Управление, вычислительная техника и информатика

УДК 681.5

РАЗМЕЩЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДОМИНИРУЮЩИХ ПОЛЮСОВ ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАННОМ УСЕЧЕННОМ СЕКТОРЕ

С.В. Замятин, М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский

Томский политехнический университет
E-mail: zamsv@tpu.ru

Рассмотрен характеристический полином системы автоматического управления, коэффициенты которого содержат линейно входящие интервальные параметры объекта управления и настраиваемые параметры регулятора. Разработана методика определения настроек регулятора, обеспечивающих заданные корневые показатели качества интервальной системы. Приводится числовой пример.

Известно достаточно большое количество работ [1–4], посвященных проблеме синтеза регуляторов для систем с интервально-заданными параметрами. Большинство методов синтеза робастных регуляторов, предложенных в последнее время, основаны на оптимизации по различным критериям и имеют ряд недостатков [3, 4]:

- требуют большого объема вычислений;
- приводят к получению регуляторов высокого порядка;
- позволяют проводить синтез интервальной системы не более чем по двум параметрам регулятора.

Известно, что динамика любой линейной системы с постоянными коэффициентами главным образом зависит от расположения ее доминирующих полюсов [5, 6]. Поэтому для обеспечения гарантированных динамических свойств интервальных систем (ИС) предлагается использовать принцип доминантного размещения полюсов. В соответствии с данным принципом для получения требуемого качества ИС доминирующие полюсы необходимо расположить желаемым образом, а остальные (свободные) полюсы разместить значительно левее доминирующих.

Решение задачи размещения доминирующих полюсов стационарных систем в заданных точках комплексной плоскости рассматривается в ряде работ и решается различными методами: с помощью полиномиальных уравнений синтеза, интерполяционного метода назначения доминирующих полюсов [6] и на основе метода *D*-разбиения [5].

Поскольку коэффициенты характеристического полинома ИС имеют фиксированные пределы изменения, то полюсы системы являются локализованными в некоторых замкнутых областях, которые желательно размещать требуемым образом. Желаемое размещение доминирующих и свободных полюсов предполагает, что области их локализации не должны выходить за допустимые границы при любых значениях интервальных параметров.

В работе [7] предложен способ размещения областей локализации полюсов ИС, гарантирующий ее допустимые колебательность и степень устойчивости. Данный способ позволяет располагать области локализации доминирующих полюсов ИС в заданном усеченном секторе, а свободные полюсы – в требуемой области. Однако применение данного метода ограничено условием

$$\Theta_0(i-1) \notin (\frac{\pi}{2}; -\Theta_0] \cap (-\frac{\pi}{2}; \pi - \Theta_0], \qquad (1)$$

где Θ_0 – угол, определяющий допустимую колебательность ИС, i – индекс интервального коэффициента, $i=\overline{1,n}$, n – порядок полинома.

В работе предлагается метод, позволяющий размещать области локализации доминирующих полюсов ИС в усеченном секторе при любом значении угла Θ_0.

Постановка задачи

Пусть характеристический полином ИС представлен в виде:

$$R(p) = \sum_{i=0}^{n} a_i(\overline{k}) p^i, \qquad (2)$$

$$a_{i\min}(\overline{k}) \le a_i(\overline{k}) \le a_{i\max}(\overline{k}), \qquad (3)$$

где $\overline{k}$ – вектор настраиваемых параметров регулятора, линейно входящих в коэффициенты полинома (2), $a_i(\overline{k})$ – интервальные коэффициенты, p – оператор Лапласа.

Ставится задача: найти такие значения параметров k_i, $i=1,2,...,r$, чтобы при возможных вариациях интервальных коэффициентов полинома (2) в диапазонах (3), области доминирующих полюсов располагались в заданном усеченном секторе, а свободные полюсы были локализованы в заданной области (рис. 1).

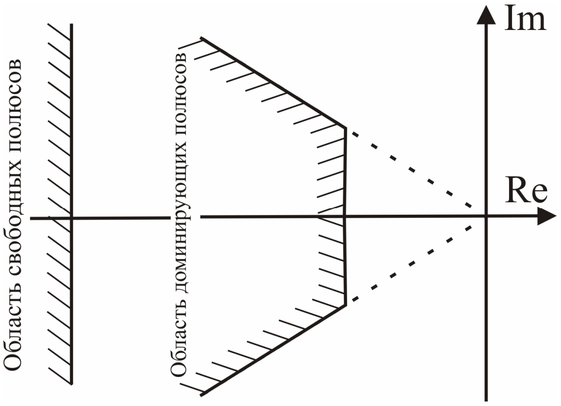

Рис. 1. *Области расположения полюсов ИС*

Так как в выражение (2) входят интервальные коэффициенты, то оно соответствует семейству полиномов. По корням каждого из этих полиномов можно определить колебательность и степень устойчивости соответствующей стационарной системы. Для оценки корневых показателей качества ИС желательно не рассматривать все семейство полиномов, а выделить из них только те, которые будут определять максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости ИС при заданных параметрах регулятора. При этом искомые полиномы должны быть вершинными, т. е. задаваться набором предельных значений интервальных коэффициентов. В работе [7] поставленная задача решена с использованием только одного вершинного полинома. Однако недостатком такого решения является невозможность применения разработанного подхода для всех значений Θ_0, задающих допустимую колебательность. Поэтому в данной работе предлагается методика параметрического синтеза робастного регулятора, лишенного указанного выше ограничения.

Выбор вершинных полиномов

Для расширения области применения методики предлагается при синтезе регулятора использовать два вершинных полинома, один из которых – $R^v_{b1}(p)$ определяет минимальную степень устойчивости ИС, а второй – $R^v_{b2}(p)$ задает максимальную колебательность. При этом необходимо одновременное выполнение двух условий (рис. 2): $\Theta_0<\Theta_i^q<\Theta_0+\pi$ для корня p_0 и $\pi/2<\Theta_i^w<2\pi/2$ для корня p_0'.

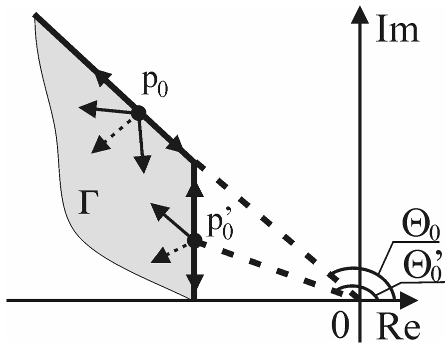

Рис. 2. *Корни полиномов $R^v_{b1}(p)$, $R^v_{b2}(p)$, определяющие качество ИС*

Исходя из результатов работы [7], получим условия формирования $R^v_{b1}(p)$ и $R^v_{b2}(p)$.

Для полинома $R^v_{b1}(p)$:

Если $\Theta_0(i-1)\in(\pi/2;3\pi/2]$, то $a_i=a_{i\max}=\overline{a_i}$ и $\max C_i=\Theta_0(i-1)-\pi/2$.

Если $\Theta_0(i-1)\in(-\pi/2;\pi/2]$, то $a_i=a_{i\max}=\underline{a_i}$ и $\max C_i=\Theta_0(i-1)+\pi/2$.

Величина $\max C_i$ необходима для определения границы области размещения свободных полюсов: $d_0=\dfrac{\beta_2}{\mathrm{tg}((\max C_i)/m)}+\alpha_2$, где m – количество свободных полюсов, α_2, β_2 – координаты доминирующего корня найденного полинома $R^v_{b1}(p)$, d_0 – прямая, левее которой размещается область свободных полюсов. Если свободные полюсы не будут размещаться в этой области, то найденный полином не будет определять минимальную степень устойчивости ИС.

Для полинома $R^v_{b2}(p)$:

Если $i\Theta'_0\in(\pi;2\pi]$, то $a_i=a_{i\max}=\overline{a_i}$ и $\max C_i=i\Theta'_0-\pi$.

Если $i\Theta'_0\in(0;\pi]$, то $a_i=a_{i\max}=\underline{a_i}$ и $\max C_i=i\Theta'_0$.

Так как величина Θ'_0 неизвестна, то условиями для формирования полинома $R^v_{b2}(p)$ воспользоваться нельзя. Пусть полиномы $R^v_{b1}(p)$ и $R^v_{b2}(p)$ являются вершинными полиномами одной реберной ветви и поэтому отличаются пределом только одного коэффициента. Тогда для определения $R^v_{b2}(p)$ необходимо найти такой коэффициент полинома $R^v_{b1}(p)$, предел которого изменится на противоположный при изменении угла сектора от Θ_0 до Θ'_0 и при изменении условия направления векторов выхода реберных ветвей. Для этого после формирования полинома $R^v_{b1}(p)$ определяются Θ'_0 в соответствии с пределами коэффициентов a_i, полученных при каждом i из условий: $i\Theta'_0\in(\pi;2\pi]$ при $\overline{a_i}$ или $i\Theta'_0\in(0;\pi]$ при $\underline{a_i}$. Если при коэффициенте с индексом i не выполняется условие $\Theta_0<\Theta'_0<\pi$, то $R^v_{b2}(p)$ будет отличаться от $R^v_{b1}(p)$ пределом этого коэффициента.

Рассмотрим способ выбора параметров регулятора при двух определяющих вершинных полиномах. Пусть характеристическое уравнение линейной непрерывной системы управления приведено к виду

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\, A_i(p) + B(p) = 0, \qquad (4)$$

где k_i, i=1,2,...,r – параметры, значения которых необходимо выбрать так, чтобы обеспечить требуемое качество управления, $A_i(p)$, i=1,2,...,r, $B(p)$ – полиномы.

Пусть корень p_0 лежит на прямой $\Lambda(\alpha)=-\alpha+j\beta(\alpha)$, определяющей максимальную колебательность ИС. Если $\beta(\alpha)=\alpha\cdot\mathrm{tg}(\pi-\Theta_0)$, то $\Lambda(\alpha)=-\alpha+j\alpha\cdot\mathrm{tg}(\pi-\Theta_0)$.

При подстановке в (4)

$$p(\alpha)=\Lambda(\alpha)=-\alpha+j\beta=-\alpha+j\alpha\cdot\mathrm{tg}(\pi-\Theta_0)$$

получаем

$$k_1\cdot A_1(\Lambda(\alpha))+\sum_{i=2}^{r}k_i\cdot A_i(\Lambda(\alpha))+B(\Lambda(\alpha))=0,\quad i=1,\ldots,l. \tag{5}$$

Уравнения (5) связывают варьируемые параметры k_i, i=1,...,r с корнями $\lambda_j(\alpha)$, j=1,...,l. Представим систему уравнений (5) в матричной форме

$$\mathbf{Q}_{11}(\alpha)\cdot k_1+\mathbf{Q}_{12}(\alpha)\cdot\mathbf{g}_2=\mathbf{R}_1(\alpha), \tag{6}$$

где

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda)=\begin{bmatrix}A_1(\lambda_1(\alpha))\\ \ldots\\ A_1(\lambda_l(\alpha))\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_{12}(\lambda)=\begin{bmatrix}A_2(\lambda_1(\alpha)) & \cdots & A_r(\lambda_1(\alpha))\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ A_2(\lambda_l(\alpha)) & \ldots & A_r(\lambda_l(\alpha))\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_2=\begin{bmatrix}k_2\\ \cdots\\ k_r\end{bmatrix};\quad \mathbf{R}_1(\lambda)=\begin{bmatrix}-B(\lambda_1(\alpha))\\ \cdots\\ -B(\lambda_l(\alpha))\end{bmatrix}.$$

Для размещения свободных полюсов в заданной области сделаем в (4) подстановку $p=-\delta(\omega)+j\omega$. В результате получим:

$$k_1\cdot A_1(-\delta(\omega)+j\omega)+\sum_{i=2}^{r}k_i\cdot A_i(-\delta(\omega)+j\omega)+ +B(-\delta(\omega)+j\omega)=0, \tag{7}$$

В матричной форме (7) имеет вид

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega)\cdot k_1+\mathbf{Q}_{22}(\omega)\mathbf{g}_2=\mathbf{R}_2(\omega), \tag{8}$$

где

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega)=A_1(-\delta(\omega)+j\omega);$$

$$\mathbf{Q}_{22}(\omega)=[A_2(-\delta(\omega)+j\omega)\ldots A_r(-\delta(\omega)+j\omega)];$$

$$\mathbf{R}_2(\omega)=-B(-\delta(\omega)+j\omega).$$

Для определения уравнения границы D-разбиения объединим (6) и (8) в одну систему уравнений

$$\begin{cases}\mathbf{Q}_{11}(\alpha)\cdot k_1+\mathbf{Q}_{12}(\alpha)\cdot\mathbf{g}_2=\mathbf{R}_1(\alpha),\\ \mathbf{Q}_{21}(\omega)\cdot k_1+\mathbf{Q}_{22}(\omega)\mathbf{g}_2=\mathbf{R}_2(\omega).\end{cases} \tag{9}$$

Из первого уравнения системы (9) имеем

$$\mathbf{g}_2=\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\alpha)\cdot\mathbf{R}_1(\alpha)-\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\alpha)\cdot\mathbf{Q}_{11}(\alpha)\cdot k_1. \tag{10}$$

После подстановки (10) во второе уравнение системы (9), получим искомое уравнение границы D-разбиения

$$k_1(\omega)=\frac{\mathbf{R}_2(\omega)-\mathbf{Q}_{22}(\omega)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\alpha)\cdot\mathbf{R}_1(\alpha)}{\mathbf{Q}_{21}(\omega)-\mathbf{Q}_{22}(\omega)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\alpha)\cdot\mathbf{Q}_{11}(\alpha)}. \tag{11}$$

Далее, задаваясь значениями ω в пределах от $-\infty$ до ∞ и вероятными значениями α, строим на основании (11) границы D-разбиения на комплексной плоскости. Они разделяют плоскость параметра k_1 на ряд областей, среди которых необходимо выделить (если она имеется) область, соответствующую требуемому расположению свободных полюсов системы.

После выбора значения k_1 на основании выражения (10) рассчитываются функции значений зависимых параметров $k_2(\alpha)$,..., $k_r(\alpha)$.

Пусть второй корень p_0' лежит на прямой $\Lambda_j'(\beta')=-\alpha'+j\beta'$, параллельной мнимой оси и определяющей минимальную степень устойчивости ИС.

Подстановка $p_j(\beta')=\Lambda_j'(\beta')=-\alpha'+j\beta'$, j=1,...,l в (4) дает уравнений

$$k_1\cdot A_1(\Lambda'_j(\beta'))+\sum_{i=2}^{r}k_i\cdot A_i(\Lambda'_j(\beta'))+ +B(\Lambda'_j(\beta'))=0,\quad j=1,\ldots,l. \tag{12}$$

Эти уравнения связывают варьируемые параметры k_i, i=1,...,r с корнями, лежащими на прямой $\Lambda_j'(\beta')$, j=1,...,l.

Представим систему уравнений (12) в матричной форме

$$\mathbf{Q}_{11}(\beta')\cdot k_1+\mathbf{Q}_{12}(\beta')\cdot\mathbf{g}_2=\mathbf{R}_1(\beta'), \tag{13}$$

где

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda)=\begin{bmatrix}A_1(\lambda'_1(\beta'))\\ \ldots\\ A_1(\lambda'_l(\beta'))\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_{12}(\lambda)=\begin{bmatrix}A_2(\lambda'_1(\beta')) & \cdots & A_r(\lambda'_1(\beta'))\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ A_2(\lambda'_l(\beta')) & \ldots & A_r(\lambda'_l(\beta'))\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{g}_2=\begin{bmatrix}k_2\\ \cdots\\ k_r\end{bmatrix};\quad \mathbf{R}_1(\lambda)=\begin{bmatrix}-B(\lambda'_1(\beta'))\\ \cdots\\ -B(\lambda'_l(\beta'))\end{bmatrix}.$$

Для определения уравнения границы D-разбиения объединим (8) и (13) в одну систему уравнений

$$\begin{cases}\mathbf{Q}_{11}(\beta')\cdot k_1+\mathbf{Q}_{12}(\beta')\cdot\mathbf{g}_2=\mathbf{R}_1(\beta'),\\ \mathbf{Q}_{21}(\omega)\cdot k_1+\mathbf{Q}_{22}(\omega)\mathbf{g}_2=\mathbf{R}_2(\omega).\end{cases} \tag{14}$$

Из первого уравнения системы (14) имеем:

$$\mathbf{g}_2=\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\beta')\cdot\mathbf{R}_1(\beta')-\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\beta')\cdot\mathbf{Q}_{11}(\beta')\cdot k_1. \tag{15}$$

После подстановки полученного выражения (15) для вектора $\mathbf{g}_2$ зависимых варьируемых параметров во второе уравнение системы (14), получим искомое уравнение границы D-разбиения:

$$k_1(\omega)=\frac{\mathbf{R}_2(\omega)-\mathbf{Q}_{22}(\omega)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\beta')\cdot\mathbf{R}_1(\beta')}{\mathbf{Q}_{21}(\omega)-\mathbf{Q}_{22}(\omega)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\beta')\cdot\mathbf{Q}_{11}(\beta')}. \tag{16}$$

После выбора значения k_1 из найденной области D-разбиения на основе (15) рассчитываются функции значений зависимых параметров $k_2(\beta'),...,k_r(\beta')$.

Решая систему из r–1 уравнений $k_i(\alpha),...,k_i(\beta')$, $i=\overline{2,r}$, находим α и β'. Подставляя найденные значения α и β' в (15), получаем значения настроек регулятора.

Методика размещения полюсов по двум вершинным полиномам

На основании проведенных исследований разработана методика размещения полюсов ИС в заданном усеченном секторе по двум вершинным полиномам, включающая следующие этапы.

1. Задаются желаемые показатели качества ИС: максимальная колебательность и минимальная степень устойчивости.
2. Из условия формирования полинома $R_{b1}^{v}(p)$ определяется минимальное значение $\max C_i$ и соответствующий набор пределов коэффициентов полинома $R_{b1}^{v}(p)$.
3. В соответствии с пределами коэффициентов a_i полинома $R_{b1}^{v}(p)$ из условий $i\Theta_0'\in(\pi;2\pi]$ при $a_i=\overline{a_i}$ и $i\Theta_0'\in(0;\pi]$ при $a_i=\underline{a_i}$ определяются Θ_0'. Если при некотором коэффициенте не выполняется условие $\Theta_0<\Theta_0'<\pi$, то $R_{b2}^{v}(p)$ будет отличаться от $R_{b1}^{v}(p)$ пределом этого коэффициента.
4. Определяется уравнение прямой d_0.
5. Задается прямая $\Lambda_j(\alpha)=-\alpha+j\alpha\cdot\mathrm{tg}(\pi-\Theta_0+0)$, определяющая максимальную колебательность ИС и строятся границы D-разбиения в пространстве параметра k_1 при различных значениях α.
6. Задается прямая $\Lambda_j'(\beta')=-\alpha'+j\beta'$, определяющая минимальную степень устойчивости ИС и строятся границы D-разбиения в пространстве параметра k_1 при различных значениях β.
7. Из областей D-разбиений, полученных в пп. 5, 6 методики, выбирается значение k_1 и определяются функции значений зависимых параметров $k_2(\alpha),..., k_r(\alpha)$ и $k_2(\beta'),..., k_r(\beta')$.
8. Решая систему из r–1 уравнений $k_i(\alpha),..., k_i(\beta')$, $i=\overline{2,r}$, находим значения α и β', и определяем настройки регулятора.
9. Проверяется расположение областей локализации доминирующих и свободных полюсов ИС с найденными настройками. В случае выхода областей за заданные границы следует увеличить число настраиваемых параметров либо изменить требования к системе.

Пример

Рассмотрим пример поиска настроек регулятора ИС для размещения двух доминирующих полюсов, обеспечивающих минимальную степень устойчивости, равную 1, в усеченном секторе с углом $\Theta_0=\pm7\pi/9$, задающем максимальную колебательность.

Пусть объект управления и регулятор описываются соответственно передаточными функциями:

$$W_0(p)=\frac{1}{a_4p^3+a_3p^2+b_2p+b_1};\qquad(17)$$

$$W_\text{р}(p)=\frac{k_3p^2+k_2p+k_1}{p}.\qquad(18)$$

На основании (17) и (18) получим характеристическое уравнение системы:

$$a_4p^4+a_3p^3+(b_2+k_3)p^2+(b_1+k_2)p+k_1=0,$$

где $a_2=b_2+k_3$, $a_1=b_1+k_2$, $a_0=k_1$, $a_4=[0,7;0,8]$, $a_3=[17;19]$, $b_2=[198;200]$, $b_1=[1025;1026]$.

Из условий формирования $R_b^{v}(p)$ определим пределы коэффициентов полинома, соответствующих сектору $\Theta_0=\pm7\pi/9$. При этом наименьшее значение $\max C_i=\max C_2=5\pi/18$. Полученный полином имеет пределы: $\overline{a_0}\underline{a_1}\overline{a_2}\underline{a_3}\underline{a_4}$, где

$$\underline{a_4}=0,7,\ \underline{a_3}=17,\ \overline{a_2}=200+k_3,\ \underline{a_1}=1025+k_2.$$

Найдем пределы коэффициентов второго вершинного полинома, определяющего степень устойчивости: $\overline{a_0}\underline{a_1}\overline{a_2}\underline{a_3}\overline{a_4}$. Зададим границы размещения корней, определяющих максимальную колебательность и минимальную степень устойчивости:

$$\Lambda_j(\alpha)=-\alpha+j\alpha\cdot\mathrm{tg}(\frac{2}{9}\pi),\ \Lambda'_j(\beta')=-1+j\beta'.$$

Для нахождения прямой d_0 зададим некоторые предполагаемые максимальные значения α_2 и β_2

$$d_0=\frac{b_2}{\mathrm{tg}((\max C_i)/m)}+a_2=\frac{1.1}{\mathrm{tg}((5\pi/18)/2)}+1,2=3,5.$$

Для обеспечения принципа доминирования зададим границу свободных полюсов ИС $X(j\beta)=-8$, $-\infty<\beta<\infty$. Далее, задаваясь значениями ω в пределах от $-\infty$ до ∞, вероятными значениями $\alpha\in(1;1,15)$ и $\beta'\in(0;0,84)$, на комплексной плоскости строятся границы двух областей D-разбиения (рис. 3, 4).

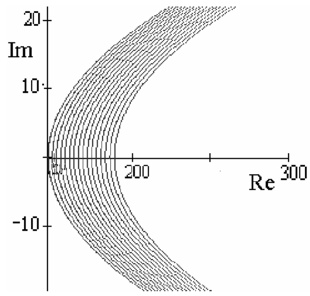

Рис. 3. *Области D-разбиения по $k_1(\alpha)$*

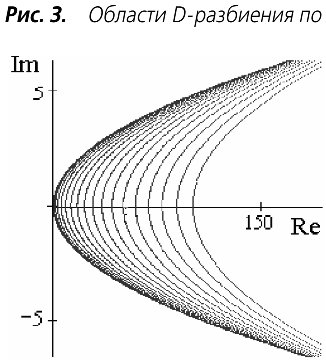

Рис. 4. *Области D-разбиения по $k_1(\beta')$*

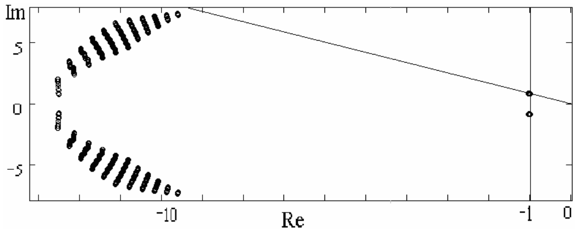

Рис. 5. *Расположение областей локализации полюсов ИС*

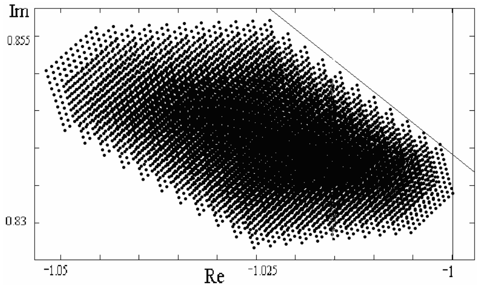

Рис. 6. *Расположение области локализации доминирующего полюса ИС*

При выбранном из них общем значении k_1=200 получаем k_2=–762,6 и k_3=–49,7. Для данных настроек регулятора построены области локализации полюсов ИС, изображенные на рис. 5, 6.

Из рис. 5, 6 можно заключить, что найденные настройки регулятора обеспечивают заданное качество в ИС.

Заключение

Предложенный подход позволяет размещать области локализации доминирующих полюсов системы с интервальными коэффициентами характеристического полинома в заданном усеченном секторе с любым углом Θ_0, т. е. обеспечивать гарантированные колебательность и степень устойчивости ИС.

Предлагаемая методика не требует большого объема вычислений и позволяет проводить параметрический синтез регуляторов пониженного порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хлебалин Н.А. Построение интервальных полиномов с заданной областью расположения корней // Аналитические методы синтеза регуляторов. – Саратов: Изд-во Саратовского политехн. ин-та, 1982. – С. 92–98.
2. Chu E.K. Pole assignment for second-order systems // Mechanical systems and signal processing. – 2002. – № 1. – P. 39–59.
3. Nesenchuk A.A. Root locus fields technique in the uncertain control systems synthesis // Proc. of the 5th World Multiconference on Systems, Cybernetics and Informatics. – Orlando, FL, USA, 2001. – P. 298–303.
4. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H_∞ и по критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 3. – С. 119–130.
5. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Решение задачи размещения полюсов системы методом *D*-разбиения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 23–27.
6. Скворцов Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1994. – № 4. – С. 10–13.
7. Замятин С.В. Размещение областей локализации доминирующих полюсов интервальной системы с обеспечением заданных показателей качества // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 7. – С. 10–14.

Поступила 03.09.2007 г.