

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ В СРЕДЕ MATHCAD

Юэ Цюцзе, Лань Гунбо

Научный руководитель: Яковлева Е.М.

Томский политехнический университет

YkovlevaEM@yandex.ru

На протяжении длительного времени в области автоматического управления уделяется большое внимание описанию динамических систем методами пространства состояний [1]. Потому, что классические методы не могут сохранить свои позиции при решении задач многомерных и сложных систем, где они часто оказываются несостоятельными исключительно из-за вычислительных трудностей, тогда как методы пространства состояний позволяют осуществить четкую формализацию и автоматизацию вычислительных процедур.

Модели линейных динамических систем могут быть заданы в виде [1]:

I – уравнений состояния, образующих систему дифференциальных уравнений (ДУ) первого порядка в развернутой или матричной форме;

II – уравнения «вход-выход» в форме дифференциального уравнения n-го порядка или соответствующей передаточной функции;

III – совокупности дифференциальных уравнений, описывающих процессы в отдельных звеньях системы, и алгебраических уравнений, описывающих связи между этими звеньями.

При получении модели динамических систем I способом используется метод пространства состояния системы.

Под **состоянием системы** [2] понимают минимальную информацию, которая достаточна для того, чтобы предсказать ее будущее поведение.

Данный метод является графоаналитическим, позволяющим оценить динамическое поведение любой системы (линейной, нелинейной, стационарной, нестационарной) при различных начальных условиях (НУ) и внешних воздействиях (описание САУ в дифференциальных уравнениях только при нулевых НУ).

Для представления дифференциального уравнения САУ n-го порядка в n-мерном пространстве в общем случае требуется N начальных условий и кроме входной $g(t)$ и выходной $y(t)$ координат вводятся в рассмотрение промежуточные переменные (координаты) $x_1, x_2, \dots, x_n$ – которые называются переменными состоянием САУ. Число переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ – равно порядку системы.

Целью работы является исследование использования для получения математической модели (ММ) САУ методом пространства состояния системы.

Каждая совокупность конкретных числовых значений всех этих переменных полностью

определяет состояние системы в данный момент времени и играет роль НУ для всего будущего движения. Уравнения в переменных состояния САУ для любого класса систем (стационарных, нестационарных, линейных, нелинейных) имеют вид [2]:

$$\dot{x}_i(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, g, t), \quad i = 1 \dots n; \quad (1)$$

$$y_i(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, g, t), \quad (2)$$

Где f_1 и f_2 – функционалы.

Уравнение (1) является уравнением входа системы, а уравнение (2) – выхода. В случае линейной стационарной САУ уравнения (1), (2) принимают вид [2]:

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + K \cdot g(t), \quad (3)$$

$$y_i(t) = C \cdot x(t) + d \cdot g(t). \quad (4)$$

где d – постоянный коэффициент, а X, A, K, C есть матрицы вида:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ \dots \\ k_n \end{bmatrix} \quad C = [c_1 \quad \dots \quad c_n];$$

$$d = k_0 = b_n.$$

Рассмотрим алгоритм использования метода пространства состояния [2] для анализа линейных САУ на примере САР частоты вращения ДПТ с заданным ДУ:

$$(a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0) y(t) = (b_2 p^2 + b_1 p + b_0) g(t)$$

$$\text{где } a_4 = 1, a_3 = 48.715, a_2 = 1022, a_1 = 1.551 \cdot 10^4, a_0 = 7.709 \cdot 10^4, b_2 = 716.599, b_1 = 1.503 \cdot 10^4, b_0 = 7.709 \cdot 10^4. \quad (5)$$

Алгоритм сводится к следующему.

1. Выражается ДУ относительно старшей производной:

$$p^4 \cdot y(t) = -[48.715 p^3 y(t) + 1022 p^2 y(t) + 1.551 \cdot 10^4 p y(t) + 7.709 \cdot 10^4 y(t)] + (716.599 p^2 + 1.503 \cdot 10^4 p + 7.709 \cdot 10^4) g(t) \quad (6)$$

2. Вводится первая переменная системы: $x_1(t) = y(t) - k_0 \cdot g(t)$

3. Составляется система ДУ первого порядка (3), с учётом (6). Добавляется (4) и получаем математическую модель САР в пространстве состояния системы:

$$\begin{aligned} p y(t) & \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + k_1 \cdot g(t); \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) + k_2 \cdot g(t); \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t) + k_3 \cdot g(t); \\ \dot{x}_4(t) = -[48.715 x_4(t) + 1022 x_3(t) + 15510 x_2(t) + 77090 x_1(t)] + k_4 g(t) \end{cases} \\ y(t) &= x_1(t) + k_0 g(t) \end{aligned}$$

4. Составляется матрица A и определяется k_0

:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -77090 & -15510 & -1022 & -48.715 \end{bmatrix};$$

$$d = k_0 = b_n = 0$$

5. Для вычислений k_1 используется рекуррентная формула [3]:

$$k_{n-l} = b_l - \sum_{i=0}^{n-l-1} a_{i+l} \cdot k_i,$$

где $n=4$; l принимает 0, 1, 2, 3

При $l=3$:

$$k_{4-3} = k_1 = b_3 - \sum_{i=0}^{4-3-1} a_{i+3} \cdot k_i = 0 - 48.715 \cdot 0 = 0$$

При $l=2$:

$$k_{4-2} = k_2 = b_2 - \sum_{i=0}^{4-2-1} a_{i+2} \cdot k_i = 716 - 1022 \cdot 0 - 49 \cdot 0 = 716$$

При $l=1$:

$$k_{4-1} = k_3 = b_1 - \sum_{i=0}^{4-1-1} a_{i+1} \cdot k_i = 15030 - 15510 \cdot 0 - 1022 \cdot 0 - 49 \cdot 716 = -19880$$

При $l=0$:

$$k_{4-0} = k_4 = b_0 - \sum_{i=0}^{4-0-1} a_i \cdot k_i = 3.132 \cdot 10^5$$

6. Заполняется матрица K:

$$K = \begin{bmatrix} 0 \\ 716.599 \\ -1.988 \cdot 10^4 \\ 3.132 \cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

7.С помощью программы Rkadapt(u, a, b, N, D) the MathCad решается система ДУ и строится график выходного сигнала $y(t)$. Функция Rkadapt(u, a, b, N, D) - возвращает матрицу, содержащую таблицу значений решения задачи Коши. Где u – вектор НУ; a, b – интервал от a до b ; N - число шагов; $D(x, y)$ – вектор функции, содержащей правые части первых производных, записанных в символьном виде.

Приведём алгоритм анализа САР частоты вращения ДПТ по полученной ММ в программе Rkadapt(u, a, b, N, D) the MathCad:

$$\begin{aligned} k_1 &:= 0 & k_2 &:= 716.599 & k_3 &:= -1.988 \cdot 10^4 & k_4 &:= 3.132 \cdot 10^5 \\ D(x, y) &:= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 + 716.599 \\ y_3 - 19880.0 \\ -48.715 y_3 - 15510 y_1 - 1022 y_2 - 77090 y_0 + 313200.0 \end{pmatrix} \\ u &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & Y &:= \text{Rkadapt}(u, 0, 1, 1000, D) & n &:= 0..999 \end{aligned}$$

График найденного решения в программе Rkadapt(u, a, b, N, D) представлен на рисунке 1. Из графика видно, что процесс колебательный, затухающий. Время регулирования: $t_p=0.538$ с. Максимальное значение регулируемой величины: $h_{\max}=1.519$, установившееся $h_{\text{уст}}=1$. Перегулирование равно: $\sigma, \% = \frac{1.519-1}{1} * 100\% = 51.9\%$

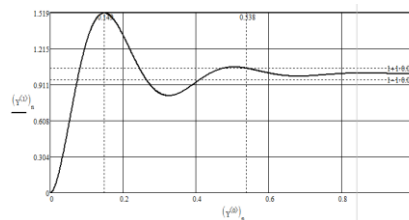


Рисунок 1 – График переходного процесса САР частоты вращения ДПТ, полученного в программе Rkadapt(u, a, b, N, D)

Результаты исследования ММ САР частоты вращения ДПТ, созданной методом пространства состояния системы хорошо коррелируются с исследованиями, проводимыми на модели, созданной в среде MatLab, программой Control System Toolbox:

```
>> W=tf([716,599 1,503*10^4 7.709*10^4],[1 48.715 1022 1.551*10^4 7.709*10^4])
```

```
>> step(W)
```

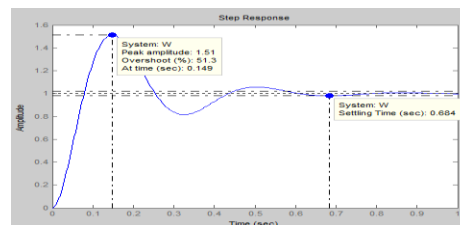


Рисунок 2 – График переходного процесса САР, полученный в среде MatLab

Из графика видно, что процесс колебательный, затухающий. Время регулирования: $t_p=0,684$ с. Максимальное значение регулируемой величины: $h_{\max}=1.519$, установившееся $h_{\text{уст}}=1$. Перегулирование $\delta=51.3\%$.

Исследования САР частоты вращения ДПТ по созданной ММ с использованием метода пространства состояний, показали возможность и простоту использования данного подхода к оценке показателей качества системы высокого порядка.

Литература

1. Дядик В.Ф., Байдали С.А., Криницын Н.С. Теория автоматического управления. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 196 с.

2. Яковлева, Е.М. Теории управления: Лабораторный практикум для студентов специальности 210100/Е.М. Яковлева, В.С. Аврамчук, В.П. Казьмин. – Томск: изд. ТПУ. -2010.- 44 с.

3. Стрейц В. Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления / Пер. с англ. под ред. Я.З. Цыпкина – М.: Наука, 1985. – 294 с.