат, связанной с начальным положением недеформированного стержня. Однако искривление не может быть характеризоваться величиной линейных перемещений. Так, например, для стержня, искривление которого определено углами поворотов поперечных сечений, «большие» перемещения в системе осей x_1y_1 могут быть «малыми» в системе x_2y_2 (рис. 1).

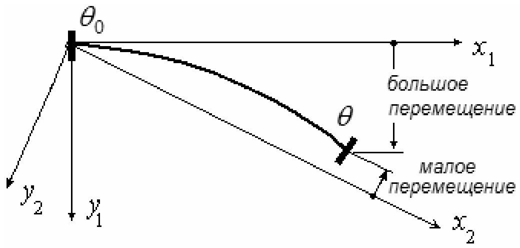

Рис. 1. *Перемещения в изгибаемом стержне*

Очевидно, упрощенное выражение кривизны (4) позволяет исследовать геометрию деформирования стержней с «большими» перемещениями, если в иной системе координат её изменение не выходит за пределы «малости» искривления. «Малость деформации» также не связана с величиной перемещений, она определяется ресурсом упругости материала. О величине искривления можно судить только по углам поворота поперечных сечений: они одинаковы в любых системах координат.

3. Оценка упрощенного выражения кривизны

Введение в анализ геометрии деформирования стержней выражения (4) трактуется при очевидной эквивалентности для малых углов $\mathrm{tg}\theta \approx \sin\theta \approx \theta$ как допущение равенства $dL=dx$ в (2) или пренебрежение квадратом величины dy/dx по сравнению с единицей в (3). Так как дифференциал дуги кривой линии связан с дифференциалом абсциссы соотношением $dx=dL\cdot\cos\theta$, то равенство $dx=dL$ можно ассоциировать с допущениями

$$\cos\theta \approx 1 \text{ или } 1/\cos\theta \approx 1.$$

В действительности (4) следует из (3), если принять

$$[1+(dy/dx)^2]^{-3/2} \approx 1.$$

Преобразуем правую часть, заменив производную по её определению

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\theta, \quad [1+\mathrm{tg}^2\theta]^{-3/2} = \cos^3\theta.$$

Приходим к заключению, что замена выражения (3) на (4) эквивалентна введению допущений $\cos^3\theta=1$ или $1/\cos^3\theta=1$. Эти допущения являются более грубыми, чем предполагается. Между выражениями кривизны существует строгое соотношение

$$K = K^* \cos^3\theta. \qquad (5)$$

Использование упрощенного выражения кривизны K^* приводит только к линеаризации дифференциальных уравнений (1), допущение $dx=dL$ имеет другое назначение.

4. Возможные варианты упрощения выражения кривизны

Упрощенное выражение кривизны K^* формально получено в результате деления её точного выражения K на функцию $\cos^3\theta$. Эта математическая операция увеличивает кривизну и определяет некоторую линию, расположенную по отношению к реальной со стороны её вогнутости. С этой же функцией-допущением, применив операцию умножения, можно аналогично определить линию меньшей кривизны, расположенную с другой стороны реальной линии. Используя менее слабые по значимости функции $\cos^2\theta$, $\cos\theta$, не выходя за границы допущения, введённого Л. Эйлером, получаем спектр выражений кривизны:

$$K^* = K\left(\frac{1}{\cos^3\theta} \cdots \cos^3\theta\right). \qquad (6)$$

В него входит «уточнённая» формула, предложенная Ф.С. Ясинским [9]

$$K_я^* = \frac{d^2y}{dL^2} = \frac{d}{dL}\left(\frac{dy}{dL}\right) = \frac{d}{(dx/\cos\theta)}\left(\frac{dL\cdot\sin\theta}{dL}\right) =$$

$$= \cos\theta\,\frac{d(\sin\theta)}{dx} = K\cos\theta.$$

Можно сказать, что Ф.С. Ясинский принял более строгое допущение и с операцией умножения получил своё выражение кривизны. Л. Эйлер до него выбрал операцию деления и использовал функцию $\cos^3\theta$.

Представление оси стержня, изгибаемого сосредоточенным моментом (рис. 2), демонстрирует эффект использования разных выражений кривизны (6).

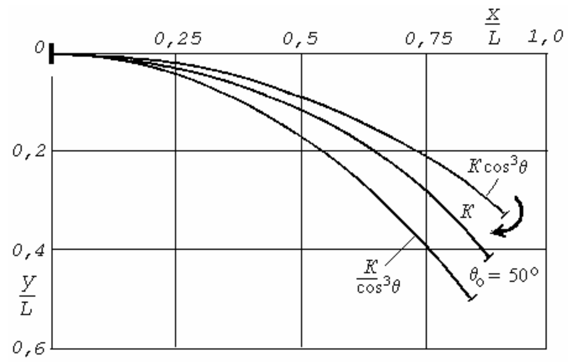

Рис. 2. *Искривление стержня в зависимости от выражения кривизны*

На рис. 3 показаны связи нагрузки с поворотом перемещаемого конца и указана граница между «малыми» и «большими» искривлениями, до которой выражения кривизны (6) определяют кривые близкие друг к другу. С уменьшением значимости упрощающей функции дифференциальное уравнение становится точнее, и эта граница (3 % в разности) смещается в сторону больших искривлений.

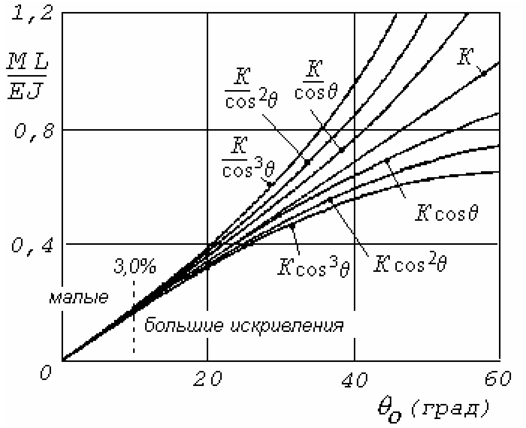

Рис. 3. *Связь нагрузки с углом поворота концевого сечения стержня при разных выражениях кривизны*

5. Параметрическая форма выражений кривизны

Если отвлечься от физического смысла задач эластики, который им придаёт уравнение Я. Бернулли (1), то это чисто математическая задача – «восстановление линии» по функции изменения кривизны $f(k)=(M/EJ)$. Математика даёт определение кривизны (2) и её координатное выражение (3), назначение которого – установление кривизны функционально определённой линии. Для решения обратных задач формулы (2) и (3) не предназначены и такие задачи в курсах математики не рассматриваются.

Выражением (2) и (3) в параметрической форме [10]

$$K = \mp\frac{d(\sin\theta)}{dx} = \pm\frac{d(\cos\theta)}{dy} \tag{7}$$

кривизна определяется в системе координат скоростью изменения тригонометрических функций угла наклона касательной θ в точке при движении по линии. Угол наклона касательной здесь представлен как основной параметр. Аналогичный вид приобретает также упрощенное выражение (4)

$$K^* = \pm\frac{d(\text{tg}\theta)}{dx} = \pm\frac{d}{dy}\left(\frac{\text{tg}^2\theta}{2}\right). \tag{8}$$

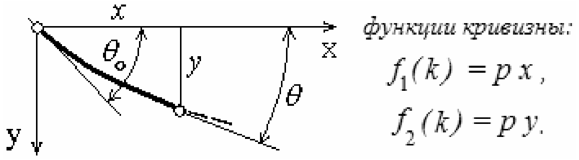

Рис. 4. *Восстановление линии по кривизне*

Кривизна в этих выражениях имеет знаки, и они устанавливается по изменению соответствующих функций, которые характеризует искривление линии. Структура точного и упрощенного выражений кривизны визуализирует связи и общность двух теорий.

Так, с функцией кривизны $f_1(k)=px$ (рис. 4) с выражениями кривизны (7) и (8) задача восстановления линии формулируется дифференциальными уравнениями

$$-\frac{d(\sin\theta)}{dx} = px, \quad +\frac{d(\cos\theta)}{dy} = px. \tag{9}$$

$$-\frac{d(\text{tg}\theta)}{dx} = px, \quad -\frac{d(\text{tg}^2\theta)}{2dy} = px. \tag{10}$$

При начальных условиях $x=0$, $y=0$, $\theta=\theta_0$ из (9) следует уравнение линии для любых искривлений:

$$x\sqrt{p} = \sqrt{2(\sin\theta_0 - \sin\theta)},$$

$$y\sqrt{p} = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d(\cos\theta)}{\sqrt{2(\sin\theta_0 - \sin\theta)}}. \tag{11}$$

Для «малых» искривлений из (10) её уравнение:

$$x\sqrt{p} = \sqrt{2(\text{tg}\theta_0 - \text{tg}\theta)},$$

$$y\sqrt{p} = \frac{1}{3}(2\text{tg}\theta_0 + \text{tg}\theta)\sqrt{2(\text{tg}\theta_0 - \text{tg}\theta)}. \tag{12}$$

Аналогично, с функцией кривизны $f_2(k)=py$ (рис. 4) устанавливаем уравнения другой кривой:

$$y\sqrt{p} = \sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)},$$

$$x\sqrt{p} = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d(\sin\theta)}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos\theta_0)}}. \tag{13}$$

$$y\sqrt{p} = \sqrt{\text{tg}^2\theta_0 - \text{tg}^2\theta},\; x\sqrt{p} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\text{tg}\theta}{\text{tg}\theta_0}\right). \tag{14}$$

Как можно заметить, по функциям кривизны и начальным условиям можно определить только уравнение линии. Задачи эластики являются краевыми (граничными). Диапазон координат точек искривлённой линии конечной длины ограничен её проекциями на оси координат, и он остаётся неопределённым. Его необходимо определять, решая задачу установления длины дуги кривой при указанном положении конечной точки. В математике эту задачу называют «спрямлением» линии. При «больших» и «малых» её искривлениях она формулируется одинаковым образом:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{dx}{\cos\theta} \text{ или } L = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{dy}{\sin\theta}.$$

В теории «малых» перемещений она не решается, неопределённость устраняется допущением $dx=dL$, что эквивалентно $L=x_L$. Л.И. Седов [7] это допущение определил как «линеаризацию граничных условий».

Рис. 5 демонстрирует «эластику» по уравнениям (11, 13) и «упругие кривые» по (12, 14) стержня с жесткостью EJ при изгибе сосредоточенной нагрузкой P. Соответственно, в уравнениях кривых $p=P/EJ$. Разные виды изгиба формируются указанием положения концевого сечения.

При определении геометрии деформирования стержней представление двух задач («восстановление» и «спрямление» линии) одной иногда затрудня-

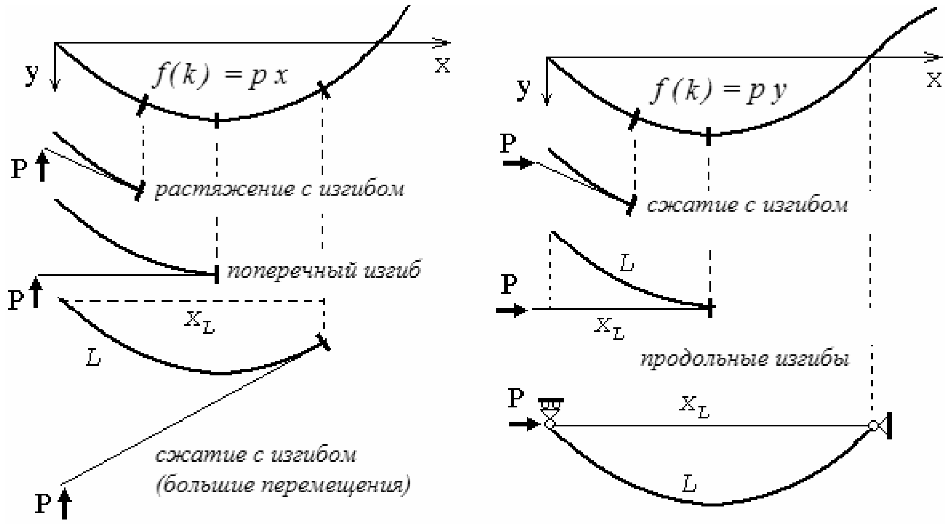

Рис. 5. *Виды изгибов, определяемые одной кривой*

ет интерпретацию решения и может привести к некорректным выводам. Покажем это на решении «задачи Эйлера» (стержень с двумя опорами на рис. 5).

Выражениями (14) определена периодическая кривая. Указав положение концевого сечения $x=x_l$, $\theta=-\theta_0$, из них получаем $y=0$, $x_L\sqrt{p}=\pi$. Приведя их к виду

$$y=\frac{\mathrm{tg}\theta_0}{\sqrt{p}}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\theta_0}\right)^2},\quad \frac{\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}\theta_0}=\cos(x\sqrt{p}),$$

определяем её уравнением в координатной форме:

$$y=\frac{\mathrm{tg}\theta_0}{\sqrt{p}}\sin(x\sqrt{p}). \tag{15}$$

Кривая является синусоидой с амплитудой

$$f=y_{\max}=\frac{\mathrm{tg}\theta_0}{\sqrt{p}}=\frac{x_L}{\pi}\mathrm{tg}\theta_0.$$

При «малом» искривлении» в допущении $L\approx x_L$ из неё выделяется одна полуволна.

Решение этой задачи Л. Эйлером сформировало представление о возможности существования ряда критических нагрузок [5]. Уравнение (15) с неопределённой стрелой прогиба в его решении допускает интерпретировать $\sin(x\sqrt{p})=0$, как $x\sqrt{p}=n\pi$, и за причину кратности принимается коэффициент p функции кривизны.

Вывод

В задачах эластики изгибаемых стержней функции изменения кривизны формируемой нагрузками обычно являются координатными. Вопросы согласования этих функций с выражениями кривизны обусловили появление двух теорий. Согласование её с выражением кривизны (2) ведёт через «динамическую аналогию Кирхгофа» к теории «больших» перемещений с соответствующей спецификой решения задач. Согласование её с выражением (3) упрощенным по (5) для «линеаризации дифференциальных уравнений» и допущением $dL=dx$ для «линеаризации граничных условий» приводит к теории «малых» перемещений с «руководящими правилами и принципами», сущность которых выражают произведённые допущения. Нечёткая интерпретация их сформировала между теориями якобы строгое отличие. Параметрическое выражение кривизны (точное и упрощенное) в координатной форме снимает вопросы согласования с её функцией изменения и показывает условность и нецелесообразность представления о коренном различии двух теорий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. – М.: Мир, 1976. – 669 с.
2. Попов Е.П. Теория и расчёт гибких упругих деталей. Плоский изгиб бруса малой жёсткости при больших перемещениях. – Л.: ЛКВВИА, 1947. – 303 с.
3. Гольденблат И.И. Нелинейные проблемы теории упругости. – М.: Наука, 1996. – 336 с.
4. Мартынов В.К. Задачи эластики в инженерных расчётах // Известия вузов. Машиностроение. – 1986. – № 8. – С. 13–18.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
6. Тимошенко С.П. История науки о сопротивлении материалов. Пер. с англ. – М.: Гостехиздат, 1957. – 536 с.
7. Седов Л.И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.
8. Андреева Л.Е., Пономарёв С.Д. Расчёт упругих элементов машин и приборов. – М.: Машиностроение, 1980. – 326 с.
9. Ясинский Ф.С. Избранные задачи по устойчивости сжатых стержней. – М.-Л.: ГИИТЛ, 1962. – 427 с.
10. Анфилофьев А.В. Определение формы упругой линии гибкого стержня при заданном законе изменения ее кривизны // Известия вузов. Машиностроение. – 2000. – № 4. – С. 17–22.

Поступила 05.03.2007 г.