РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ОБРАБОТКИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Сергеева Ю.С., Рыбалка С.А.
Томский политехнический университет, Институт кибернетики
sers-s@mail.ru

Введение

Геодезическо-маркшейдерские работы являются ответственным процессом на всех этапах строительства метрополитенов, тоннельных путепроводов, карьеров по добыче полезного ископаемого и т.п. Для качественного и эффективного маркшейдерского обеспечения работ используются геодезические приборы, обеспечивающие необходимую точность и оперативная и качественная обработка результатов [1, 2].

Целью работы является выработка единого подхода к решению различных задач геодезии независимо от природы исходных данных – угловые или дистанционные. В статье рассматриваются способы решения классических задач геодезии на плоскости методами аналитической геометрии и линейной алгебры.

Решение задачи с угловыми измерениями

Рассмотрим классическую задачу геодезии, приведенную в [1, 2].

Задача. Даны два угловых измерения от двух точек X_1 и X_2, с известными координатами, на точку X, с неизвестными координатами. Требуется определить координаты точки X.

В [1, 2] приводится решение такой задачи через использование тригонометрических функций. Будем полагать, что все измерения произведены на плоскости, а углы и координаты заданы в декартовой системе координат.

Пусть при наблюдении из точки X_1 на точку X был получен полярный угол α_1. Тогда исходная точка X_1 может быть записана как вектор-столбец: $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, а неизвестная точка вектором $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. А угол наблюдения α_1 может быть выражен вектором $P_1 = \begin{pmatrix} x_{p1} \\ y_{p1} \end{pmatrix}$ или $P_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix}$. Не имеет значения какова длина такого вектора, существенно лишь направление, определяемое таким вектором, то есть важно соотношение компонентов x_{p1} и y_{p1} и их знаки.

Тогда координаты неизвестной точки X будут вычисляться как

$$X = X_1 + c_1 P_1 . \qquad (1)$$

Аналогично при наблюдении из точки X_2 на точку X под углом α_2 будут получены данные: $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} x_{p2} \\ y_{p2} \end{pmatrix}$, координаты неизвестной точки X будут вычисляться как

$$X = X_2 + c_2 P_2 . \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) видно, что правые части равны и можно получить, что

$$X_1 + c_1 P_1 = X_2 + c_2 P_2 . \qquad (3)$$

Уравнение (3) можно переписать в другом виде

$$X_2 - X_1 = c_1 P_1 - c_2 P_2 \qquad (4)$$

или

$$X_2 - X_1 = P \begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix} . \qquad (5)$$

Здесь P – матрица, сформированная как вектор-строка состоящий из столбцов P_1 и P_2:
$P = \left(\begin{pmatrix} x_{p1} \\ y_{p1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{p2} \\ y_{p2} \end{pmatrix} \right)$.

Не изменяя уравнения (5), вектор коэффициентов $\begin{pmatrix} c_1 \\ -c_2 \end{pmatrix}$ в правой части, можно искусственно записать как произведение $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ или $I' \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ – вектор-столбец коэффициентов, а $I' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – инволютивная матрица[1].

Тогда уравнение (4) можно записать в виде

$$X_2 - X_1 = P \cdot I' \cdot C . \qquad (6)$$

Умножая обе части уравнения (6) на матрицу P^{-1} (обратную к P) и на I' (то есть обратную к I') получаем, что вектор коэффициентов C определяется как

$$C = I' \cdot P^{-1} \cdot (\mathrm{X}_2 - \mathrm{X}_1) .$$

После вычисления значений вектора C координаты новой точки X можно определять как из уравнения (1), так и (2).

В случае, если углы α_1 и α_2 измерялись от неизвестной точки X на точки с известными

[1] Иволютивная матрица – матица A совпадающая со своей обратной A^{-1}, то есть $AA = I$.

координатами X_1 и X_2, можно получить решение совпадающее с приведенным.

Решение задачи как системы линейных уравнений

Решение той же задачи может быть сведено к построению системы линейных уравнений и ее решению.

Пусть как и ранее неизвестная точка X наблюдается из точек X_1 и X_2 вдоль векторов P_1 и P_2 соответственно. Тогда точка X является точкой пересечения лучей коллинеарных векторам P_1 и P_2 исходящих из точек X_1 и X_2 соответственно. Такие прямые могут быть описаны в неявном виде. Система линейных уравнений пересечения двух таких прямых можно записать в виде

$$\begin{cases} N_1^T\left(X - X_1\right) = 0 \\ N_2^T\left(X - X_2\right) = 0 \end{cases},$$

где N_1, N_2 – векторы нормали к прямым проходящим через пары точек (X, X_1) и (X, X_2). Такие векторы можно получить путем поворота векторов P_1 и P_2 на угол $\pi/2$. В матричном виде эту систему можно записать как

$$N \cdot X = B,$$

где матрица $N = \begin{pmatrix} N_1^T \\ N_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_{p1} & x_{p1} \\ -y_{p2} & x_{p2} \end{pmatrix}$, а вектор $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{p1}y_1 - y_{p1}x_1 \\ x_{p2}y_2 - y_{p2}x_2 \end{pmatrix}$. Если определитель матрицы N отличен от нуля, то система линейных уравнений является невырожденной и имеет единственное решение которое может быть записано как

$$X = N^{-1} \cdot B,$$

где N^{-1} матрица обратная к N. В случае если матрица двумерная, то обратная матрица записывается в виде [3]

$$N^{-1} = \frac{1}{x_{p1}y_{p2} - x_{p2}y_{p1}} \begin{pmatrix} x_{p2} & -x_{p1} \\ y_{p2} & -y_{p1} \end{pmatrix}.$$

Решение задачи с дистанционными измерениями

Рассмотрим другую задачу геодезии, приведенную в [1, 2].

Задача. Даны два дистанционных измерения от двух точек X_1 и X_2, с известными координатами, на точку X с неизвестными координатами. Требуется определить координаты точки X.

Как и в предыдущем случае будем считать, что все координаты заданы в декартовой системе координат. При такой постановке задачи точка X находится на пересечении двух окружностей с центрами в точках X_1 и X_2. Такой подход дает квадратное уравнение и, как результат, два решения одно из которых истинное, а второе ложное В данной работе решение ищется из треугольника образованного точками X_1, X_2, X. Введем обозначение

$$R_3 = |X_2 - X_1| = A + B,$$

где A и B – дистанции до точки O от точек X_1 и X_2 соответственно. Решение можно найти исходя из того, что исходные точки X_1 и X_2, и искомая точка X, в купе с точкой O, образуют два прямоугольных треугольника. Используя введенные обозначения, можно записать

$$R_1^2 - (X - O)^T (X - O) = A^2, \qquad (7)$$

$$R_2^2 - (X - O)^T (X - O) = B^2. \qquad (8)$$

Определяя разность между уравнениями (7) и (8) получаем, и разлогая разность квадратов получаем, что

$$A = \frac{(R_1^2 - R_2^2 + R_3^2)}{2R_3}.$$

Определив скаляр A можно найти координаты точки O по формуле

$$O = X_1 + A \cdot \frac{X_2 - X_1}{|X_2 - X_1|}.$$

где $|X_2 - X_1|$ – норма вектора $X_2 - X_1$, скалярная величина.

Координаты искомой точки X будут определяться из того условия, что точки X_1, O, X являются вершинами прямоугольноготреугольника. Тогда получаем скаляр $C = |X - O|$ как

$$A^2 + C^2 = R_1^2 \to C = \sqrt{R_1^2 - A^2}.$$

Конечная точка X определяется как сумма векторов X_1, $(O - X_1)$ и $(X - O)$

$$X = X_1 + A \cdot \frac{X_2 - X_1}{|X_2 - X_1|} + C \cdot \frac{V \cdot (X_2 - X_1)}{|X_2 - X_1|}.$$

Заключение

Предлагаемые в статье методы решения планарных геодезических задач основаны на методах аналитической геометрии и линейно-алгебраических преобразованиях. Проведение расчетов на тестовых данных подтвердили теоретические выкладки, полученные в работе.

Список использованных источников

1. Куштин И.Ф., Куштин В.И. Инженерная геодезия. – Ростов-н/Д.: Феникс, 2002. – 416 с.
2. Поклад Г.Г., Гриднев С.П. Геодезия. – М.: Академический проект, 2007. – 592 с.
3. Бронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Лань, 2010. – 608 с.