

УДК 621.316.8:678.01:537.311

РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В КВАЗИОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ МНОГОЭЛЕКТРОДНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ЭЛЕКТРООБОГРЕВАТЕЛЕЙ

В.В. Евстигнеев, Т.М. Халина, М.В. Халин

Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова, г. Барнаул

E-mail: temf@yandex.ru

Приведены теоретические основы расчета параметров стационарных электрических полей в квазиоднородных средах многоэлектродных композиционных электрообогревателей на основе методов непосредственного определения напряженности поля и конформных преобразований. Предложены расчетные модели, точные и приближенные формулы, необходимые для определения электрической проводимости электрообогревателей различной конструкции. Приведено экспериментальное подтверждение квазиоднородности резистивного слоя по удельной электропроводности.

Наиболее эффективным способом обогрева биологических и технических объектов с точки зрения рационального использования электрической энергии является локальный поверхностно-распределенный электрообогрев, который может быть реализован с помощью композиционных электрообогревателей.

Многоэлектродные композиционные электрообогреватели (МКЭ) представляют собой сложную систему, преобразующую в соответствии с электро-, теплофизическими параметрами МКЭ электрическую энергию в тепловую и обеспечивающую заданную температуру на поверхности электрообогревателя. В связи с этим необходим точный расчет параметров применительно к системе электродов, расположенных в электропроводном композиционном материале.

Строгое решение задачи может быть получено только в результате расчета стационарного электрического поля в квазиоднородной среде, создаваемого системой электродов. Расчетная модель электрообогревателя принята с учетом следующих граничных условий: МКЭ можно считать обладающими сосредоточенными параметрами, так как периодические процессы при частоте $f=50$ Гц рассматриваются как квазистационарные; поверхности электродов по всей длине можно принять эквипотенциальными в связи с малой удельной проводимостью среды; границу по периметру резистивного материала можно считать непроницаемой для силовых линий электрического поля; с учетом того, что длина электродов совпадает с размером резистивного слоя в направлении длины электродов, электрическое поле электрообогревателя принимается плоскопараллельным, одинаковым во всех сечениях по координате z , направленной вдоль длины электродов. При этом во всех точках поля, расположенных по координате z , плотность тока одинакова.

Решение задачи выполнено методом непосредственного определения напряженности электрического поля [1] в сочетании с методом конформных преобразований. Этот метод основан на введении вспомогательной функции $\gamma^0(x,y)$, выражающей величину угла, образуемого вектором напряженности плоскопараллельного поля в какой-либо точке рассматриваемой области с одной из осей декартовой системы координат. Функция $\gamma^0(x,y)$ является гармонической, удовлетворяющей двухмерному уравнению Лапласа и гра-

ничным условиям первого рода, установленным с учетом ортогональности силовых и эквипотенциальных линий поля на участках, где задано одно из условий:

$$U_s = \text{const} \text{ или } \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_s = 0.$$

Электрическое поле систем осесимметричных МКЭ представляется возможным описать с помощью уравнения Лапласа в плоскомеридианной системе, одинаковой во всех меридианных плоскостях, в цилиндрических координатах (R, φ, z) . В случае $l/R > 1$ в цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью цилиндра, электрическое поле оказывается плоскопараллельным и одинаковым для любого z .

В результате введения плоскопараллельной расчетной модели и конформного отображения исходной плоскости комплексного переменного Z на плоскость нового комплексного переменного ζ с соблюдением необходимых соответствий точек исходной и отображенной плоскостей были получены системы нелинейных трансцендентных уравнений. Решение систем выполнялось численно с помощью модификации дискретного метода Ньютона. Матрица Якоби частных производных функций системы аппроксимировалась с помощью первых разностей, минимальный шаг аргумента функции выбирался по критерию потери значимости соответствующей разности. Определенные интегралы, входящие в функции системы уравнений, вычислялись на каждой итерации путем использования квадратурной формулы Ньютона-Котеса восьмого порядка. Одновременно с вычислением последующих значений безразмерных параметров отображения на каждой итерации выполняется оценка погрешности их определения.

С применением данного метода для наиболее часто встречающихся систем МКЭ выполнен расчет электрической проводимости:

1. между двумя парами копланарных электродов, расположенных в проводнике прямоугольного сечения;
2. между трехэлектродными системами;
3. многоэлектродных систем низкотемпературных композиционных электрообогревателей;

154

Таблица 2. Формулы для определения параметров конформного отображения и безразмерных электрических проводимостей для многоэлектродных систем, приведенных в табл. 1

№№ п/п	Параметры отображения	Точные и приближенные расчетные выражения
1	$\zeta = a_4 \operatorname{sn}(K_0 \frac{z}{l}, k_0), \frac{a_1}{a_4} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{d}{l}, k_0), \frac{a_1}{a_4} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{d}{l}, k_0),$ $\frac{a_1}{a_4} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{d}{l}, k_0), \frac{h}{l} = \frac{K'_0}{K_0}, k_0 = \frac{a_4}{a_5}, k'_0 = \sqrt{1 - k_0^2},$ где K_0 и K'_0 – полные эллиптические интегралы первого рода с модулями k_0 и k'_0	$\frac{G_l}{\gamma} = \frac{I_l}{\Delta U} = \frac{I_7 - I_5 + \frac{I_1}{I_2}(I_6 - I_8)}{\frac{I_1 I_4}{I_2} - I_3},$ где $I_1 - I_8$ – гиперэллиптические интегралы, определяемые численно в соответствии с [2]
2	$\frac{a_1}{a_6} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{d}{l}, k_0), \frac{a_2}{a_6} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{d+a}{l}, k_0),$ $\frac{a_3}{a_6} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{d+a+n}{l}, k_0), \frac{a_4}{a_6} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{d+2a+n}{l}, k_0),$ $\frac{a_5}{a_6} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{d+2a+2n}{l}, k_0), \frac{a_7}{a_6} = \frac{1}{k_0}.$	$\frac{G_l}{\gamma} = \frac{D_1 - D_2 + D_3}{I_7 - (c_{01}^2 + c_{02}^2)I_8 + c_{01}^2 c_{02}^2 I_9},$ где $D_1 - I_{10} - I_{13} + I_{16}, D_2 - (c_{01}^2 + c_{02}^2)(I_{11} - I_{14} + I_{17}),$ $D_3 - c_{01}^2 c_{02}^2 (I_{12} - I_{15} + I_{18}),$ $I - I^6$ – гиперэллиптические интегралы, определяемые численно в соответствии с [3]
3	$\zeta = a_3 \operatorname{sn}(K_{01} \frac{Z}{2l}, k_{01}), k_{01} = a_3 / a_4, \frac{a_1}{a_3} = \operatorname{sn}(K_{01} \frac{b}{2l}, k_{01});$ $\frac{a_2}{a_3} = \operatorname{sn}(K_{01} \frac{2l-a}{2l}, k_{01}),$ $k_{01} = 4\sqrt{q_1} \left[\frac{1 + q_1^{1.2} + q_1^{2.3} + q_1^{3.4} + \dots + q_1^{n(n+1)}}{1 + 2q_1 + 2q_1^4 + 2q_1^9 + \dots + 2q_1^{n^2}} \right]^2,$ где $q_1 = e^{-\frac{\pi h}{2l}}.$	$\frac{G_3}{\gamma} = 4 \frac{K'(k)}{K(k)},$ $k = \sqrt{\frac{1 - a_1^2/a_2^2}{1 - a_1^2/a_3^2}},$ где $K'(k)$ и $K(k)$ – полные эллиптические интегралы с модулями k и $\sqrt{k=1-k^2}$ [4]
4	$Z_1 = \ln Z, Z_2 = Z_1 - (d+l), \zeta = a_1 \operatorname{sn}\left(K_0 \frac{Z_2}{l}, k_0\right),$ $\omega = \sqrt{\zeta^2 + b^2}, \frac{\alpha_0}{\alpha_1} = \operatorname{sn}(K_0 \frac{a}{l}, k'_0), \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{k_0}{\operatorname{dn}(K_0 \frac{a}{l}, k'_0)},$ где $k'_0 = \sqrt{1 - k_0^2}, \operatorname{dn}(K_0 \frac{a}{l}, k'_0)$ – дельта амплитуды, $\frac{a}{l} = \frac{2a_0}{\sqrt{Rr} \ln \frac{R}{r}}, k_0 = 4\sqrt{q} \left[\frac{1 + q^{1.2} + q^{2.3} + \dots + q^{n(n+1)}}{1 + 2q + 2q^4 + \dots + 2q^{n^2}} \right]^2,$ $q = e^{-\rho}, \rho = \frac{2\pi^2}{\ln \frac{R}{r}}, R, k_0, a_0$ – конструктивные параметры электрообогревателя	$G_l = \gamma \frac{K(k)}{K(k')}, k = \frac{a_0}{a_1}, \frac{a_1}{a_2} = k_0 \frac{\operatorname{sn}(u, k'_0)}{\operatorname{dn}(u, k'_0)},$ где $u = K_0 \frac{2a_0}{R \sqrt{\frac{r}{R} \ln \frac{R}{r}}},$ $\tilde{G}_l \approx \gamma \frac{R-r}{2\pi r \left(1 + \frac{R-r}{\pi^2 r} \ln \frac{R-r}{\pi a_0}\right)}.$
5	$k_0 = \frac{a_1}{a_5}; \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_4}{a_5} = \operatorname{dn}(K'_0 \frac{h_1}{h}, k'_0);$ $\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_2}{a_5} = \frac{k'_0}{\operatorname{dn}(K'_0 \frac{h_1}{h}, k'_0)}, \frac{h_1}{h} = \frac{a_0}{\pi R_0},$ $k_0 = 4l \frac{-\pi^2}{\ln \frac{R_0}{r}}.$	$G_l = 4\gamma \frac{K(k)}{K(k')}, k = \sqrt{\frac{(1 - a_4/a_5)(1 - a_1/a_2)}{(1 - a_2/a_5)(a_4/a_2 - a_1/a_2)}} = \sqrt{k_0} \frac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u - k_0},$ где $u = K_0 \frac{2a_0}{R_0 \ln \frac{R_0}{r}}, G_l \approx \frac{4(R_0 - r)}{\pi r \left(1 - \frac{4(R_0 - r)}{\pi^2 r} \ln \operatorname{sh} \frac{\pi a_0 r}{2R_0(R_0 - r)}\right)}.$
6	$\zeta = a_1 \operatorname{sn}(K_0 \frac{Z_3}{l}, k_0),$ где $k_0 = a_1 / a_4; \frac{h_3}{l} = \frac{K'_0}{K_0};$ $\xi = \frac{a_1}{\operatorname{dn}(K'_0 \frac{y}{h_3}, k'_0)}; \xi = a_2 = \frac{a_1}{\operatorname{dn}(K'_0 \frac{h_4}{h_3}, k'_0)};$ $\xi = a_3 = \frac{a_1}{\operatorname{dn}(K'_0 \frac{h_3 - h_5}{h_3}, k'_0)}; k_0 = 4e^{\frac{-\pi h_3}{2l}} = 4e^{\frac{-\pi^2}{2 \ln R_0/r}};$ $k = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{a_3}{a_4}\right)\left(\frac{a_2}{a_4} - \frac{a_1}{a_4}\right)}{\left(1 - \frac{a_2}{a_4}\right)\left(\frac{a_3}{a_4} - \frac{a_1}{a_4}\right)}} = \frac{1 - \operatorname{dn} u}{\operatorname{dn} u - k_0} \sqrt{k_0};$ $u = K'_0 \frac{a_0}{R_0 h_3} = K_0 \frac{2a_0}{R_0 \ln \frac{R_0}{r}} \approx \pi \frac{a_0}{R_0 \ln \frac{R_0}{r}}.$	$G_l = 8\gamma \frac{K(k)}{K(k')};$ $\tilde{G}_l \approx \frac{8 \ln(R_0/r)}{\pi} \left[1 - \frac{8 \ln R_0/r}{\pi^2} \ln \operatorname{sh} \frac{u}{2} \right]^{-1} \approx$ $\approx \frac{8(R_0 - r)}{\pi r} \left[1 - \frac{8(R_0 - r)}{\pi^2 r} \ln \operatorname{sh} \frac{\pi a_0}{2R_0} \frac{r}{(R_0 - r)} \right]^{-1}.$

4. двухэлектродной осесимметричной системы;
5. трехэлектродной осесимметричной системы;
6. многоэлектродной осесимметричной системы.

Расчетные модели и системы в отображенной плоскости приведены в табл. 1.

Параметры отображения, точные и приближенные расчетные формулы приведены в табл. 2.

Введенные плоскопараллельные расчетные модели позволили отразить не только качественные особенности работы многоэлектродных композиционных электрообогревателей, но и получить количественные результаты.

Квазиоднородность среды по условиям удельной электропроводности была подтверждена непосредственными исследованиями композиционного материала (КМ) электропроводного слоя МКЭ методами электронной растровой, просвечивающей дифракционной и оптической микроскопии.

Металлографические исследования на соответствующих масштабных уровнях показали, что в КМ присутствуют изотропные и анизотропные частицы, размером от 0,4 до 100 мкм. Изотропные частицы имеют форму шара и многогранника. Более мелкие частицы объединены в отдельные группы. Размеры и плотность распределения анизотропных и изотропных частиц, а также групп мелких частиц свидетельствуют о том, что частицы, видимые на масштабном уровне, обеспечиваемом металлографическими микроскопами, не являются базовыми элементами регулярной структуры электропроводного наполнителя, реализующей механизм электропроводности МКЭ. Тем не менее, на данном уровне представляется возможным методами планиметрии оценить состоятельность технологии производства КМ.

Для исследования электропроводящей структуры необходимы технические средства и методы, позволяющие исследовать КМ с более высокими увеличением и разрешением. Таким методом является метод растровой электронной микроскопии. Исследования проводились на микроскопе Tesla BS 301 в режиме отраженных и вторичных электронов. Изучению подвергалась поверхность свежего скола, полученная разрушением образцов при температуре жидкого азота. Структура изучалась в широком диапазоне масштабов увеличения от 50 до 20000 крат с максимальным разрешением 10 нм. Размеры частиц определялись методом случайно брошенной секущей путем исследования микрофотографий образца, полученных в сканирующем электронном микроскопе и оцифрованных с помощью персонального компьютера.

Исследования проводились на образцах из бутылкаучука (БК) с наполнителем в виде промышленных марок технического углерода (ТУ) П-234, П-324 четырех различных концентраций (45, 58, 75 и 145 м.д. на 100 м.д. полимера). При исследовании структуры поверхности скола методом растровой электронной микроскопии при увеличениях от 500

до 5000 крат наблюдается большая плотность отдельных частиц. Идентификация данных частиц возможна только при применении комплексных методов оптической, сканирующей и просвечивающей микроскопии на одном образце [6, 7]. Но исходя из того, что при указанных увеличениях средние размеры отдельных частиц составляют единицы микрометров, и основываясь на данных исследования исходного состояния различных ингредиентов, можно утверждать, что видимые частицы не являются отдельными частицами ТУ. Учитывая, что в процессе получения КМ частицы ТУ могут коагулироваться, можно с достаточной степенью достоверности утверждать, что видимые частицы являются наиболее крупными агломератами ТУ или отдельными частицами других ингредиентов КМ, подходящих по размеру.

На увеличениях до 500 крат включительно отчетливо выделяются только частицы, размеры которых достаточно велики — от 3...4 мкм до 20...30 мкм. Такие частицы являются крупной фракцией таких ингредиентов КМ, как фенолформальдегидная смола, гексол и барит, что обусловлено несовершенством технологического процесса производства. Следует отметить, что концентрация этих частиц в исследуемом материале пренебрежимо мала.

На увеличениях 1000 и 2000 крат можно различить большое количество отдельных частиц достаточно однородных по размеру, которые следует отнести к наиболее крупным агломератам ТУ, которые участвуют в формировании электропроводящей структуры рассматриваемого материала. На рис. 1 приведены характерные микрофотографии вулканизатов БК с ТУ.

Абсолютное большинство частиц на рис. 1 по морфологическим признакам можно разделить на две группы. К первой группе относят частицы с правильной поверхностной огранкой и четким изображением, как правило, осколочной формы, ко второй — частицы округлой формы, изображения которых аморфны и не имеют четко выраженных границ. Для каждой группы определены средние расстояния, диаметр и поверхностная плотность частиц. Для оценки однородности распределения ТУ в каучуковой матрице были рассчитаны дисперсия и среднеквадратичное отклонение расстояния частиц соответствующих групп друг от друга (табл. 3).

Дополнительно для оценки однородности полученные микрофотографии (рис. 1) были разделены на четыре фрагмента. Затем в каждом фрагменте были определены средние расстояния и поверхностная плотность определенных нами типов частиц (табл. 4). Полученные данные свидетельствуют о статистически беспорядочном расположении частиц, что позволяет считать предлагаемую технологию производства КМ достаточно успешной, обеспечивающей получение системы со случайным распределением частиц дисперсного наполнителя.

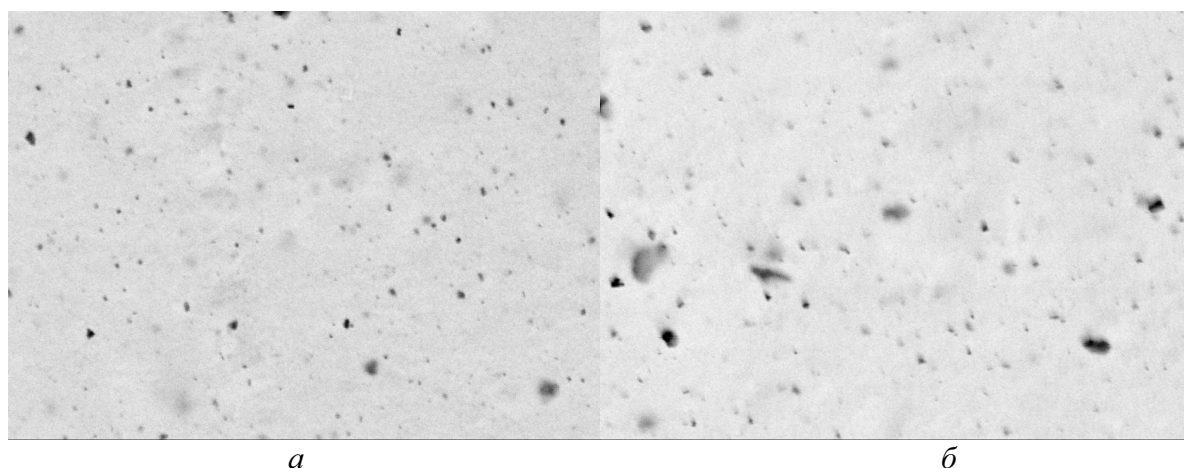


Рис. 1. Микрофотография вулканизата на основе бутилкаучука БК-1675 с содержанием ТУ марки: а) П-324 58 м.д. и б) П-234 45 м.д. на 100 м.д. полимера при увеличении 2000 крат

Таблица 3. Размеры частиц, их поверхностная плотность, расстояния между частицами, дисперсия и среднеквадратичное отклонение по результатам растровой микроскопии

Группа частиц	Рассчитываемый параметр	ТУ П-234 концентрацией 45 м.д. на 100 м.д. полимера	ТУ П-324 концентрацией 58 м.д. на 100 м.д. полимера
1	Средний диаметр частиц d_{cp} , мкм	2,158	0,943
	Среднее расстояние L_{cp} , мкм	10,299	8,890
	Поверхностная плотность частиц, $мм^{-2}$	9426	12651
	Дисперсия	21,498	12,628
	Среднеквадратичное отклонение	4,637	3,554
2	Средний диаметр частиц d_{cp} , мкм	1,411	1,388
	Среднее расстояние L_{cp} , мкм	9,224	9,963
	Поверхностная плотность частиц, $мм^{-2}$	11753	10074
	Дисперсия	15,692	28,714
	Среднеквадратичное отклонение	3,961	5,359

Таблица 4. Среднее расстояние между частицами и их поверхностная плотность, соответствующие различным фрагментам (Ф) микрофотографий

Рассчитываемый параметр	ТУ П-234, концентрация 45 м.д. на 100 м.д. полимера				ТУ П-324, концентрация 58 м.д. на 100 м.д. полимера			
	Ф 1	Ф 2	Ф 3	Ф 4	Ф 1	Ф 2	Ф 3	Ф 4
Среднее расстояние L_{cp} , мкм	10,286	10,381	10,346	8,746	10,138	10,524	11,500	9,399
Поверхностная плотность частиц, $мм^{-2}$	9452	9279	9343	13072	9730	9029	7561	11318

При более высоком увеличении представляется возможным оценить структуру агломератов технического углерода в бутилкаучуковой матрице (рис. 2).

Для идентификации наблюдаемых на увеличении до 20000 крат частиц, образующих электропроводную структуру КМ, были проведены исследования материала с помощью просвечивающей дифракционной микроскопии методом угольных реплик с экстракцией.

Объекты исследования в виде образцов электропроводящего слоя МКЭ для просвечивающей микроскопии готовили следующим образом: в жидком азоте замораживали фрагмент образца и разрушали его. Выделенная наиболее мелкая фракция располагалась на предметном стекле и помещалась в вакуумный пост, в котором проводилось напыление тонкого угольного слоя. Сформированная пленка отделялась от стекла с помощью водного раствора желатина и помещалась на специальные медные сеточки. Медные сеточки с экстрактивными репликами помещались в колонну электронного микроскопа, с помощью которого исследовали фазовый состав, морфологию, гранулометрию и дефектную структуру включений. Для определения средних размеров частиц использовали методы планиметрии [6]. Индицирование микроэлектроннограмм проводили стандартным методом.

Несмотря на то, что полученная угольная реплика является репликой с экстракцией и не несет информации о морфологии поверхности макрообъекта, она подтверждает идентификацию частиц, образующих электропроводную структуру КМ, т. к. основное количество экстрагированных на реплику частиц были именно частицами ТУ с гексагональной кристаллической решеткой, о чем свидетельствует характерное строение микроэлектроннограмм.

Типичное электронно-микроскопическое изображение частицы ТУ с гексагональной кристаллической решеткой приведено на рис. 3, а; на рис. 3, б, приведена микроэлектроннограмма частицы ТУ.

Неоднородность распределения ТУ определенная по микрофотографиям с увеличением

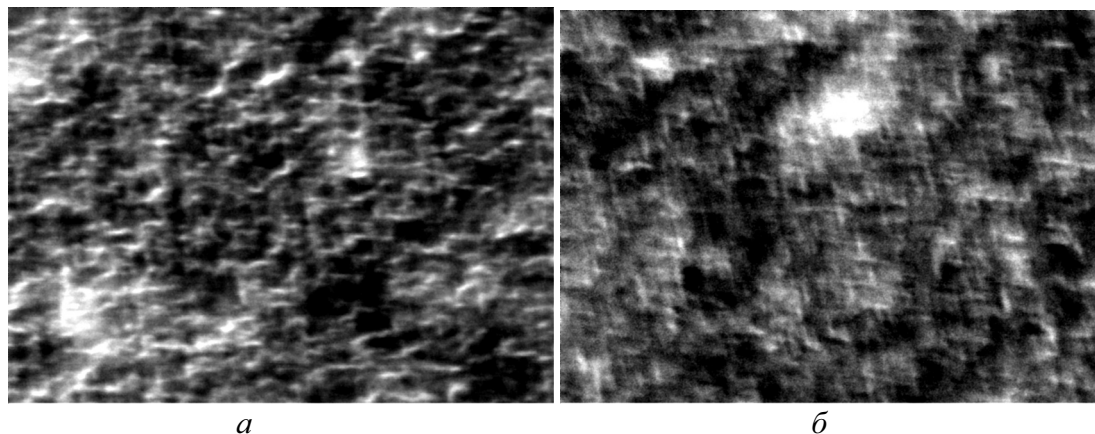


Рис. 2. Микрофотография вулканизата на основе бутилкаучука БК-1675 с содержанием ТУ марки: а) П-32445 м.д. и б) П-23458 м.д. на 100 м.д. полимера при увеличении 20000 крат

20000 крат и рассчитанная по уровню серого различных участков, составила $\approx 7\%$. Степень диспергирования, определенная на макроуровне по стандартному методу Ли-Дагмора, а также по методу сравнения с эталонными микрофотографиями, находится в пределах от 93,0 до 97,5 %.

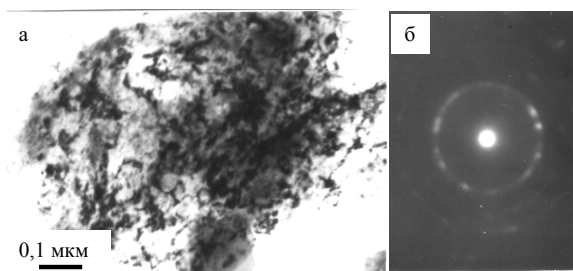


Рис. 3. Электронно-микроскопическое изображение (а) и микроэлектроннограмма частицы ТУ с гексагональной кристаллической решеткой (б)

Полученные показатели однородности и степени диспергирования однозначно подтверждают квазиоднородность рассматриваемой среды по условиям удельной электропроводности.

Таким образом, определение параметров стационарного электрического поля (табл. 2, 3) осу-

ществляется по заданным конструктивным размерам многоэлектродных электрообогревателей при помощи параметров конформного отображения и выбора точных либо приближенных формул. Приведенные выражения показывают, что, несмотря на методическую идентичность, расчеты индивидуальны для каждого вида систем.

Полученные формулы устанавливают, в частности, что зависимость электрической проводимости осесимметричного электрообогревателя от ширины электродов носит логарифмический характер, увеличение отношения внутреннего радиуса электропроводного слоя к внешнему приводит к уменьшению значений безразмерных проводимостей при постоянных значениях отношений ширины электродов к разности вышеуказанных радиусов, а возрастание последнего отношения при постоянных отношениях радиусов электропроводного слоя увеличивает проводимость электрообогревателя.

Разработанные модели сложных систем КЭ в сочетании с полученным комплексом точных и приближенных выражений параметров стационарных электрических полей в квазиоднородных средах явились теоретической основой инженерной методики расчета конструктивных параметров широкого класса композиционных электрообогревателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. 2-е изд. — Л.: Энергоиздат, 1981. — 288 с.
2. Khalina T.M. Calculation of electrical conductivity between two pairs of co-planar electrodes disposed in conductor of rectangular section // Azərbaycan Elmlər Akademiyası H.M. Abdullayev adına Fizika İnstitutu. Fizika. — BAKI: ELM NƏSRİYYATI. — 1999. — Cild 5. — № 2. — P. 14–22.
3. Khalina T.M. Calculation of electrical conductance between the electrode system in a composite electric heater // Electrical Technology Russia. — 2003. — № 4. — P. 43–57.
4. Халина Т.М. Теоретический анализ и расчет электрической проводимости многоэлектродных низкотемпературных композиционных электрообогревателей // Электротехника. — 2001. — № 8. — С. 57–62.
5. Evstigneev V.V., Khalina T.M. Stationary electric field parameters calculation in quasi-homogeneous medium of the low temperature multi-electrode composite electric heater complex system // Third Intern. Conf. Technical and Physical Problems in Power Engineering (TPE-2006), Ankara, Turkey, May 29–31, 2006. — P. 505–511.
6. Чернявский К.С. Стереология в металловедении. — М.: Металлургия, 1977. — 280 с.
7. Practical Methods in Electron Microscopy / Ed. A.M. Glauret. — North-Holland Publishing Company. Amsterdam, 1972.

Поступила 14.11.2006 г.