По результатам наблюдений требуется построить оценку $\hat{S}(\omega)$ спектра мощности $S(\omega)$ в виде сплайна первого порядка.

Для решения поставленной задачи разобьем всю ось частот ω на отрезки $[0\,;\Omega]$, $[\Omega\,;2\Omega]$, $[2\Omega\,;3\Omega]$. Рассмотрим статистику:

$$Q = \frac{1}{\lambda^2 \pi T} \sum_{i,j;\, i\neq j} n_i n_j y_i y_j \varphi(t_j - t_i), \quad (1)$$

где для функции $\varphi(\tau)$ справедливо условие:

$$\varphi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega .$$

Усреднив Q по величинам n_i, получим выражение $\overline{Q} = \frac{1}{\pi T} \sum_{i,j;\, i\neq j} y_i y_j \varphi(t_j - t_i)$, $M[\overline{Q}] = \frac{1}{\pi T} \sum_{i,j;\, i\neq j} R[t_j - t_i]\varphi[t_j - t_i] \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega)) S(\omega) d\omega$. Рассматривая интеграл, в котором $S(\omega) = S_{k-1} \frac{k\Omega - \omega}{\Omega} + S_k \frac{\omega - (k-1)\Omega}{\Omega}$ находим явный вид $\Phi(\omega)$ и $\varphi(\tau)$. Подставляя $\varphi(\tau)$ в (1) находим последовательно, которые соединяем отрезками прямых, что и дает оценку $S(\omega)$ в виде сплайна первого порядка при случайном числе данных в моментах измерений. Из построения оценок коэффициентов сплайна следует, что полученные оценки узлов сплайна являются несмещенными. Получены статистические характеристики оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Устинова И.Г., Лазарева Е.Г., Подберезина Е.И. Оценка спектра мощности стационарного случайного процесса сплайном первого порядка – Томск: Известия Томского политехнического университета.− 2014, − Т. 325. − № 2. − с.35 − 40.
2. Терпугов А.Ф., Константинова И.Г. Оценка спектра мощности стационарного случайного процесса сплайнами первого порядка при случайном числе измерений. // Вестник ТГУ, 2000. – Т. 269. – С. 85–89.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕНДА ВРЕМЕННОГО РЯДА В ВИДЕ СПЛАЙНА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПРИ СЛУЧАЙНОМ ЧИСЛЕ ДАННЫХ В МОМЕНТАХ ИЗМЕРЕНИЙ

И.Г. Устинова, Е.Г. Пахомова
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: igu@sibmail.com

Важнейшей задачей функционирования сложных технических систем является задача выделения тренда изменения параметров, которые характеризуют работу системы в некоторые фиксированные моменты времени. Основными аспектами решения такой задачи являются: выбор математической модели, которая бы адекватно описывала тренд наблюдаемых значений случайного процесса, а также задание схемы наблюдений процесса.

В классической теории временных рядов измерения производятся через равные промежутки времени и в каждый момент времени – ровно одно измерение [1, 2]. Однако и возможна и другая схема измерений, при которой в каждый момент времени производится случайное число измерений [3].

Пусть имеется временной ряд $y(t)=f(t)+\xi(t)$, представляющий собой сумму некоторой детерминированной функции $f(t)$, которая является трендом процесса $y(t)$ и $\xi(t)$ − случайной функции, появление которой определяется ошибками измерений, помехами и т.д. Будем полагать, что помехи измерений $\xi_i=\xi(t_i)$, i=1, 2, … – независимые, одинаково распределенные случайные величины с математическим ожиданием $M[\xi_i]=0$ и дисперсией $D[\xi_i]=\sigma^2$. Нам известна последовательность значений $y_1, y_2, ..., y_N$, где $y_i=\dfrac{y_{i1}+y_{i2}+...+y_{in_i}}{n_i}$. Здесь n_i – случайные величины, распределенные по закону Пуассона с параметром λ

Будем считать, что сами моменты времени t_i нам известны. Относительно тренда предполагается, что он представляет собой сплайн третьего порядка. В этом случае весь отрезок наблюдения $[\,0; T\,]$ разбивается на части одинаковой длины: $[\,0; T_0]$, $[\,T_0;\, 2T_0\,]$, ..., $[\,(k-1)T_0;\, kT_0\,]$. На каждом таком отрезке тренд оценивается в виде полинома третьей степени. На границах отрезков эти полиномы сшиваются так, чтобы получилась непрерывная кривая. Такая кусочно-полиномиальная кривая носит название сплайна [4, 5, 6]. На j-м интервале тренд представляется в виде полинома третьего порядка $f_j(t)=a_j+b_j\dfrac{t}{T_0}+c_j\left(\dfrac{t}{T_0}\right)^2+d_j\left(\dfrac{t}{T_0}\right)^3$. Для сшивания полиномов на концах интервалов, должно выполняться условие: $f_{j\text{-}1}(T_0)=f_j(0)$. По результатам измерений значений $y_i^{(j)}$ на j-м интервале необходимо построить оценки коэффициентов a_j, b_j, c_j и d_j. Оценки недостающих коэффициентов на j-м интервале b_j, c_j, d_j найдем методом наименьших квадратов, исходя из условия:

$$Q=\sum_{i=1}^{N} n_i\left[y_i^{(j)}-\left(\hat{a}_j+b_j\frac{t_i}{T_0}+c_j\left(\frac{t_i}{T_0}\right)^2+d_j\left(\frac{t_i}{T_0}\right)^3\right)\right]^2 \Rightarrow \min_{b_j, c_j, d_j},$$

N − число измерений на j-м интервале. Оценки неизвестных параметров находятся в явном виде, исходя из системы $\mathbf{AX}=\mathbf{Y}$, где:

$$\mathbf{A}=\frac{1}{T_0^6}\begin{bmatrix} T_0^4\sum_{i=1}^{N} n_i t_i^2 & T_0^3\sum_{i=1}^{N} n_i t_i^3 & T_0^2\sum_{i=1}^{N} n_i t_i^4 \\ T_0^3\sum_{i=1}^{N} n_i t_i^3 & T_0^2\sum_{i=1}^{N} n_i t_i^4 & T_0\sum_{i=1}^{N} n_i t_i^5 \\ T_0^2\sum_{i=1}^{N} n_i t_i^4 & T_0\sum_{i=1}^{N} n_i t_i^5 & \sum_{i=1}^{N} n_i t_i^6 \end{bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} \hat{b}_j \\ \hat{c}_j \\ \hat{d}_j \end{bmatrix},\quad \mathbf{Y}=\frac{1}{T_0^3}\begin{bmatrix} T_0^2\sum_{i=1}^{N} n_i\left(y_i^{(j)}-\hat{a}_j\right)t_i \\ T_0\sum_{i=1}^{N} n_i\left(y_i^{(j)}-\hat{a}_j\right)t_i^2 \\ \sum_{i=1}^{N} n_i\left(y_i^{(j)}-\hat{a}_j\right)t_i^3 \end{bmatrix}.$$

Исследованы статистические характеристики полученных оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. 755 с.
2. Кендалл М.Д., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М.: Наука, 1976. 736 с.
3. Устинова И.Г., Пахомова Е.Г. Сплайновая оценка тренда временного ряда при случайном числе данных в моменты измерений. порядка – Томск: Вестник Томского государственного университета.− 2015, − № 1(33). − с. 20 − 37.
4. Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А. Сплайны в инженерной геометрии. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
5. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.

6. Лифшиц К.И. Сглаживание экспериментальных данных сплайнами. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. 180 с.

ГАЛАКТИКИ КАК УСКОРИТЕЛИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

В.В. Учайкин, Р.Т. Сибатов, О.П. Харлова
Ульяновский государственный университет
Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого 42, 432017
Ульяновское высшее авиационное училище гражданской авиации
Россия, г. Ульяновск, ул. Можайского 8/8, 432071
E-mail: vuchaikin@gmail.com

Впервые вопрос о стохастическом механизме ускорения космических лучей в случайно неоднородном магнитном поле межзвёздной галактической среды рассмотрен в знаменитой работе Ферми 1949 года [1]. На основании имеющихся тогда астрономических данных автор представлял это поле как случайное распределение блуждающих магнитных облаков, занимающих около 5% межзвёздного пространства, а движение заряженной частицы -- как последовательность случайных столкновений с этими облаками. Небольшое различие в столкновениях с набегающими и убегающими облаками приводит к постепенному повышению энергии частиц (ускорению). Процесс это очень медленный: чтобы увеличить энергию в e раз требуется 10 миллионов столкновений. В таком случае необходимость учёта флуктуаций отпадает, а в их отсутствие энергия частицы возрастает экспоненциально, что при дополнительном предположении об экспоненциальном распределении возраста наблюдаемых частиц (что эквивалентно безграничной однородной слабо поглощающей среде) приводит к степенному характеру их энергетического спектра, в целом согласующемуся с наблюдательными данными.

Вернуться к этому вопросу заставили открытые в последние десятилетия отклонения от картины степенного спектра с *единым* показателем («изломы») [2]. Настоящая работа посвящена проблеме высокоэнергетической области спектра, где наблюдается один из таких изломов. Этот факт является предметом оживлённой дискуссии, в ходе которой сопоставляются две гипотезы – о *внутреннем* и *внешнем* (по отношению к Галактике) происхождении наблюдаемой части спектра.

Предлагаемая в данной работе модель основана на следующих положениях.

1. Космические лучи, заполняющие межгалактическое пространство, рождаются и ускоряются в галактиках, покидают их и, попадая в другие галактики, продолжают там ускорение. Естественно предположить, что, придя в нашу галактику после посещения одной или нескольких предыдущих, они попадут в высокоэнергетическую часть спектра. Вопрос только в количественном соотношении между интенсивностями внутренних и внешних частиц.
2. Существенный вклад в процесс внутригалактического ускорения частиц вносят ускорения на ударных волнах в областях остатков сверхновых, в которых энергия частиц может возрастать на порядок при однократном посещении такой области [3]. В таком процессе уже нельзя пренебрегать флуктуациями, а следует использовать интегродифференциальное уравнение [4,5].
3. Важнейшим элементом предлагаемой модели является *дифференциальное (по энергии) альбедо галактик,* характеризующее ускорительную эффективность галактик по отношению к отражаемым частицам. При этом нет уже никаких оснований считать интервал времени между входом и