

РАЗМЕЩЕНИЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРВАЛЬНОГО ДОМИНИРУЮЩЕГО ПОЛЮСА САУ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ ПОЛИНОМОВ

Хожаев И.В.

Научный руководитель: Гайворонский С.А.
Томский политехнический университет, Институт кибернетики
ivh1@tpu.ru

1. Введение

В связи с расширением областей применения систем автоматического управления (САУ) особую актуальность приобретает задача обеспечения желаемого качества работы САУ в условиях изменяющихся параметров технологического процесса.

Данная задача может быть решена за счет размещения полюсов САУ с интервальными параметрами в соответствии с требованиями к качеству управления. Размещение может осуществляться согласно принципу доминирования: часть полюсов – доминирующие полюса – будут задавать качество переходного процесса; остальные полюса – свободные – при этом должны быть расположены так, чтобы их влияние на переходный процесс было минимальным [1].

2. Постановка задачи

Пусть интервальный характеристический полином (ИХП) исследуемой системы имеет вид:

$$D(s) = \sum_i a(\bar{K}, \bar{q}) \cdot s^i,$$

где \bar{K} – вектор параметров регулятора; \bar{q} – вектор интервальных параметров системы. Представим ИХП системы в следующем виде:

$$D(s) = A(s, s_0) \cdot B(s, \bar{K}, \bar{q}) + R(\bar{K}, \bar{q}),$$

где s_0 – доминирующий полюс системы.

Очевидно, что доминирующий полином $A(s, s_0)$ определяет положение доминирующего полюса системы; свободный полином $B(s, \bar{K}, \bar{q})$, являющийся результатом деления $D(s)$ на $A(s, s_0)$, определяет положение всех прочих полюсов; $R(\bar{K}, \bar{q})$ – остаток от этого деления.

Таким образом, для обеспечения желаемого расположения полюсов системы необходимо добиться устойчивости полинома $B(s, \bar{K}, \bar{q})$ и равенства остатка $R(\bar{K}, \bar{q})$ нулю.

Сформулируем окончательно цель и задачи данного исследования. Цель работы – разработать методику нахождения значений параметров ПИД-регулятора, обеспечивающего заданное расположение вещественного интервального доминирующего полюса и областей локализации

свободных полюсов системы. Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд задач:
– найти зависимость между параметрами системы и коэффициентами свободного полинома;
– найти зависимости между коэффициентами регулятора, обеспечивающие равенство нулю остатка от деления полиномов.

3. Алгоритм синтеза ПИД-регулятора

Воспользуемся интервальным аналогом выражений, изложенных в [1] для вычисления значений коэффициентов свободного полинома:

$$[b]_i = [b]_{i+1} + [a]_{i+2} \cdot [s_0], i \in n-1 \dots 0, \quad (1)$$

где b – коэффициенты свободного полинома; a – коэффициенты характеристического полинома системы.

Для вычисления остатка $R(\bar{K}, \bar{q})$ воспользуемся следующим выражением:

$$R(\bar{K}, \bar{q}) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot [s_0]^i = D([s_0]). \quad (2)$$

Сформулируем алгоритм синтеза ПИД-регулятора по интервальному аналогу [1].

Для применения разработанной методики необходимо иметь следующую информацию о системе:

- ИХП системы, коэффициенты которого зависят от параметров регулятора, интервальных и постоянных параметров системы;
- значения интервальных параметров системы;
- желаемые значения корневых или прямых показателей качества переходного процесса.

Алгоритм синтеза ПИД-регулятора сформулируем следующим образом:

1. Исходя из желаемых значений показателей качества задать интервал доминирующего полюса.
2. На основе выражения (2) вычислить зависимость значений остатка соответствующих левой и правой границ доминирующего полюса от параметров регулятора.
3. Приравняв полученные зависимости к нулю, получить систему уравнений.
4. Решив данную систему, получить зависимости между коэффициентами ПИД-регулятора, обеспечивающие желаемое расположение доминирующего полюса.
5. Воспользовавшись выражением (1), вычислить коэффициенты свободного полинома.
6. провести D-разбиение для свободного полинома и выбрать значение одного из параметров ПИД-регулятора.

7. Вычислить значения остальных параметров по зависимостям из п.4.

5. Числовой пример

Пусть в системе управления четвертого порядка используется ПИД-регулятор

$$W_{PID}(s) = K_p + K_i \cdot s^{-1} + K_d \cdot s,$$

где K_p, K_i, K_d – коэффициенты регулятора. В таком случае, ИХП системы имеет вид:

$$D(s, K_p, K_i, K_d, \bar{a}) = a_3 \cdot s^4 + a_2 \cdot s^3 + (K_d + a_1) \cdot s^2 + (K_p + a_0) \cdot s + K_i,$$

где \bar{a} – вектор параметров системы, при этом

$$a_3 = 0.1; a_2 = [2; 3]; a_1 = [30; 50]; a_0 = [0.4; 1].$$

Ставится задача обеспечить в системе длительность переходного процесса в интервале 1.5-2 с. Такая задача предполагает размещение доминирующего полюса на вещественной оси в интервале $[-2.1; 2]$; остальных полюсов – левее прямой $\text{Re}(X) = -5.5$.

Для решения этой задачи воспользуемся выражением (2) и определим зависимости значений остатка для левой и правой границы доминирующего полюса от параметров регулятора. Приравняв полученные выражения к нулю, получим систему:

$$\begin{aligned} -2.1 \cdot K_p + K_i + 4.41 \cdot K_d + 203.08 &= 0 \\ -2.0 \cdot K_p + K_i + 4.0 \cdot K_d + 95.6 &= 0 \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим зависимости между параметрами регулятора, обеспечивающие желаемое расположение доминирующего полюса:

$$\begin{aligned} K_i(K_p) &= 1.0244 \cdot K_p + 952.99 \\ K_d(K_p) &= 0.2439 \cdot K_p - 262.15 \end{aligned} \quad (3)$$

Подставив полученные зависимости в ИХП системы, рассчитаем с помощью выражения (1) коэффициенты свободного полинома. Проведя для свободного полинома подстановку $s \rightarrow -5.5 + j\omega$, построим D-разбиение в четырех вершинах параметрического многогранника, соответствующих полиномам Харитонова. В результате получим четыре кривых D-разбиения в плоскости параметра K_p .

Из полученного отрезка устойчивости (1400;2100) выберем значение K_p . Пусть $K_p = 1850$, тогда согласно (3), $K_i = 2848$ $K_d = 189.065$. Расположение полюсов системы с такими параметрами регулятора и переходная характеристика в одной из вершин параметрического многогранника показаны на рис. 2.

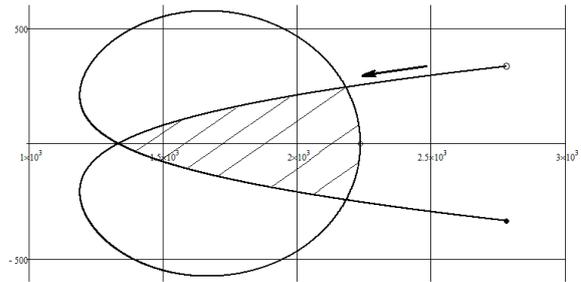


Рисунок 1 - Кривая D-разбиения в одной из вершин параметрического многогранника

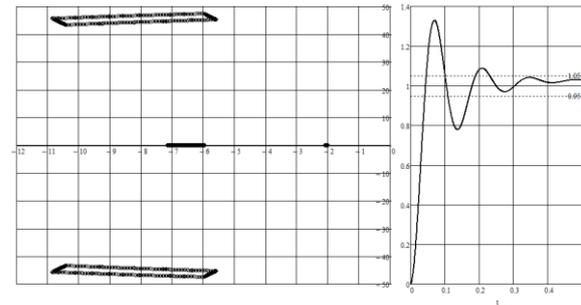


Рисунок 2 - Характеристики полученной системы

6. Заключение

Разработанная методика позволяет задавать качество переходного процесса, размещая желаемым образом один доминирующий интервальный вещественный полюс. Работоспособность методики продемонстрирована на примере – полюса системы размещены желаемым образом, нужное качество переходного процесса обеспечено. Существенный недостаток разработанной методики – излишнее огрубление модели системы, которое выражается в минимум однократном сведении неопределенности коэффициентов к интервальному типу. В дальнейшем данный недостаток будет устранен применением метода выпуклых оболочек [2] вместо D-разбиения при исследовании области устойчивости свободного полинома.

Литература

1. Khozhaev I. V. Linear time invariant system pole placing by polynomial division method [Electronic resources] // Современные техника и технологии: сборник трудов XX международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: в 3 т., Томск, 14-18 Апреля 2014. - Томск: ТПУ, 2014 - Т. 2 - С. 313-314. - Mode of access: http://www.lib.tpu.ru/fulltext/c/2014/C01/V2/C01_V2.pdf
2. Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков Робастная устойчивость и управление. – М.: Наука, 2002. – 303 с.