

Математика и механика.

Физика

УДК 514.76

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПАР n -ПОВЕРХНОСТЕЙ В $(n+2)$ -МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.А. Лучинин

Томский политехнический университет
E-mail: svr@hm.tpu.ru

Изучаются две n -мерные поверхности в $(n+2)$ -мерном проективном пространстве, между точками которых установлено точечное соответствие. Рассматриваются некоторые геометрические образы, связанные с парой поверхностей. Рассмотрение всюду имеет локальный характер. Все используемые функции предполагаются аналитическими.

Введение

Многомерная проективная геометрия имеет достаточно большую историю своего развития. В XX в. особенно интенсивно развивается проективная теория многомерных поверхностей, сетей линий на них и проективных соответствий между поверхностями. Данная работа принадлежит к этому же направлению и продолжает исследования, проводимые в предыдущих работах [1, 2].

Целью работы является изучение пары n -поверхностей в $(n+2)$ -мерном проективном пространстве, нахождение ряда геометрических объектов, тесно связанных с парой поверхностей, выяснение возможности присоединения к паре других n -поверхностей, обладающих свойствами исходных поверхностей пары.

1. Аналитический аппарат

1. Рассмотрим $(n+2)$ -мерное проективное пространство P_{n+2} , отнесённое к проективному реперу $R=\{A_i\}$, состоящему из аналитических точек $A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1}, A_{n+2}$ ($I, J, K, \dots = 0, 1, \dots, n+2$) с производными формулами $dA_i = \omega_i^j A_j$, где ω_i^j – дифференциальные формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры $D\omega_i^j = \omega_i^k \omega_k^j - \omega_k^i \omega_j^k$ и соотношению $\omega_i^i = 0$.

Пусть в пространстве P_{n+2} заданы две поверхности S_n^1, S_n^2 и П: $S_n^1 \rightarrow S_n^2$ – гладкое взаимно однозначное соответствие между ними.

Проведём следующую частичную канонизацию репера: точки A_0 и $A_{n+2} = \Pi(A_0)$ поместим в соответствующие точки поверхностей S_n^1 и S_n^2 пары; точки $A_1, \dots, A_n$ – в касательную n -плоскость $L_n^1 = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ к n -поверхности S_n^1 в точке A_0 ; точки $A_1, \dots, A_n$ – в ка-

сательную n -плоскость $L_n^2 = (A_{n+2}, A_1, \dots, A_n)$ к n -поверхности S_n^2 в точке A_{n+2} .

Точечное соответствие Π индуцирует проективное соответствие между связками касательных направлений, ассоциированных двум соответствующим точкам A_0 и A_{n+2} . Выберем репер пары так, чтобы направления $A_0 A_i$ ($i, j, k, \dots = 1, 2, \dots, n$) соответствовали в этом проективитете направлениям $A_{n+2} A_i$. Тогда основные уравнения нашей задачи принимают вид

$$\omega_0^{n+1} = 0, \omega_0^{n+2} = 0, \omega_{n+2}^{n+1} = 0, \omega_{n+2}^{n+2} = 0, \omega_{n+2}^i = \omega^i. \quad (1)$$

Для краткости будем обозначать в дальнейшем $\omega_0^i = \omega^i$.

Продолжая уравнения (1), получаем

$$\omega_i^{n+1} = \Lambda_{ij}^{n+1} \omega^j, \quad \omega_i^{n+2} = \Lambda_{ij}^{n+2} \omega^j, \\ \omega_0^0 = \Lambda_{ij}^0 \omega^j, \quad \omega_0^0 - \omega_{n+2}^{n+2} = 0. \quad (2)$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^{n+1} + \Lambda_{ij}^{n+1} (\omega_0^0 + \omega_{n+2}^{n+1}) = \Lambda_{ijk}^{n+1} \omega^k,$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^0 + \Lambda_{ij}^0 \omega_0^0 + \Lambda_{ij}^{n+1} \omega_{n+1}^0 = \Lambda_{ijk}^0 \omega^k,$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^{n+2} + \Lambda_{ij}^{n+2} (\omega_0^0 + \omega_{n+2}^{n+2}) + \Lambda_{ij}^{n+1} \omega_{n+1}^{n+2} = \Lambda_{ijk}^{n+2} \omega^k, \quad (3)$$

$$D(\omega_0^0 - \omega_{n+2}^{n+2}) \equiv 0.$$

Здесь символ ∇ обозначает оператор ковариантного дифференцирования.

2. Пусть точка A_{n+1} описывает n -поверхность S_n^3 с касательной n -плоскостью $L_n^3 = (A_{n+1}, A_1, \dots, A_n)$. Задав гладкое взаимно однозначное отображение $\Pi_1: S_n^1 \rightarrow S_n^3$, мы устанавливаем проективное соответствие между связками касательных направлений на этих поверхностях. Потребуем так же, чтобы направление $A_{n+1} A_i$ соответствовало направлению $A_0 A_i$. Тогда

$$\omega_{n+1}^{n+2} = 0, \quad \omega_{n+1}^0 = 0, \quad \omega_{n+1}^{n+1} - \omega_0^0 = 0. \quad (4)$$

Так как $D\omega_{n+1}^0=0$, $D\omega_{n+1}^{n+2}=0$ то мы можем к паре поверхностей S_n^1 и S_n^2 присоединить третью поверхность S_n^3 так, что координатные линии на этих поверхностях соответствуют, и они имеют одну и ту же первую и вторую нормали, которые задаются следующим образом:

$$L_2 = (A_0, A_{n+1}, A_{n+2}) \text{ и } L_{n-1} = (A_1, A_2, \dots, A_n).$$

Тогда уравнения (1–4) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \omega_0^{n+1} &= \omega_0^{n+2} = \omega_{n+1}^0 = \omega_{n+1}^{n+2} = \omega_{n+2}^0 = \omega_{n+2}^{n+1} = 0, \\ \omega_{n+1}^{n+1} &= \omega_{n+2}^{n+2} = \omega_0^0, \omega_i^0 = \Lambda_{ij}^0 \omega^j, \omega_i^{n+1} = \Lambda_{ij}^{n+1} \omega^j, \\ \omega_i^{n+2} &= \Lambda_{ij}^{n+2} \omega^j, \Lambda_{ij}^0 = \Lambda_{ji}^0, \Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^0 + \Lambda_{ij}^0 \omega_0^0 = \Lambda_{ijk}^0 \omega^k, \nabla \Lambda_{ij}^{n+2} + 2\Lambda_{ij}^{n+2} \omega_0^0 = \Lambda_{ijk}^{n+2} \omega^k,$$

$$\nabla \Lambda_{ij}^{n+1} + 2\Lambda_{ij}^{n+1} \omega_0^0 = \Lambda_{ijk}^{n+1} \omega^k \quad (\alpha, \beta, \gamma, \dots = n+1, n+2).$$

3. Рассмотрим на поверхности два направления

$$d_i : \omega^1 = \omega^2 = \dots = \omega^{i-1} = \omega^{i+1} = \dots = \omega^n = 0 \quad (6)$$

и

$$d_j : \omega^1 = \omega^2 = \dots = \omega^{j-1} = \omega^{j+1} = \dots = \omega^n = 0 \quad (i \neq j). \quad (7)$$

Если выполняется условие $d_i[d_j A_0] = 0 \pmod{L_n}$, то эти направления называются сопряжёнными направлениями поверхности, а линии (6, 7) называются сопряжёнными линиями поверхности. Отсюда следует, что координатная сеть линий на поверхности S_n^1 является сопряжённой сетью, если

$$\Lambda_{ij}^{n+1} = \Lambda_{ij}^{n+2} = 0, \Lambda_{ii}^{n+1} \Lambda_{jj}^{n+2} - \Lambda_{ii}^{n+2} \Lambda_{jj}^{n+1} \neq 0 \quad (i \neq j). \quad (8)$$

Аналогично получаем, что координатные линии на поверхностях S_n^2 и S_n^3 образуют сопряжённую сеть, если соответственно

$$\Lambda_{ij}^0 = \Lambda_{ij}^{n+1} = 0, \Lambda_{ii}^0 \Lambda_{jj}^{n+1} - \Lambda_{ii}^{n+1} \Lambda_{jj}^0 \neq 0 \quad (i \neq j) \quad (9)$$

и

$$\Lambda_{ij}^0 = \Lambda_{ij}^{n+2} = 0, \Lambda_{ii}^0 \Lambda_{jj}^{n+2} - \Lambda_{ii}^{n+2} \Lambda_{jj}^0 \neq 0 \quad (i \neq j). \quad (10)$$

Из (8–10) следует

Теорема 1. Если для трёх поверхностей S_n^1 , S_n^2 , S_n^3 на двух любых из них координатная сеть сопряжена, то она будет сопряжена и на третьей.

Пусть на поверхности S_n^1 координатные линии сопряжены, тогда из уравнений (5, 8) следует, что формы ω_i^j ($i \neq j$) являются главными и мы можем положить

$$\omega_i^j = \Lambda_{ik}^j \omega^k \quad (i \neq j).$$

Замыкая эти уравнения, получаем

$$\begin{aligned} d \Lambda_{ik}^j + \Lambda_{ik}^j \omega_0^0 - \Lambda_{il}^j \omega_k^l - \Lambda_{il}^l \Lambda_{ik}^j \omega^l + \\ + \Lambda_{ik}^0 \omega^j + \Lambda_{ik}^{n+1} \omega^j + \Lambda_{ik}^{n+2} \omega^j = \Lambda_{ikl}^j \omega^l. \end{aligned} \quad (11)$$

Проведя фиксацию (8), мы этим завершаем построение репера (с точностью до нормирования). Если потребовать, чтобы на всех трёх поверхностях координатная сеть состояла из сопряжённых линий, т. е. к условиям (8) присоединить ещё условия (9), то мы получаем частный класс нашей конфигурации поверхностей.

2. Фокальные образы

1. Точка F_i^j ($i \neq j$) называется псевдофокусом [3] прямой $A_0 A_i$, если при смещении точки A_0 в направлении $A_0 A_i$ касательная к линии, описываемой точкой F_i^j , принадлежит гиперплоскости $L_{n+1}^j = (A_0, A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_{n+1})$.

Пусть точка $F_i^j = x_i^j A_0 + A_i$ ($i \neq j$) является псевдофокусом прямой $A_0 A_i$, тогда

$$(dF_i^j, A_0, A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_{n+1})|_{\omega^1=\omega^2=\dots=\omega^{j-1}=\omega^{j+1}=\dots=\omega^n=0} = 0,$$

отсюда

$$x_i^j = -\Lambda_{ij}^j \quad (i \neq j, \text{ по } j - \text{ не суммировать}).$$

Таким образом, на каждой прямой $A_0 A_i$ существует $(n-1)$ псевдофокус

$$F_i^{1,j} = -\Lambda_{ij}^j A_0 + A_i \quad (\text{по } j - \text{ не суммировать}). \quad (12)$$

Обозначим

$$F_i^{(1)} = -\frac{1}{n-1} \Lambda_{ij}^j A_0 + A_i \quad (\text{по } j - \text{ суммировать}) \quad (13)$$

гармонический полюс точки A_0 относительно псевдофокусов прямой $A_0 A_i$.

Аналогично находятся псевдофокусы прямых $A_{n+2} A_i$ и $A_{n+1} A_i$, а также гармонические полюсы точек A_{n+2} и A_{n+1} относительно псевдофокусов прямых $A_{n+2} A_i$ и $A_{n+1} A_i$ соответственно в виде

$$\begin{aligned} F_i^{2,j} = -\Lambda_{ij}^j A_{n+2} + A_i; \quad F_i^{3,j} = -\Lambda_{ij}^j A_{n+1} + A_i \\ (i \neq j, j - \text{ не суммировать}). \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} F_i^{(2)} = -\frac{1}{n-1} \Lambda_{ij}^j A_{n+2} + A_i, \quad F_i^{(3)} = -\frac{1}{n-1} \Lambda_{ij}^j A_{n+1} + A_i \\ (\text{по } j - \text{ суммировать}). \end{aligned} \quad (15)$$

Из (12–15) следует

Теорема 2. Если точки F_i^1 являются гармоническими полюсами точки A_0 для прямых $A_0 A_i$, то эти точки являются также гармоническими полюсами точек A_{n+2} и A_{n+1} относительно прямых $A_0 A_{n+2}$ и $A_0 A_{n+1}$, соответственно.

Условия этого имеют вид $\Lambda_{ij}^j = 0$ (по j – суммировать).

Если провести фиксацию $\Lambda_{in}^n = -1$, $\Lambda_{n1}^1 = 1$, ($i \neq n$, по i – не суммировать), то канонический репер будет полностью построен. Геометрически эта фиксация характеризуется тем, что точки $F_i^{1,n} = A_0 + A_i$ и $F_i^{1,1} = A_0 + A_n$, ($i \neq n$) являются псевдофокусами прямых $A_0 A_i$ ($i \neq n$) и $A_0 A_n$.

Из (14) следует, что в этом случае точки $F_i^{2,n} = A_{n+2} + A_i$ и $F_i^{2,1} = A_{n+2} + A_n$ являются псевдофокусами прямых $A_{n+2} A_i$ ($i \neq n$) и $A_{n+2} A_n$. Точки $F_i^{3,n} = A_{n+1} + A_i$ ($i \neq n$) и $F_i^{3,1} = A_{n+1} + A_n$ являются псевдофокусами прямых $A_{n+1} A_i$ ($i \neq n$) и $A_{n+1} A_n$.

2. Рассмотрим первую нормаль $L_2 = (A_0, A_{n+1}, A_{n+2})$ поверхностей пары. Точка $V = x^0 A_0 + x^{n+1} A_{n+1} + x^{n+2} A_{n+2}$ будет фокусом этой плоскости, если $(dM, A_0, A_{n+1}, A_{n+2}) = 0$. Отсюда $x^0 \omega^i + x^{n+1} \omega_{n+1}^i + x^{n+2} \omega_{n+2}^i = 0$ и уравнение фокусной кривой принимает вид $(x^0 + x^{n+1} + x^{n+2}) = 0$.

Таким образом, фокусная кривая плоскости L_2 вырождается в n -кратную прямую

$$x^0 + x^{n+1} + x^{n+2} = 0, \quad x^j = 0.$$

3. Характеристическим элементом гиперплоскости $\Gamma_\alpha^1 = (L_n, A_\alpha)$ называется такое линейное подпространство этой гиперплоскости вся первая дифференциальная окрестность, которой не выходит из этой гиперплоскости.

Пусть точка $M_\alpha = A_0 + x^i A_i + t_\alpha A_\alpha$ описывает характеристический элемент гиперплоскости Γ_α , тогда при любом ω^i выполняется условие $(dM_\alpha, \Gamma_\alpha^1) = 0$. Отсюда $x^i \omega_i^\beta + t_\alpha \omega_\alpha^\beta = 0$ ($\alpha \neq \beta$, α – фиксировано). Так как $\omega_\alpha^\beta = 0$ при $\alpha \neq \beta$, то $x^i \Lambda_{ij}^\alpha = 0$ и так как $\det \|\Lambda_{ij}^\alpha\| \neq 0$, то $x^i = 0$.

Следовательно, характеристическим элементом гиперплоскости Γ_α^1 является прямая $A_0 A_\alpha$.

Аналогично, характеристическими элементами гиперплоскостей $\Gamma_0^2 = (L_n^2, A_0)$ и $\Gamma_{n+1}^2 = (L_n^2, A_{n+1})$ являются соответственно прямые $A_{n+2} A_0$ и $A_{n+2} A_{n+1}$, а характеристическими элементами гиперплоскостей $\Gamma_0^3 = (L_n^3, A_0)$ и $\Gamma_{n+1}^3 = (L_n^3, A_{n+1})$ являются соответственно прямые $A_{n+1} A_0$ и $A_{n+1} A_{n+2}$.

4. Возьмём прямую $A_0 A_\alpha$ и найдём фокусы этой прямой. Точка $C_\alpha = A_0 + t_\alpha A_\alpha$ является фокусом прямой $A_0 A_\alpha$, если $(dC_\alpha, A_0, A_\alpha) = 0$. Тогда получаем $\omega^i + t_\alpha \omega_\alpha^i = 0$ или $(1 + t_\alpha) \omega^\alpha = 0$, отсюда $t_\alpha = 1$.

Следовательно, при любом смещении точка $C_\alpha = A_0 - A_\alpha$ является фокусом прямой $A_0 A_\alpha$.

Аналогично получаем, что фокусом прямой $A_{n+1} A_{n+2}$ является точка $C = A_{n+1} - A_{n+2}$.

Так как $dC_\alpha = (\omega_0^\alpha - \omega_\alpha^\alpha) C_\alpha$, то точка C_α остаётся неподвижной при перемещении точек A_0 и A_α по поверхностям S_n^1 и S_n^2 ($v=2,3$) и все прямые $A_0 A_\alpha$, соединяющие соответствующие точки этих поверхностей, проходят через одну и ту же неподвижную точку C_α .

Аналогично характеризуется точка C прямой $A_{n+1} A_{n+2}$.

5. Уравнение любой гиперплоскости, проходящей через n -плоскость L_n^1 , можно записать в виде $x_{n+1} x^{n+1} + x_{n+2} x^{n+2} = 0$.

Будем предполагать, что эта гиперплоскость является фокальной гиперплоскостью, т. е. она проходит через L_n^1 и бесконечно близко к ней при некотором фокальном смещении. Из

$$d(A_0, A_1, \dots, A_n) = (\dots) L_n^1 + \omega_1^\alpha (A_0, A_\alpha, A_2, \dots, A_n) + \dots + \omega_n^\alpha (A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_\alpha)$$

следует, что это возможно тогда и только тогда, когда $x_\alpha \omega_\alpha^i = 0$ или $x_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j = 0$.

Эта система имеет нетривиальные решения относительно ω^j , тогда и только тогда, когда

$$\det \|x_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha\| = 0. \quad (16)$$

Раскрывая этот определитель, мы получаем уравнение степени n , следовательно, в общем случае существует n фокальных гиперплоскостей и n фокальных смещений на поверхности S_n^1 .

Если координатная сеть линий на поверхности S_n^1 является сопряжённой сетью, то уравнение (16) принимает вид

$$(x_{n+1} \Lambda_{11}^{n+1} + x_{n+2} \Lambda_{11}^{n+2})(x_{n+1} \Lambda_{22}^{n+1} + x_{n+2} \Lambda_{22}^{n+2}) \dots (x_{n+1} \Lambda_{nn}^{n+1} + x_{n+2} \Lambda_{nn}^{n+2}) = 0.$$

Следовательно, на прямой $A_{n+1} A_{n+2}$, мы получаем n точек, каждая из которых определяет фокальную гиперплоскость и соответствующее фокальное смещение, которое является координатным.

Если на поверхностях S_n^2 и S_n^3 координатные сети также сопряжены, то для них мы можем аналогично найти фокальные гиперплоскости и фокальные смещения.

3. Поле инвариантных гиперквадрик

Присоединим к n -поверхности S_n^1 поле гиперквадрик

$$C_{00}^\alpha (x^0)^2 + C_{ij}^\alpha x^i x^j + 2C_{0i}^\alpha x^0 x^i + 2C_{i\beta}^\alpha x^i x^\beta + 2C_{0\beta}^\alpha x^0 x^\beta + C_{\beta\gamma}^\alpha x^\beta x^\gamma = 0. \quad (17)$$

Коэффициенты C_{ij}^α поля гиперквадрик удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dC_{ij}^\alpha = C_{Lj}^\alpha \omega_i^L + C_{iL}^\alpha \omega_j^L + C_{Li}^\alpha \omega_j^L. \quad (18)$$

Потребуем, чтобы гиперквадрики поля, соответствующие точке A_0 , касались поверхности S_n^1 в этой точке, т. е. чтобы они содержали эту точку A_0 и точки $A_0 + dA_0$ касательной n -плоскости. Это требование приводит к следующим уравнениям

$$C_{00}^\alpha = 0, \quad C_{0i}^\alpha = 0.$$

Пронормируем коэффициенты C_{ij}^α , положив $C_{0\beta}^\alpha = \delta_\beta^\alpha$.

Потребуем так же, чтобы наши гиперквадрики были не только касательными к n -поверхности S_n^1 , но и соприкасающимися, т. е. чтобы на каждой гиперквадрике с точностью до величин второго порядка малости лежали и точки $A_0 + dA_0 + \frac{1}{2} d^2 A_0$. Это требование приводит к условию $C_{ij}^\alpha = -\Lambda_{ij}^\alpha$.

Следовательно, уравнения поля соприкасающихся гиперквадрик принимает вид

$$\Lambda_{ij}^\alpha x^i x^j - 2x^0 x^\alpha + 2C_{i\beta}^\alpha x^i x^\beta + C_{\beta\gamma}^\alpha x^\beta x^\gamma = 0. \quad (19)$$

Из уравнений (18) получаем

$$\begin{aligned} dC_{ij}^\alpha &= \Lambda_{kj}^\alpha \omega_i^k + \Lambda_{ik}^\alpha \omega_j^k + C_{\beta j}^\alpha \omega_i^\beta + C_{i\beta}^\alpha \omega_j^\beta + C_{ij}^\alpha \omega^k, \\ dC_{i\beta}^\alpha &= \delta_\beta^\alpha \omega_i^0 + C_{\gamma\beta}^\alpha \omega_i^\gamma + C_{j\beta}^\alpha \omega_i^j + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\beta^j + C_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^\gamma + C_{i\gamma}^\alpha \omega_\beta^k, \\ dC_{\beta\gamma}^\alpha &= \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma^0 + C_{\varepsilon\gamma}^\alpha \omega_\beta^\varepsilon + C_{\varepsilon\gamma}^\alpha \omega_\beta^\varepsilon + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^0 + C_{\beta i}^\alpha \omega_\gamma^i + C_{\beta\varepsilon}^\alpha \omega_\gamma^\varepsilon + C_{\beta\gamma}^\alpha \omega_\varepsilon^k. \end{aligned} \quad (20)$$

Для того чтобы удовлетворить эти условия инвариантности гиперквадрики, рассмотрим ряд геометрических объектов инвариантно связанных с n -поверхностью S_n^1 . Будем предполагать, что соприкасающаяся плоскость второго порядка n -по-

верхности заполняет всё пространство, тогда существует относительный инвариант $I=I(\Lambda_{ij}^\alpha)$ поверхности [4], который представляет собой однородный относительно Λ_{ij}^α многочлен степени $4n$.

Положим $V_\alpha^{ij} = \frac{\partial \ln I(\Lambda_{ij}^\alpha)}{\partial \Lambda_{ij}^\alpha}$, причём $V_\alpha^{ij} \Lambda_{kj}^\alpha = 2\delta_k^i$, $V_\alpha^{ij} \Lambda_{kj}^\beta = 2\delta_\beta^\alpha$.

Используя уравнения (3), получаем

$$\begin{aligned} \nabla V_\alpha^{ij} &= V_\alpha^{ij} \omega_0^0 + V_\alpha^{ij} \omega_k^k, \\ \nabla V_\alpha^{ij} &= V_\alpha^{ij} \omega_k^0 + V_\alpha^{il} \delta_k^j \omega_l^0 + V_\alpha^{ij} \delta_k^l \omega_l^0 - V_\alpha^{ij} \Lambda_{kl}^\beta \omega_\alpha^\beta - \\ &\quad - V_\alpha^{ij} \Lambda_{lk}^\gamma \omega_\alpha^\gamma + V_\alpha^{jl} \Lambda_{lk}^\gamma \omega_\alpha^\gamma + V_\alpha^{ij} \Lambda_{kl}^\beta \omega_\alpha^\beta. \end{aligned} \quad (21)$$

Положим

$$M_\alpha^i = \frac{(n+4)^2}{(n+2)^2} V_\alpha^{ij} + \Lambda_{\beta jk}^\beta \left(V_\alpha^{jk} V_\beta^{il} + \frac{(n+4)^2}{(n+2)^2} V_\beta^{kl} V_\alpha^{ji} \right),$$

тогда

$$\nabla M_\alpha^i = -K_{\alpha j}^{i\beta} \omega_\beta^j + M_{\alpha i}^j \omega^j,$$

где

$$K_{\alpha j}^{i\beta} = \left(\frac{(n+4)^2}{n+2} - 2n \right) \delta_j^\beta \delta_\alpha^i - 2\Lambda_{lk}^\beta \Lambda_{js}^\gamma V_\beta^{sl} V_\gamma^{ik},$$

причём

$$\nabla K_{\alpha j}^{i\beta} = K_{\alpha j}^{i\beta} \omega^l.$$

Так как $\det \|K_{\alpha j}^{i\beta}\| \neq 0$, то мы можем ввести обратный тензор $\tilde{K}_{\alpha j}^{i\beta}$ по формулам $K_{\alpha j}^{i\beta} \tilde{K}_{\beta i}^{\alpha s} = \delta_i^s \delta_\alpha^\beta$, $K_{\alpha j}^{i\beta} \tilde{K}_{\beta i}^{\alpha s} = \delta_i^s \delta_\alpha^\beta$, компоненты которого удовлетворяют уравнениям $\nabla \tilde{K}_{\alpha j}^{i\beta} = \tilde{K}_{\alpha j}^{i\beta} \omega^l$.

Рассмотрим величины

$$\begin{aligned} l_\alpha^j &= M_\beta^j \tilde{K}_{\alpha i}^{j\beta}, \quad \nabla l_\alpha^j + \omega_\alpha^j = l_{\alpha i}^j \omega^i, \\ l_i^0 &= \frac{n+4}{2(n+2)} \Lambda_{ij}^0 l_j^\alpha - \frac{1}{2(n+2)} V_{\alpha j}^{ij} \Lambda_{il}^\alpha, \\ \nabla l_i^0 + l_i^0 \omega_\alpha^0 + \omega_i^0 &= l_{ij}^0 \omega^j, \\ \nabla l_{ij}^0 &= -2l_{ij}^0 \omega_\alpha^0 - l_i^0 \omega_j^\alpha - l_j^0 \omega_i^\alpha + \Lambda_{ij}^\alpha l_k^0 \omega_\alpha^k - \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^0 + l_{jk}^0 \omega^k. \end{aligned}$$

Введённый квазитензор l_i^0 определяет инвариантную нормаль второго рода $x^0 - l_i^0 x^i = 0$; $x^\alpha = 0$ n -поверхности S_n^1 .

Рассмотрим совокупность величин

$$\begin{aligned} l_\alpha^0 &= \frac{1}{n} (V_\alpha^{ij} l_j^0 - V_\alpha^{ij} l_i^0 l_j^0) + l_\alpha^i l_i^0, \\ \nabla l_\alpha^0 &= -l_\alpha^0 \omega_0^0 - l_\alpha^i \omega_i^0 - \omega_\alpha^0 + l_{\alpha k}^0 \omega^k. \end{aligned}$$

Геометрический объект (l_α^0, l_α^i) является объектом оснащения n -поверхности S_n^1 . Он определяет оснащающую плоскость $x^0 - l_\alpha^0 x^\alpha = 0$; $x^i - l_\alpha^i x^\alpha = 0$ и нормаль первого рода $x^i - l_\alpha^i x^\alpha = 0$ этой поверхности.

Если теперь в уравнении (19) соприкасающейся гиперквадрики положить

$$\begin{aligned} C_{i\beta}^\alpha &= \Lambda_{ij}^\alpha l_\beta^j - \delta_\beta^\alpha l_i^0; \\ C_{\beta\gamma}^\alpha &= \Lambda_{ij}^\alpha l_\beta^j l_\gamma^j - l_\beta^0 \delta_\gamma^\alpha + C_{i(\beta}^\alpha l_{\gamma)}^i, \end{aligned}$$

то все уравнения инвариантности (20) будут выполнены.

Таким образом, нами получено поле инвариантных гиперквадрик, присоединённых к поверхности S_n^1

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}^\alpha x^i x^j - 2x^i x^\alpha + 2(\Lambda_{ij}^\alpha l_\beta^j - \delta_\beta^\alpha l_i^0) x^i x^\beta + \\ + (\Lambda_{ij}^\alpha l_\beta^j l_\gamma^j - l_\beta^0 \delta_\gamma^\alpha + C_{i(\beta}^\alpha l_{\gamma)}^i) x^\beta x^\gamma = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Если репер канонизирован, то уравнение (21) принимает вид

$$\Lambda_{11}^\alpha (x^1)^2 + \Lambda_{22}^\alpha (x^2)^2 + \dots + \Lambda_{nn}^\alpha (x^n)^2 - 2x^0 x^\alpha = 0. \quad (22)$$

4. Инвариантные проективные преобразования

1. Рассмотрим уравнение 1-семейства

$$\omega^i = t^i \Theta; D\Theta = \Theta \wedge \Theta_1; \quad dt^i - t^i \omega_0^0 + t^j \omega_j^i = t^i \omega^j. \quad (23)$$

Ему на n -поверхности S_n^1 соответствует линия, описываемая точкой A_0 . Точка $X = x^i A_i$ принадлежащая второй нормали L_{n-1} n -поверхности S_n^1 , вдоль (23) описывает линию с касательной $TX(t)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{dX}{\Theta} &= (\dots)^i A_i + x^i \omega_i^0 A_0 + x^j \omega_j^\alpha A_\alpha = \\ &= (\dots)^i A_i + \Lambda_{ij}^0 x^j t^i A_0 + \Lambda_{ij}^\alpha x^j t^i A_\alpha. \end{aligned}$$

Линейное пространство, натянутое на L_{n-1} и $TX(t)$ пересекается с $L_2^1 = (A_0 A_{n+1} A_{n+2})$ в точке $Y = (L_{n-1}, TY(t)) \cap L_2^1 = \Lambda_{ij}^0 x^j t^i A_0 + \Lambda_{ij}^\alpha x^j t^i A_\alpha$. Вдоль (23) точка Y описывает линию с касательной $TY(t)$. Имеем $\frac{dY}{\Theta} = (\dots)^0 A_0 + (\dots)^\alpha A_\alpha + (\Lambda_{ij}^0 x^j t^i \delta_k^l + \Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_{\alpha k}^l x^j t^i t^k) A_l$.

Линейное пространство, натянутое на L_2^1 и $TX(t)$, пересекается в точке

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= (L_2^1, TX(t)) \cap L_{n-1} = \tilde{x}^i A_i; \\ \tilde{x}^i &= \Lambda_{ij}^0 x^j t^j t^k \delta_k^i + \Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_{\alpha k}^i x^j t^j t^k. \end{aligned} \quad (24)$$

Соотношение (24) определяет проективное преобразование $(n-1)$ -плоскости L_{n-1} в себя, которое определяется матрицей (P_i^j) : $P_i^j = (\Lambda_{ij}^0 \delta_k^j + \Lambda_{ij}^\alpha \Lambda_{\alpha k}^j) t^k$. Это преобразование будет преобразованием W , если $P_i^i = 0$ [5].

Таким образом, в $(n-1)$ -плоскости L_{n-1} мы получаем квадрику, каждой точке которой соответствует преобразование W плоскости L_{n-1} в себя. Эта квадрика имеет уравнение

$$(\Lambda_{ij}^0 + \Lambda_{ik}^\alpha \Lambda_{\alpha j}^k) x^i x^j = 0; x^\alpha = 0; x^0 = 0. \quad (25)$$

Квадрике (25) в n -плоскости L_n^1 соответствует конус

$$(\Lambda_{ij}^0 + \Lambda_{ik}^\alpha \Lambda_{\alpha j}^k) x^i x^j = 0; x^\alpha = 0. \quad (26)$$

Если выполняются уравнения (8, 9), то уравнение (26) принимает вид

$$(\Lambda_{ii}^0 + \Lambda_{ii}^{n+1} + \Lambda_{ii}^{n+2}) (x^i)^2 = 0; x^\alpha = 0. \quad (27)$$

2. Рассмотрим точку $X = x^0 A_0 + x^\alpha A_\alpha$, принадлежащую 2-плоскости L_2 . Вдоль (23)

$$\frac{dX}{\Theta} = (\dots)^0 A_0 + (\dots)^\alpha A_\alpha + (x^0 \omega_0^k + x^\alpha \omega_\alpha^k) A_k,$$

тогда

$$Y = (L_2^1, TX(t)) \cap L_{n-1} = (x^0 \omega_0^k + x^\alpha \omega_\alpha^k) A_k = y^k A_k.$$

Из $\frac{dY}{\Theta} = (\dots)^i A_i + y^k \omega_k^0 A_0 + y^k \omega_k^\alpha A_\alpha$, получаем

$$\tilde{X} = (L_{n-1}, TX(t)) \cap L_2^1 = \tilde{x}^0 A_0 + \tilde{x}^\alpha A_\alpha, \text{ где}$$

$$x^0 = (x^0 \omega^i + x^\alpha \omega_\alpha^i) \omega_i^0; \tilde{x}^\beta = (x^0 \omega^i + x^\alpha \omega_\alpha^i) \omega_i^\beta. \quad (28)$$

Следовательно (28) определяет проективное преобразование 2-плоскости L_2 в себя, задаваемое матрицей

$$\begin{aligned} (\tilde{\Pi}_{\alpha_1}^{\beta_1}), (\alpha_1, \beta_1 = 0, n+1, n+2) : \tilde{\Pi}_0^0 &= \omega_i^0 \omega^i = \\ &= \Lambda_{ij}^0 t^i t^j; \tilde{\Pi}_\alpha^0 = \omega_\alpha^i \omega_i^0 = \Lambda_{ij}^0 t^i t^j; \\ \tilde{\Pi}_0^\alpha &= \omega_i^\alpha \omega^i = \Lambda_{ij}^\alpha t^i t^j; \tilde{\Pi}_\alpha^\beta = \omega_i^\beta \omega_\alpha^i = \Lambda_{ij}^\beta t^i t^j. \end{aligned}$$

Это преобразование будет преобразованием W , если $(\Lambda_{ij}^0 + \Lambda_{ij}^{n+1} + \Lambda_{ij}^{n+2}) t^i t^j = 0$.

Следовательно, мы получаем в n -плоскости L_n^1 конус

$$(\Lambda_{ij}^0 + \Lambda_{ij}^{n+1} + \Lambda_{ij}^{n+2}) x^i x^j = 0; \quad x^\alpha = 0, \quad (29)$$

образующим которого соответствуют 1-с семейства (23), дающие преобразования W 2-плоскости L_2 в себя.

Если репер канонизирован, то уравнения (29) сводятся к уравнениям (27).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лучинин А.А. О паре m -поверхностей с заданной сетью в многомерном проективном пространстве // Известия Томского политехнического университета. — 2006. — Т. 309. — № 4. — С. 11–14.
2. Лучинин А.А., Князева О.Г. Связности, ассоциированные с парой m -поверхностей // Прогрессивные технологии и экономика в машиностроении: Сб. трудов Всеросс. научно-практ. конф. — Юрга, 2003. — С. 314–315.
3. Базылев В.Т. О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Известия вузов. Математика. — 1966. — № 2. — С. 9–19.

3. Пусть дана точка $X = x^\alpha A_\alpha$, принадлежащая оснащающей прямой $l_1 = (A_{n+1}, A_{n+2})$ n -поверхности S_n^1 . Проводя аналогичные рассуждения, получаем преобразование $\tilde{x}^\alpha = x^\beta \omega_\beta^i \omega_i^\alpha$ прямой l_1 в себя, которое определяется матрицей (Π_α^β) : $\Pi_\alpha^\beta = \Lambda_{ij}^\beta \Lambda_{ik}^\alpha t^k t^j$.

Если это преобразование W , то получаем в n -плоскости L_n^1 конус $(\Lambda_{ij}^{n+1} + \Lambda_{ij}^{n+2}) x^i x^j = 0$; $x^\alpha = 0$, образующим которого соответствуют 1-с семейства (23), дающие преобразования W прямой l_1 . Если репер канонический, то уравнения принимают вид

$$(\Lambda_{ii}^{n+1} + \Lambda_{ii}^{n+2}) (x^i)^2 = 0; \quad x^\alpha = 0.$$

Если репер канонизирован (с точностью до нормирования), то аналогичные построения с теми же свойствами можно получить и для поверхностей S_n^2 и S_n^3 .

Выводы

Показано, что к паре n -поверхностей может быть присоединена третья поверхность, обладающая теми же свойствами, что и исходные поверхности S_n^1 и S_n^2 . Построен канонический репер при условии, что на этих поверхностях координатная сеть линий сопряжена. Отмечен частный класс пары n -поверхностей, когда координатная сеть на всех поверхностях является сопряжённой. Найдены ряд инвариантных геометрических образов для каждой из поверхностей, построенной тройки n -поверхностей.

Поступила 17.04.2006 г.