

УДК 625.083

## ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С.В. Тарарькин, В.В. Аполонский

Ивановский государственный энергетический университет имени В.И. Ленина

E-mail: vlad-apolonskiy@yandex.ru

**Тарарькин Сергей Вячеславович**, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Электроника и микропроцессорные системы» электромеханического факультета, ректор Ивановского государственного энергетического университета имени В.И. Ленина.

E-mail: tsv@ispu.ru

Область научных интересов: электронные управляющие и информационно-измерительные системы; высокоточное управление электроприводами; управляемая синхронизация многоканальных электромеханических систем промышленных агрегатов; автоматизация технологических процессов и производств в химической и текстильной промышленности, машиностроении и энергетике; информационно-измерительные микропроцессорные системы и приборы; компьютерные средства автоматизированного проектирования и отладки управляющих систем реального времени.

**Аполонский Владимир Викторович**, аспирант кафедры «Электроника и микропроцессорные системы» электромеханического факультета Ивановского государственного энергетического университета имени В.И. Ленина.

E-mail:

vlad-apolonskiy@yandex.ru

Область научных интересов: робастные системы автоматического управления, адаптивные системы управления.

Решаются задачи повышения помехоустойчивости и робастности при одновременном снижении сложности систем автоматического управления с полиномиальными регуляторами «входа–выхода» на основе уменьшения степеней полиномов их передаточных функций. Выявляются возможности, определяются условия и разрабатываются методы редуцирования полиномиальных регуляторов путем формирования определённого распределения полюсов синтезируемых систем. Приводятся примеры эффективного управления объектами различной степени сложности с «быстрыми» и «медленными» нулями на основе использования редуцированных регуляторов.

### Ключевые слова:

Система автоматического управления, полиномиальный регулятор, нули и полюсы, зона робастности.

### Введение

Динамические полиномиальные регуляторы (ПР) «входа–выхода», формирующие управляющие воздействия на основе информации о регулируемой координате и её производных по времени, являются эффективными устройствами управления сложными линейными и линеаризованными объектами [1–3].

Общая структурная схема аналогового прототипа системы автоматического управления (САУ) с одним входом и одним выходом на базе ПР приведена на рис. 1, где приняты следующие обозначения:  $y_z$  и  $y$  – заданное и действительное значения регулируемой координаты;  $u$  – управляющее воздействие;  $s$  – комплексная переменная Лапласа;  $A(s)$  и  $B(s)$  – характеристический полином (ХП) и полином воздействия передаточной функции (ПФ) объекта управления (ОУ);  $R(s)$  и  $C(s)$  – полиномы ПФ регулятора.

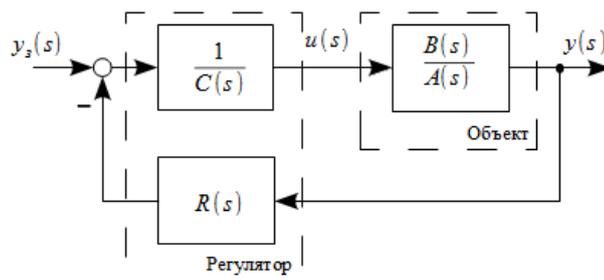


Рис. 1. Общая структурная схема САУ с ПР

Традиционная процедура синтеза ПР состоит в составлении и решении относительно коэффициентов полиномов  $R(s)$  и  $C(s)$  полиномиального уравнения вида

$$A(s)C(s) + B(s)R(s) = D(s), \quad (1)$$

где  $A(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$ ;  $B(s) = b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0$ ;  
 $R(s) = r_k s^k + r_{k-1}s^{k-1} + \dots + r_1s + r_0$ ;  $C(s) = c_l s^l + c_{l-1}s^{l-1} + \dots + c_1s + c_0$ ;  
 $D(s) = s^p + d_{p-1}s^{p-1} + \dots + d_1s + d_0$  – желаемый ХП САУ, определяющий заданное распределение её полюсов;  $n, m, k, l, p$  – степени полиномов.

Если рассматривать получение «минимальных» регуляторов, характеризующихся наименьшими степенями полиномов  $R(s)$  и  $C(s)$ , обеспечивая требования «технической реализуемости» ПР при  $k > l$  путём перехода от его аналогового прототипа к цифровой форме одним из методов численного интегрирования, то при составлении (1) необходимо соблюдать следующие условия:

$$k = n - 1, \quad p = n + l, \quad l = \begin{cases} m - 1 & \text{при } m > 0, \\ 0 & \text{при } m = 0. \end{cases}$$

В этом случае общий порядок  $N$  полиномов  $R(s)$  и  $C(s)$  определяется как

$$N = \deg R(s) + \deg C(s) = k + l = n - 1,$$

т. е. оказывается достаточно высоким.

Существенным недостатком САУ с «минимальными» ( $k > l$ ), т. е. дифференцирующими ПР, является их большая чувствительность к высокочастотным помехам.

Для повышения помехоустойчивости и улучшения робастных свойств таких систем дополнительно увеличивают степень полинома  $C(s)$ , принимая  $\deg C(s) \geq 1$ . Однако в этом случае общий порядок полиномов ПР достигает степени ОУ или превышает её:

$$N = \deg R(s) + \deg C(s) \geq n.$$

Таким образом, в условиях высокой сложности и дифференцирующего характера ПР актуальным является повышение помехоустойчивости и обеспечение робастных свойств САУ не путем повышения степени  $C(s)$ , а за счет возможного снижения степени полинома  $R(s)$  и соответствующего исключения из управления высших производных выходного сигнала ОУ.

Предпосылкой для такого редуцирования ПР является то, что, как было показано в [4] при реализации робастного полиномиального управления, коэффициенты полиномов ПР могут менять знаки при относительно небольших вариациях среднегеометрического корня (СГК)  $\Omega_0 = \sqrt[l]{d_0}$  желаемого ХП системы и, следовательно, могут принимать нулевые значения при определенном выборе СГК.

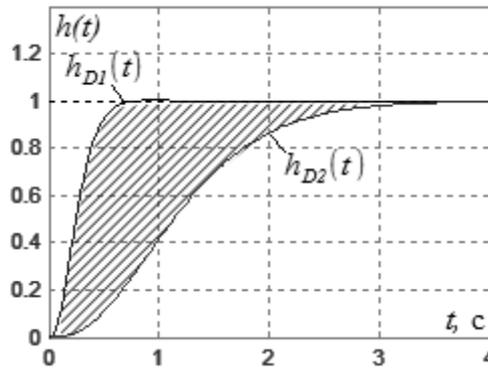
Это указывает на возможность понижения порядка полинома  $R(s)$  при вариациях  $\Omega_0$ , а также при изменениях вида распределения полюсов САУ с учетом особенностей конкретного ОУ.

### Постановка задачи

Поставим задачу выявления возможностей, определения условий и разработки методов понижения порядка (редуцирования) динамических ПР путем формирования определенного распределения полюсов синтезируемой САУ в рамках требуемых показателей качества.

### Основная идея редуцирования регуляторов и методы её реализации

На рис. 2 показан общий вид семейства переходных характеристик САУ, полученных при вариациях СГК  $\Omega_0$  и расположенных в так называемой «зоне робастности» (заштрихована), характеризующейся наличием положительных значений коэффициентов полиномов ПР.



**Рис. 2.** «Зона робастности» САУ

На границах  $h_{D1}(t)$ ,  $h_{D2}(t)$ , разделяющих указанную «зону робастности» и «зоны риска», характеризующиеся появлением отрицательных значений одного или нескольких коэффициентов полиномов ПР, происходит обнуление (переход через ноль) значений этих коэффициентов. Очевидно, что условия такого обнуления могут достигаться подбором значений СГК  $\Omega_0$  ХП принятого вида или изменениями самого вида ХП  $D(s)$ .

Наибольший интерес представляет левая граница «зоны робастности» –  $h_{D1}(t)$ , соответствующая более высокому быстродействию САУ в отличие от правой границы –  $h_{D2}(t)$ , отражающей темп процессов исходного ОУ.

Если при совпадении переходной характеристики САУ с левой границей «зоны робастности» происходит обнуление коэффициента при старшей степени  $s$  полинома  $R(s)$ , а вид и темп процесса соответствует требуемому качеству системы, то принятые выражение ХП  $D(s)$  и СГК  $\Omega_0$  обеспечивают решение поставленной задачи.

Если на левой границе «зоны робастности» указанные условия не выполняются, то можно попытаться обеспечить их изменениями выражения желаемого ХП  $D(s)$  и его СГК, оставаясь в пределах заданных требований к качеству САУ.

Вычисление необходимого значения  $\Omega_0$  в рамках принятого распределения полюсов САУ, определяемого выражением  $D(s)$ , может быть организовано путем многократного расчета параметров полноразмерного (нередуцированного) ПР при вариациях  $\Omega_0$  и фиксации границ перехода САУ из «зоны робастности» в «зону риска» с соответствующим обнулением коэффициентов полиномов регулятора. Искомое значение  $\Omega_0$  будет соответствовать обнулению коэффициента при старшей производной, формируемой полиномом  $R(s)$ .

### **Редуцирование регуляторов при управлении объектами с «быстрыми» и «медленными» нулями**

Проведем исследование возможности редуцирования регулятора при синтезе системы управления двухмассовым электромеханическим объектом (ЭМО) с вязкоупругой кинематической передачей. Его структурная схема представлена на рис. 3, где  $u$ ,  $U$  – управляющее и выходное напряжение силового преобразователя (СП);  $I$  – ток якорной цепи электродвигателя (ЭД);  $M$ ,  $M_y$  – электромагнитный момент и момент упругости;  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  – угловые скорости первой и второй масс;  $C$  – конструктивный параметр ЭД;  $T_a$ ,  $R_a$  – постоянная времени и сопротивление якорной цепи;  $J_1$ ,  $J_2$  – моменты инерции первой и второй масс;  $C_{12}$  – коэффициент жесткости;  $K_d$ ,  $K_T$  – коэффициенты трения,  $K_{сп}$  – коэффициент передачи СП.

Исходные параметры ЭМО приведены в табл. 1.

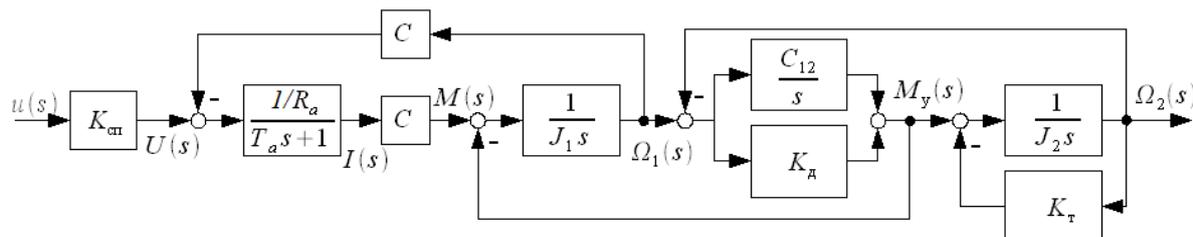


Рис. 3. Структурная схема двухмассового электромеханического объекта

Таблица 1. Исходные параметры двухмассового электромеханического объекта (ЭМО)

$K_{сн}$	$R_a, \text{ Ом}$	$T_a, \text{ с}$	$C, \text{ Вб}$	$J_1$	$J_2$	$C_{12}, \text{ Н}\cdot\text{м}$	$K_d$	$K_t$
				$\text{кг}\cdot\text{м}^2$			$\text{кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$	
22	3,15	0,5	0,16	0,5	0,85	1,5	0,25	4,5

Передаточная функция ЭМО от входа к выходу определяется выражением

$$H(s) = \frac{\Omega_2(s)}{u(s)} = \frac{b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1,32s + 7,92}{s^4 + 8,088s^3 + 19,62s^2 + 30,89s + 31,82}$$

ЭМО имеет один ноль  $s_0 = -6$  и четыре полюса:  $s_1 = -5,25, s_2 = -1,99, s_{3,4} = -0,42 \pm 1,69i$ . Расположение нуля относительно полюсов указывает на его «быстрый» характер. Размеры областей положительности коэффициентов различных типов ПР  $k/l$ , обеспечивающих управление данным объектом при задании биномиального ХП Ньютона, представлены в табл. 2 в виде соответствующих интервалов значений СГК  $\Omega_0$  и времени переходного процесса  $t_n$ .

Таблица 2. Области параметрической грубости САУ с ЭМО с минимальным ПР

Передаточная функция минимального ПР $R(s)/C(s)$	«Зона робастности»	
	в корневой области $-\Omega_0, \text{ с}^{-1}$	во временной области $-t_n, \text{ с}$
$\frac{r_3 s^3 + r_2 s^2 + r_1 s + r_0}{c_0}$	(2,9; 9,2)	(2,6; 0,8)

В табл. 3 приведены результаты синтеза аналоговых прототипов регуляторов полного порядка ПР 3/0 и редуцированного ПР 2/0 для управления рассматриваемым объектом.

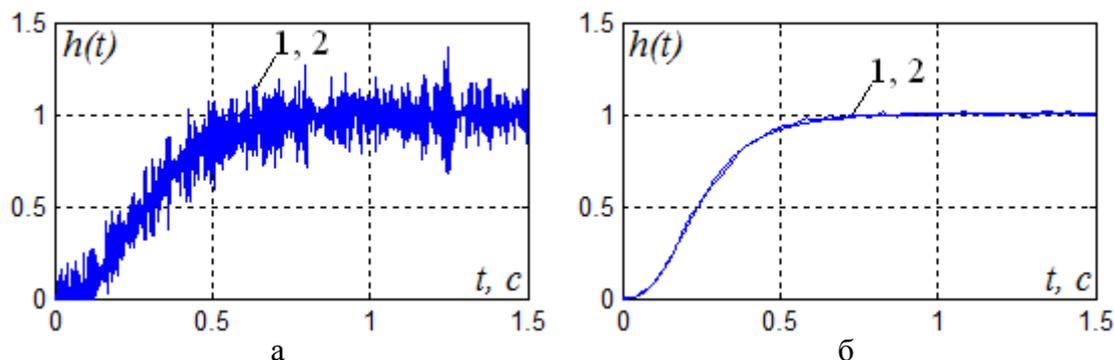
Переход к цифровым реализациям ПР здесь и далее осуществляется с использованием метода численного интегрирования Эйлера путем подстановки  $s = (1-z-1)/T_0$ , где  $T_0$  – такт квантования времени.

На рис. 4, а представлена переходная характеристика 1 для САУ с «минимальным» регулятором ПР 3/0 при величине  $t_n = 0,9 \text{ с}$  ( $\Omega_0 = 8,2 \text{ с}^{-1}$ ) и такте квантования  $T_0 = 0,001 \text{ с}$ , расположенная внутри «зоны робастности», на которой видно значительное влияние аддитивной помехи в канале обратной связи в виде белого шума мощностью  $5 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/м}^2$ .

Таблица 3. Результаты синтеза регуляторов ПР 3/0 и ПР 2/0 для различных значений СГК ХП и времени переходного процесса

Тип регулятора	Время переходного процесса $t_n, \text{ с}$	СГК $\Omega_0, \text{ с}^{-1}$	$r_3$	$r_2$	$r_1$	$r_0$	$c_0$
ПР 3/0 (2/0)	0,8	9,2	0,00	21,78	239,58	900,16	1,00
	0,9	8,2	0,59	19,98	182,38	567,41	0,22

Упрощение регулятора при сохранении высокой помехоустойчивости САУ (график 1, рис. 4, б) можно получить (табл. 3) приведением «минимального» ПР 3/0 к редуцированному виду ПР 2/0 при задании времени переходного процесса  $t_n = 0,8 \text{ с}$  и значения СГК  $\Omega_0 = 9,2 \text{ с}^{-1}$ .



**Рис. 4.** Графики переходных процессов САУ с: а) ПР 3/0; б) ПР 2/0 (1 – при исходных параметрах ЭМО, 2 – при увеличении  $C_{12}$  и  $J_2$  на 40 %)

Важно отметить, что такое редуцирование регуляторов не придает им неминимально-фазовый характер, не выводит синтезируемые САУ за пределы «зоны робастности» и не вызывает существенных изменений их показателей параметрической грубости. Это наглядно иллюстрируют соответствующие переходные характеристики 2 на рис. 4, а, б, полученные при увеличении параметров  $J_2$  и  $C_{12}$  ЭМО на 40 % от их исходных значений.

Следует отметить, что в отличие от известных [5] методов более кардинального редуцирования линейных регуляторов, предполагающих группировку полюсов системы в некоторой области комплексной плоскости с использованием сложных численных расчетов, разработанный подход основывается на модификации классического метода модального управления и сохраняет для разработчика возможность формирования качества переходных процессов на стадии синтеза САУ.

### Заключение

Рациональным путём повышения помехоустойчивости при сохранении робастных свойств и снижении сложности САУ на базе дифференцирующих ПР «входа–выхода» является редуцирование регуляторов, позволяющее понизить степень полиномов их ПФ и исключить из управления высшую производную выходного сигнала ОУ.

Такое редуцирование основывается на учете особенностей конкретного объекта и реализуется определенным выбором распределения полюсов синтезируемой САУ, обеспечивающего расположение её переходной характеристики на левой границе «зоны робастности» и обнуление коэффициента при старшей степени  $s$  полинома числителя  $R(s)$ .

Наряду с упрощением ПР это позволяет сохранить робастные свойства САУ, характерные для области положительности коэффициентов полиномов регулятора («зоны робастности»).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крутько П.Д. Полиномиальные уравнения и обратные задачи динамики управляемых систем // Изв. РАН. Техническая кибернетика. – 1986. – № 1. – С. 125–133.
2. Гайдук А.Р. Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (Полиномиальный подход). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 418 с.
3. Тарарыкин С.В., Тютиков В.В. Системное проектирование линейных регуляторов состояния // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 4. – С. 32–46.
4. Тарарыкин С.В., Тютиков В.В. Робастное модальное управление динамическими системами // Изв. РАН. Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 5. – С. 41–55.
5. Вороной В.В. Краткий обзор методов синтеза регуляторов пониженного порядка // Сб. научных тр. НГТУ. – 2010. – № 4 (62). – С. 25–34.

Поступила 03.06.2013 г.