МАТЕМАТИКА В МУЗЫКЕ

Е.Г. Осипов, студент группы 10В41,
научный руководитель: Тищенкова А.В.
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26

Математика окружает нас повсюду: в строительстве, в науке, в физических явлениях, в информатике, в изобразительном искусстве. Математика имеет влияние на повседневную жизнь человека повсеместно.

Математика и музыка – два школьных предмета, которые практически не пересекаются между собой. Когда мы слушаем музыку мы уходим в мир звуков, а при решении математических задач мы погружаемся в строгое пространство чисел. Не задумываясь о том, что ноты, переложенные на числа, могут иметь какую-то закономерность и, наоборот, если переложить цифры на ноты – каким будет их звучание.

Древние мудрецы утверждали, что музыка появилась в тот момент, когда появился мир. В своих трудах ученые неоднократно делали попытки представить музыку как некую математическую модель. Приведем, к примеру, цитату из работы Леонарда Эйлера «Диссертация о звуке», написанную в 1727 году: «Моей конечной целью в этом труде было то, что я стремился представить музыку как часть математики и вывести в надлежащем порядке из правильных оснований все, что может сделать приятным объединение и смешивание звуков».

Одним из первых, кто попытался выразить музыку с помощью чисел, был Пифагор. Он создал свою школу мудрости, положив в ее основу два предмета – музыку и математику. Музыка, как одно из видов искусств, воспринималась наряду с арифметикой, геометрией и астрономией как научная дисциплина, а не как практическое занятие искусством. Пифагор считал, что гармония чисел сродни гармонии звуков и что оба этих занятия упорядочивают хаотичность мышления и дополняют друг друга. Он был не только философом, но и математиком, и теоретиком музыки. Пифагор основал науку о гармонии сфер, утвердив ее, как точную науку. Он учился музыке в Египте и сделал ее предметом науки в Италии. Известно, что пифагорейцы пользовались специальными мелодиями против ярости и гнева. Они проводили занятия математикой под музыку, так как заметили, что она благотворно влияет на интеллект. Одним из достижений Пифагора и его последователей в математической теории музыки был разработанный ими «Пифагоров строй». Новая технология использовалась для настройки популярного в то время инструмента – лиры. Тем не менее, «Пифагоров строй» был несовершенен, как и древнегреческая арифметика. Расстояние между соседними звуками «Пифагорова строя» неодинаковые. Он – неравномерный. Чтобы сыграть мелодию, от какой-либо другой ноты, лиру каждый раз нужно перенастраивать.

Гаммой, или звукорядом называется последовательность звуков (ступеней) некоторой музыкальной системы (лада), расположенных начиная от основного звука (основного тона), в восходящем или нисходящем порядке. Важнейшей характеристикой музыкального звука является его высота. Высота звука – это качество звука, определяемое человеком субъективно на слух и зависящее в основном от частоты колебаний, т. е. от числа колебаний в секунду. Чем больше частота колебаний, тем выше представляется нам звук. Сочетание двух звуков в иных случаях получается благоприятным и благозвучным, а в других, наоборот, «режет» ухо. Согласованное сочетание двух звуков называется консонансом, а несогласованное – диссонансом. Интервалом между двумя тонами называется порядковый номер ступени верхнего тона относительно нижнего в данном звукоряде, а интервальным коэффициентом двух тонов – отношение частоты колебаний верхнего тона к частоте нижнего тона. Проведём исследование: возьмём на гитаре последовательно несколько ладов. Получится бессвязный набор звуков. Если брать лады через звук, то звуки ладятся между собой, но их совокупность оборвана. Эту последовательность хочется продолжить до определенной ноты, которая в данной системе звуков кажется устойчивой, основной и называется тоникой. Значит звуки, в музыкальной системе, связаны между собой определенными зависимостями, одни из них являются неустойчивыми, а другие – устойчивым. Если сыграть гамму до мажор и гамму ля минор, то можно услышать, что эти гаммы звучат по – разному. Первая – мажор – звучит бодро, а вторая – минор – грустно. Характер звучания определяется наклонением. Оно бывает: мажорное или минорное. Приятная для слуха взаимосвязь музыкальных звуков, определяемая зависимостью неустойчивых звуков от устойчивых, называется ладом. Наиболее распространенные современные лады состоят из семи основных ступеней, каждая из которых может повышаться или понижаться, что дает еще пять дополнительных звуков. Таким образом, диатоническая (семиступенная) гамма лада превращается в хроматическую (12 - звуковую). Изучение лада – это целая наука, изучению которой многие композиторы посвятили жизнь, такие, как Б. Л. Яворский, С. В. Протопов, Оливье Мессиан и другие. Наш эксперимент с гитарой может закончится тем, что данная система звуков будет не только принадлежать к какому-либо ладу, но и будет носить осмысленный последовательный ряд звуков разной высоты, что называется мелодией.

Основой музыкальной шкалы-гаммы пифагорейцев был интервал – октава. Она является консонансом, повторяющим верхний звук. Для построения музыкальной гаммы пифагорейцам требовалось разделить октаву на красиво звучащие части. Так как они верили в совершенные пропорции, то связали устройство гаммы со средними величинами: арифметическим, гармоническим.

Среднее арифметическое частот колебаний тоники (w_1) и ее октавного повторения (w_2) помогает найти совершенный консонанс квинту, т.к.

$w_2 = 2w_1$, то $w_3 = (w_1 + w_2) : 2 = 3w_1 : 2$ или $w_3 : w_1 = 3 : 2$ (w_3 – частота колебаний квинты).

Длина струны l_3, соответствующая квинте, по второму закону Пифагора-Архита будет средним гармоническим длин струн тоники l_1 и ее октавного повторения l_2, т.к.

$l_2 = l_1 : 2$, то $l_3 = 2\, l_1\, l_2 : (l_1 + l_2) = 2\, l_1\, l_1 : 2 : (l_1 + l_1 : 2) = l_1^2 : ((2\, l_1 + l_1) : 2) = 2\, l_1^2 : 3\, l_1 = 2\, l_1 : 3$; или $l_3 : l_1 = 2 : 3$.

Взяв далее среднее гармоническое частот основного тона w_1 и октавы w_2, получим

$w_4 = 2w_1w_2 : (w_1 + w_2) = 2w_1 2w_1 : (w_1 + 2w_1) = 4w_1^2 : 3w_1 = 4w_1 : 3$.

Значит $w_4 : w_1 = 4 : 3$. В результате находим еще один совершенный консонанс – кварту. Определим, как связаны длины струн найденных частот (l_4 и l_1):

$l_4 = (l_1 + l_2) : 2 = (l_1 + l_1 : 2) : 2 = (2\, l_1 + l_1) : 2 : 2 = 3\, l_1 : 4$; $l_4 : l_1 = 3 : 4$.

Это значит, что длины струн l_1 , l_2 и l_4 связаны между собой средним арифметическим.

Итак, частота колебаний квинты является средним арифметическим частот колебаний основного тона w_1 и октавы w_2 , а частота колебаний кварты – средним гармоническим w_1 и w_2 . Или иначе: длина струны квинты есть среднее гармоническое длин струн основного тона l_1 и октавы l_2, а длина струны кварты – среднее арифметическое l_1 и l_2. Это лишь незначительная часть тех прекрасных пропорций, которые были воплощены в пифагорейской музыкальной гамме.

У древних греков существовал и другой способ построения музыкальной гаммы, кроме описанного выше. Он был более простым и удобным и до сих пор применяется при настройке музыкальных инструментов. Оказывается, гамму можно построить, пользуясь лишь совершенными консонансами – квинтой и октавой. Суть этого метода состоит в том, что от исходящего звука, например "до" $(3/2)^0 = 1$, мы движемся по квартам вверх и вниз и полученные звуки собираем в одну октаву. И тогда получаем: $(3/2)^1 = 3/2$ – соль, $(3/2)^2 : 2 = 9/8$ – ре, $(3/2)^3 : 2 = 27/16$ – ля, $(3/2)^4 : 22 = 81/64$ – ми, $(3/2)^5 : 22 = 243/128$ – си, $(3/2)^{-1} : 2 = 4/3$ – фа.

Музыковед Э.Розенов, проанализировав наиболее популярные и любимые произведения гениальных композиторов Баха, Моцарта, Бетховена, Шопена, Вагнера, Глинки, а также произведения народного творчества древнего происхождения, заметил, что моменты наиболее ярко выраженного эмоционального напряжения приходятся именно на точки золотого сечения. Искусствоведы составили подробные схемы, в которых содержится геометрический анализ великой музыки. Наиболее удачным в этом отношении примером является Хроматическая фантазия и Фуга ре минор Баха. Слушая это замечательное произведение, не только восторгаешься красотой музыки, но и чувствуешь ее скрытую музыкальную гармонию. А математика открывает еще одну грань гениальности великого композитора. В истории культуры достаточно много примеров, когда люди придумывали механические устройства для сочинения музыки. Это происходило и в средние века, и в наше время. Математик из колумбийского университета Дж. Шиллингер в 1940 году опубликовал разработанную им математическую систему музыкальной композиции в виде отдельной книжечки под названием "Калейдофон". Считают, что Дж.Гершвин, работая над оперой "Порги и Бесс", пользовался той же системой. В 1940 году Эйгор Вилли Лобос, используя описанный способ, превратил силуэт Нью-Йорка в пьесу для фортепиано. Известно, что и компьютеры сочиняют музыку. Правда, она довольно посредственна. В ней нет игры и свободного дыхания, которые трудно укладываются в математические каноны. До сих пор никому не удавалось найти алгоритм, порождающий простую и красивую мелодию. Мы просто не знаем, какое волшебство происходит в голове композитора, создающего неповторимую мелодию. Гениальное произведение – это результат вдохновения и мастерства его создателя. А еще своеобразная тайна, постичь которую порой невозможно. Решая задачи и слушая великую музыку, мы открываем в ней совершенство, простоту, гармонию и еще нечто такое, что неподвластно выражению словом...

Литература.

1. Взаимосвязь математики и музыки//studentbank.ru/ [электронный ресурс] – режим доступа – URL: http://studentbank.ru/view.php?id=54930
2. Взаимосвязь математики и музыки// livescience.ru/ [электронный ресурс] – режим доступа – URL: http://livescience.ru/%D0%A1%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8:%D0%9C%D1%83%D0%B7%D1%8B%D0%BA%D0%B0%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0-%D0%B2-%D1%86%D0%B8%D1%84%D1%80%D0%B0%D1%85
3. Взаимосвязь математики и музыки // pandia.org/ [электронный ресурс] – режим доступа – URL: http://pandia.org/text/77/497/8541.php

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ЭКОНОМИКЕ

А.Ю. Романова, студентка группы 17Б30,

научный руководитель: Князева О.Г.

Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского Томского политехнического университета

652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26

Есть различные точки зрения на процессы, происходящие в нашем обществе в настоящий момент. Но независимо от того, как различные политические силы воспринимают эти процессы, ни одна их них не может отрицать того, что экономические условия жизни стали намного сложнее. Стало намного труднее принять решение, как касающееся частных интересов, так и общественных. Эти трудности не могли не вызвать волны нового интереса к математическим методам, применяемым в экономике; т.е. к тем методам, которые позволили бы выбрать наилучшую стратегию как на ближайшее будущее, так и на дальнюю перспективу. В то же время многие люди в таких случаях предпочитают обращаться к собственной интуиции, опыту, или же к чему-то сверхественному. Следовательно, необходимо оценить роль математических методов в экономических исследованиях - насколько полно они описывают все возможные решения и предсказывают наилучшее, или даже так: стоит ли их использовать вообще?

По отношению к этому вопросу следует избегать двух крайних мнений: полное отрицание применимости математических методов в экономике и преувеличение той роли, которую математика может или могла бы сыграть.

На развитие и применение математических методов огромное влияние оказало и еще окажет развитие вычислительной техники. Вычислительная техника последних поколений уже позволила на практике применить множество методов, описанных ранее лишь теоретически или на простейших примерах.

Математику можно определить как науку, оперирующую чистыми абстракциями, т.е. объектами, отделёнными от реального мира. Но еще в древности математика и науки о природе не разделялись. Люди воспринимали числа и операции над ними как законы реального мира. Лишь в Древней Греции впервые возникла идея о том, что числа можно изучать отдельно (школа Пифагорейцев). Правда, взгляды их на число были почти суеверными. Но как раз они и открыли первые закономерности, не имеющие аналога в мире вещей, хотя и утаили их от всего мира. Таким образом, в Древней Греции были положено начала развития математики как самостоятельной науки.

В Средние Века развитие математики как таковой происходило в основном в Средней Азии. В Европе же шел процесс развития формальной логики внутри церковной схоластики. Это также было позитивным моментом, поскольку применение математики предполагает определённую формализацию знания.

Начиная с 17 века возможности математики начинают расти. Первоначально развитие математики определялось потребностями изучения и выражения объективных законов. Впоследствии математика стала развиваться, подчиняясь также внутренней логике развития и исходя из собственных потребностей. Но роль математики, как аппарата для выражения объективных законов, нисколько не уменьшилась.

При этом новые закономерности, выведенные чисто математически, позволяют предсказывать свойства, присущие объектам физической природы.