УДК 681.5

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЛИНЕЙНОГО РЕГУЛЯТОРА ИНТЕРВАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ГАРАНТИРОВАННЫМИ КОРНЕВЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ КАЧЕСТВА

М.С. Суходоев, С.А. Гайворонский, С.В. Замятин

Томский политехнический университет
E-mail: smike@aics.ru

Рассматривается система автоматического управления, содержащая пропорционально-интегральный регулятор и объект управления, который имеет интервально-заданные параметры. Используя робастное расширение метода корневого годографа, разработана методика синтеза параметров пропорционально-интегрального регулятора, гарантирующего минимально допустимую степень устойчивости и максимально допустимую колебательность системы. В основу методики положен вершинный анализ корневых показателей качества с применением уравнений Теодорчика-Эванса. Приводится числовой пример.

Введение

В реальных системах автоматического управления возможны случаи, когда некоторые их параметры не известны точно, либо меняются в процессе эксплуатации системы по заранее неизвестным законам, причем их значения не могут быть доступны измерению. Если известны диапазоны возможных значений постоянных параметров или пределы изменения нестабильных параметров, то говорят о параметрической интервальной неопределенности. Системы, имеющие интервально-неопределенные параметры, получили название интервальных систем.

При проектировании интервальной системы основная задача состоит в обеспечении желаемого качества её функционирования при любых возможных значениях интервально-неопределенных параметров. Введем в рассмотрение корневые показатели качества системы: степень устойчивости α и колебательность φ. Очевидно, что при нестабильности параметров системы эти показатели качества могут изменяться. Поэтому представляет интерес задача обеспечения в интервальной системе гарантированной минимальной степени устойчивости и максимальной колебательности.

Для задания желаемого качества системы, соответствующего этим корневым показателям, может быть использована ломаная линия ABCD (рис. 1), задающая границу области локализации корней Г.

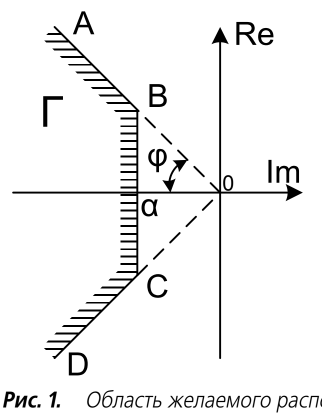

Рис. 1. *Область желаемого расположения корней*

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему автоматического управления, рис. 2.

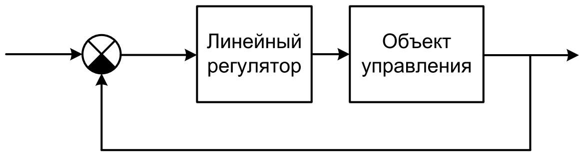

Рис. 2. *Схема системы автоматического управления*

Пусть линейный регулятор имеет передаточную функцию пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора:

$$W_P(s) = \frac{K_П \cdot s + K_И}{s}, \qquad (1)$$

где $K_П$, $K_И$ – настройки регулятора, а передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W_{ОУ}(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, \qquad (2)$$

где $A(s) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot s^i$, $B(s) = \sum_{j=0}^{n} b_j \cdot s^j$, $\underline{b_j} \le b_j \le \overline{b_j}$.

Тогда интервальный характеристический полином системы может быть записан в виде:

$$(K_И + K_П \cdot s) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0. \qquad (3)$$

Область возможных значений интервально-неопределенных параметров системы (многогранник P_n, являющийся прямоугольным гиперпараллелепипедом) отображается на комплексную плоскость корней в виде областей локализации комплексно-сопряженных корней и отрезков вещественной оси, где локализуются вещественные корни (рис. 3).

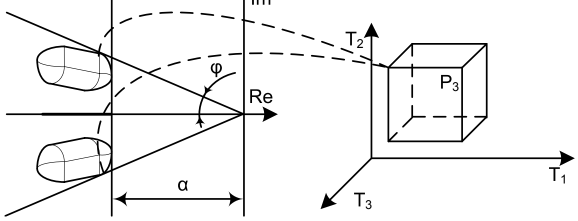

Рис. 3. *Отображение параметрического многогранника P_3*

Необходимо определить настройки ПИ-регулятора, обеспечивающие расположение корневых областей интервального характеристического полинома в заданном секторе Г при любых значениях интервальных параметров объекта управления.

2. Задание минимальной степени устойчивости интервальной системы

Приведем интервальный полином (3) к виду

$$\sum_{i=0}^{k} c_i \cdot s^i = 0, \qquad (4)$$

где коэффициенты c_i могут являться функциями интервальных параметров объекта управления и настроек регулятора. Интервальные коэффициенты c_i образуют параметрический многогранник, вершины которого определяются их крайними значениями.

Из теории корневого годографа известно, что если корень лежит на вещественной оси, то угол выхода корневого годографа из этого корня составляет 0° или 180°. Очевидно, что для того, чтобы вещественный корень интервального полинома двигался влево при изменении любых интервальных коэффициентов, необходимо, чтобы углы выхода по всем этим коэффициентам составляли 180°. Набор интервальных коэффициентов, который обеспечивает данное требование, определяется на основе следующего утверждения.

Утверждение

Если интервальные коэффициенты полинома заданы чередующимися пределами $\overline{c}_0\underline{c}_1\overline{c}_2\underline{c}_3$..., начиная с максимального для c_0, то данный набор коэффициентов определяет вещественный корень, углы выхода корневых годографов из которого по всем интервальным коэффициентам составляют 180°.

Доказательство

Из основных фазовых соотношений теории корневого годографа известно, что угол выхода из корня при увеличении c_i можно найти по формуле:

$$\Theta_i^q = 180° - \sum_{p=1}^{n} \Theta_p + i\Theta_0, \qquad (5)$$

где Θ_p и Θ_0 – углы между вещественной осью и векторами, направленными из корня соответственно к p-ому полюсу и к i нулям функции

Пусть полином (4) имеет правый вещественный корень S^*. Тогда для любой пары комплексно-сопряженных корней и для любого вещественного корня, лежащих левее S^*, на основе свойств корневого годографа можно заключить, что $\Theta_{P1}+\Theta_{P2}=360°$, $\Theta_{P3}=0°$, $\Theta_0=180°$ (рис. 4).

Следовательно, угол выхода из корня S^* при увеличении c_i можно найти по формуле: $\Theta_i^q=180°+i\Theta_0$, а при уменьшении, $\Theta_i^q=i\Theta_0$.

Таким образом, если интервальный полином будет иметь чередующиеся пределы коэффициентов $\overline{c}_0\underline{c}_1\overline{c}_2\underline{c}_3$..., то углы выхода из образа соответствующей этому набору вершины параметрического многогранника P_n будут равны 180°.

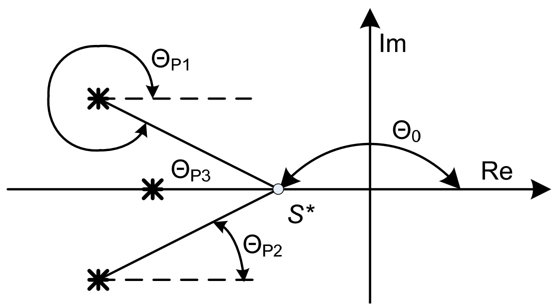

Рис. 4. *Пример расположения корней характеристического полинома*

На основании данного утверждения можно сделать вывод, что минимальная степень устойчивости интервальной системы может быть задана вертикальной прямой, проходящей через вещественный корень, соответствующий чередующимся пределам коэффициентов интервального полинома.

Пусть минимальная степень устойчивости задается корнем $s^*=\alpha^*$. Введем информацию об этом корне в полином (4), задавая в нем чередующиеся значения b_l и значение $s^*=\alpha^*$. Выразив далее $K_И$ через $K_П$, получим выражение:

$$K_И = f(K_П, \alpha^*, b_j^v), \qquad (6)$$

где b_j^v – граничные значения коэффициентов полинома $B(s)$, обеспечивающие чередование пределов c_i.

Для дальнейшего синтеза ПИ-регулятора получим интервальный характеристический полином с одним варьируемым коэффициентом

$$(K_И(K_П, \alpha^*, b_j^v) + K_П \cdot s) \cdot A(s) + s \cdot B(s) = 0.$$

3. Локализация корней интервального характеристического полинома в заданной области на основе уравнения Теодорчика-Эванса

Известно [1], что в случае интервальной неопределенности характеристического полинома минимальная степень устойчивости и максимальная колебательность определяются образами некоторых вершин многогранника интервальных коэффициентов, то для решения поставленной выше задачи необходимо определить эти вершины. Для этого предлагается воспользоваться методикой, разработанной в [2].

После нахождения набора проверочных вершин необходимо на основе уравнений корневого годографа Теодорчика-Эванса [3] определить для каждой из них значения настраиваемого параметра регулятора $K_П$, при котором происходит пересечение корневого годографа с заданной на рис. 1 границей области локализации корней.

Представим полученный полином (9) в виде:

$$D(p) = \Phi(p) + K_П \Psi(p) = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$E(\alpha,\omega) = \mathrm{Re}(\Phi(p)), \quad F(\alpha,\omega) = \mathrm{Im}(\Phi(p)),$$
$$P(\alpha,\omega) = \mathrm{Re}(\Psi(p)), \quad R(\alpha,\omega) = \mathrm{Im}(\Psi(p)).$$

Согласно [3], для определения искомых значений $K_П$, необходимо подставить уравнение границы области Г в (10), (11) и решить уравнение

$$F(\omega)P(\omega) - E(\omega)R(\omega) = 0. \qquad (7)$$

Полученные действительные корни ω_i следует подставить в выражение:

$$K_П = \frac{E(\omega)P(\omega) + F(\omega)R(\omega)}{P^2(\omega) + R^2(\omega)}. \qquad (8)$$

Проделав данную процедуру для каждой проверочной вершины, можно получить соответствующие интервалы значений $K_П$, при которых корни интервального полинома лежат в заданной области Г. Для нахождения интервала значений $K_П$, удовлетворяющего всем вершинам, следует найти пересечение всех интервалов.

Для окончательного определения настроек ПИ-регулятора необходимо выбрать значение $K_П$ из полученного интервала и подставить это значение в выражение (6).

4. Методика синтеза ПИ-регулятора

На основании проведенных исследований разработана методика параметрического синтеза ПИ-регулятора, включающая:

1. Задание требуемых показателей качества (минимально допустимой степени устойчивости и максимально допустимой колебательности интервальной системы).
2. Задание в характеристическом полиноме $s^*=\alpha^*$ и пределов интервальных параметров объекта управления, соответствующих вершине с координатами $\overline{c}_0\underline{c}_1\overline{c}_2\underline{c}_3$....
3. Получение зависимости (6) и приведение характеристического полинома с двумя варьируемыми параметрами ПИ-регулятора к полиному с одним варьируемым параметром.
4. Нахождение возможных вершин многогранника P_n, отображающихся на границу области Г.
5. Определение для каждой найденной граничной вершины на основе выражений (7), (8) интервала значений варьируемого параметра $K_П$, при которых ветви корневого годографа находятся в области Г.
6. Определение пересечения найденных интервалов $K_П$, при котором корни полинома располагаются в заданной области Г для всех граничных вершин.
7. Выбор значения $K_П$ из области пересечения интервалов и определение значения $K_И$ на основе выражения (6).

5. Пример синтеза

Пусть задана передаточная функция разомкнутой системы с единичной обратной связью:

$$W_p = \frac{K_p \cdot (T_p \cdot s + 1)}{s} \cdot \frac{K_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0},$$

где K_p, T_p – настраиваемые параметры регулятора, K_0 – постоянный коэффициент передачи объекта управления, a_2, a_1, a_0 – интервальные параметры объекта управления, ($a_0 \in [0{,}07;0{,}08]$; $a_1 \in [0{,}3;0{,}4]$; $a_0 \in [2;3]$).

Необходимо определить настройки ПИ-регулятора, гарантирующие $\alpha^*=1$ и $\varphi=10°$.

Приведем характеристическое уравнение данной системы к виду:

$$c_3 \cdot s^3 + c_2 \cdot s^2 + c_1 \cdot s + c_0 = 0, \qquad (9)$$

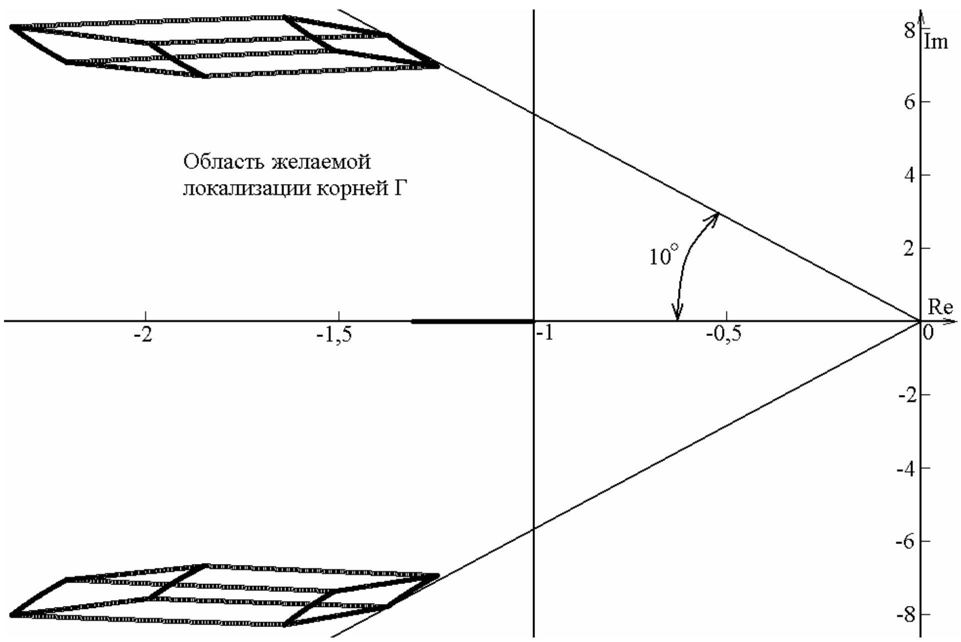

Рис. 5. *Области локализации полюсов системы с синтезированным ПИ-регулятором*

где $c_3=a_2$, $c_2=a_1$, $c_1=a_0+K_0.K_p\cdot T_p$, $c_0= K_0\cdot K_p$.

Подставив в (9) соответствующие вершине $\overline{c_0}\underline{c_1}\overline{c_2}\underline{c_3}$... граничные значения коэффициентов a_i, получим зависимость:

$$T_p = -\frac{\overline{a_2}\cdot s^3 + \underline{a_1}\cdot s^2 + \overline{a_0}\cdot s + K_0\cdot K_p}{K_0\cdot K_p\cdot s}. \qquad (10)$$

На основе (10), характеристическое уравнение системы приведем к виду:

$$a_2 s^3 + a_1 s^2 + a_0 s +$$
$$K_0 K_p\left(-\frac{\overline{a_2}\alpha*^3 + \underline{a_1}\alpha*^2 + \overline{a_0}\alpha* + K_0 K_p}{K_0 K_p \alpha*}\right)s + K_0 K_p = 0.$$

После преобразований, получим:

$$a_2\cdot s^3 + a_1\cdot s^2 + a_0\cdot s - (\overline{a_2}\cdot\alpha*^2 + \underline{a_1}\cdot\alpha*^2 + \overline{a_0})\cdot s +$$
$$+K_p\cdot\left(K_0 - \frac{K_0}{\alpha*}\cdot s\right) = 0. \qquad (11)$$

Составим на основе (11) уравнения Теодорчика-Эванса вида (7), (8). В соответствии с методикой [2] для шести вершин многогранника интервальных коэффициентов найден общий интервал K_P, при котором корни полинома располагаются внутри области Г: $K_P\in[2,4733;5,0160]$.

Выберем значение K_P из найденного интервала, K_P=5,0160, и на основании выражения (15) получим значение второго искомого параметра T_P=0,4458.

Области локализации корней интервального характеристического полинома с найденными настройками ПИ-регулятора представлены на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что корневой годограф интервального характеристического полинома располагается в области Г, ограниченной минимальной степенью устойчивости и максимальной колебательностью, следовательно, синтезированные параметры линейного регулятора гарантируют заданные корневые показатели качества системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 3–23.
2. Гайворонский С.А. Вершинный анализ корневых показателей качества системы с интервальными параметрами // Известия Томского политехнического университета. – 2006. – Т. 309. – № 7. – С. 6–9.
3. Римский Г.В. Корневой метод решения задач устойчивости интервальных систем // Весцi АН Беларуси. Сер. физ.-техн. навук. – 1994. – № 4. – С. 53–61.

Поступила 28.09.2007 г.