УДК 681.51.013

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ПО ЗАДАННОМУ РАСПОЛОЖЕНИЮ ПОЛЮСОВ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

О.С. Вадутов

Томский политехнический университет
E-mail: vos@ido.tpu.ru

Предлагается алгоритм синтеза регуляторов, обеспечивающих расположение доминирующих полюсов замкнутой системы в заданных точках, а недоминирующих полюсов – в заданной области. В основу двухэтапного алгоритма положены метод D-разбиения, модифицированный условиями на размещение полюсов системы, и метод поиска наилучшего решения в области параметров, в которой гарантируется желаемое размещение полюсов. Приведен пример.

1. Введение

Актуальность проблемы синтеза динамических регуляторов пониженного порядка объясняется сложностью и практической нецелесообразностью реализации регуляторов полного порядка. Многочисленные примеры показывают, что при помощи регуляторов пониженного порядка можно обеспечить требуемое качество процессов управления [1]. Проблема эта не имеет однозначного решения, и в литературе описаны различные методы синтеза.

В частности, имеется ряд работ, в которых задача синтеза регулятора пониженного порядка сведена к назначению доминирующих полюсов замкнутой системы [2–4]. Число варьируемых параметров динамического регулятора принимается равным числу назначаемых доминирующих полюсов. Значения варьируемых параметров регулятора вычисляются однозначно. Предлагаемые методы опираются на известный факт, что динамические свойства замкнутой системы определяются двумя-тремя полюсами, для которых выполняются условия доминирования. Рекомендации по назначению доминирующих полюсов можно найти, например, в [5]. Возможности этих методов ограничены, поскольку допускается произвольное размещение недоминирующих полюсов системы. Влияние этих полюсов на свойства системы приходится оценивать только на заключительной стадии синтеза регулятора.

В данной статье рассматривается алгоритм синтеза регуляторов пониженного порядка, в основу которого положен метод *D*-разбиения, модифицированный условиями на размещение полюсов системы [6]. Число варьируемых параметров регулятора, в отличие от [2–4], превышает число назначаемых доминирующих полюсов, а на недоминирующие полюсы замкнутой системы наложено ограничение в виде заданной области их расположения. Предлагаемый алгоритм синтеза состоит из двух этапов. На первом этапе при помощи метода *D*-разбиения выделяется та часть пространства параметров регулятора, в которой выполняются условия, наложенные на расположение доминирующих и недоминирующих полюсов системы. Для выбора конкретных значений параметров регулятора в полученной области, осуществляемого на втором этапе, предлагается использовать частотные и интегральные оценки, характеризующие качество процесса управления.

В последнее время метод *D*-разбиения, используемый в данной работе, привлек внимание исследователей. Например, в [1] на его основе был разработан двухэтапный алгоритм синтеза регуляторов. Однако при этом число варьируемых параметров регулятора ограничено двумя, и в плоскости параметров регулятора строится область устойчивости. Оптимальные параметры регулятора определяются по критерию максимальной робастности с помощью численных процедур.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная стационарная система автоматического управления, операторно-структурная схема которой показана на рис. 1.

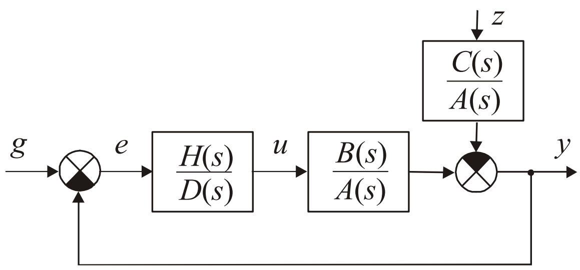

Рис. 1. *Операторно-структурная схема системы*

Объект управления описывается уравнением

$$A(p)y(t) = B(p)u(t) - C(p)z(t),$$

где $p=d/dt$ – оператор дифференцирования (формально эквивалентный оператору s преобразования Лапласа); полиномы $A(p)$, $B(p)$ и $C(p)$ являются взаимно простыми, их степени удовлетворяют условиям: $\deg A(p)=n$, $\deg B(p)\le n$, $\deg C(p)\le n$.

Уравнение динамического регулятора имеет вид

$$D(p)u(t) = H(p)[g(t) - y(t)],$$

где $\deg H(p)=\deg D(p)=m<n$.

Синтез регулятора сводится к выбору его параметров, являющихся коэффициентами полиномов:

$$D(p) = d_m p^m + \ldots + d_1 p + d_0, \quad (1)$$

$$H(p) = h_m p^m + \ldots + h_1 p + h_0. \quad (2)$$

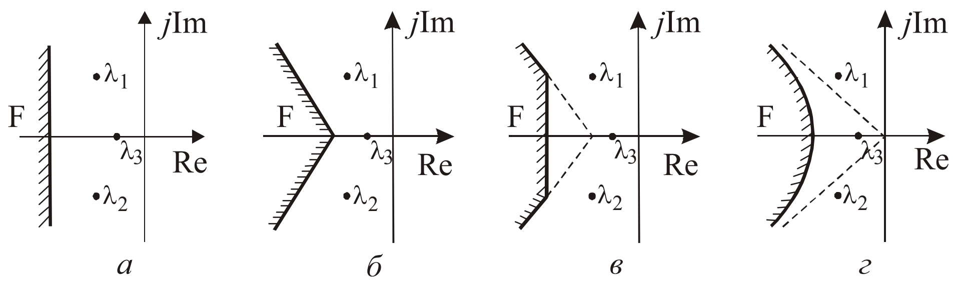

Рис. 2. *Варианты размещения полюсов системы*

Часть параметров регулятора может быть задана заранее или удовлетворять дополнительным условиям. В частности, для статического регулятора целесообразно принять $d_0=1$. В случае регулятора с астатизмом первого порядка $d_0=0$, $d_1=1$ и т. д. С учетом особенностей решаемой задачи могут быть назначены значения и других параметров регулятора. Поэтому число параметров регулятора, подлежащих определению, удовлетворяет условию $r\le 2(m+1)$.

Система автоматического управления описывается уравнением

$$[A(p)D(p)+B(p)H(p)]\cdot y(t)=$$
$$=B(p)H(p)\cdot g(t)-C(p)D(p)\cdot z(t).$$

Задачу данной работы сформулируем следующим образом. Необходимо определить значения r варьируемых параметров регулятора, при которых l доминирующих полюсов замкнутой системы принимают предписанные значения λ_j, $j=1,\dots,l$, а остальные $n+r-l$ недоминирующие полюсы удовлетворяют некоторым условиям в виде неравенств, ограничивающих область F их размещения на комплексной плоскости. На рис. 2 приведены примеры расположения доминирующих полюсов $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ и возможные границы областей F размещения недоминирующих полюсов системы.

Поскольку число назначаемых доминирующих полюсов системы меньше числа параметров регулятора, сформулированная задача имеет некоторое множество решений.

3. Вывод основных соотношений

Обозначим произвольным образом коэффициенты полиномов (1) и (2), представляющие собой варьируемые параметры регулятора, через $k_1,k_2,\dots,k_r$. Параметры регулятора входят в характеристическое уравнение системы линейно. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\, G_i(p)+G_0(p)=0. \qquad (3)$$

Варьируемые параметры $k_1,k_2,\dots,k_r$ регулятора разобьем на две группы. К первой группе отнесем параметры, которые назовем свободными. Пусть они образуют вектор $\mathbf{k}_c=(k_1,\dots,k_q)^{\mathrm{т}}$, размерность которого равна $q=r-l$. Во вторую группу включим зависимые варьируемые параметры регулятора, значения которых рассчитываются после выбора свободных варьируемых параметров из условия, чтобы l полюсов системы приняли предписанные значения. Эти параметры объединим в вектор $\mathbf{k}_з=(k_{q+1},\dots,k_r)^{\mathrm{т}}$ размерностью $l=r-q$.

Получим основные соотношения для случая двух свободных варьируемых параметров ($q=2$). Для этого представим характеристическое уравнение (3) в виде

$$\sum_{i=1}^{2} k_i\cdot G_i(p)+\sum_{i=3}^{r} k_i\cdot G_i(p)+G_0(p)=0. \qquad (4)$$

Подстановка $p=\lambda_j$, $j=1,\dots,l$ в (4) дает l уравнений:

$$\sum_{i=1}^{2} k_i\cdot G_i(\lambda_j)+\sum_{i=3}^{r} k_i\cdot G_i(\lambda_j)+G_0(\lambda_j)=0,$$
$$j=1,\dots,l. \qquad (5)$$

Эти уравнения связывают варьируемые параметры k_i, $i=1,\dots,r$ с задаваемыми доминирующими полюсами λ_j, $j=1,\dots,l$.

Представим (5) в матричной форме:

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda)\cdot k_c+\mathbf{Q}_{12}(\lambda)\cdot k_з=\mathbf{R}_1(\lambda), \qquad (6)$$

где

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda)=\begin{bmatrix} G_1(\lambda_1) & G_2(\lambda_1)\\ \cdots & \cdots\\ G_1(\lambda_l) & G_2(\lambda_l)\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_{12}(\lambda)=\begin{bmatrix} G_3(\lambda_1) & \cdots & G_r(\lambda_1)\\ \dots & \dots & \dots\\ G_3(\lambda_l) & \dots & G_r(\lambda_l)\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_1(\lambda)=\begin{bmatrix} -G_0(\lambda_1)\\ \cdots\\ -G_0(\lambda_1)\end{bmatrix}.$$

Границу области размещения недоминирующих полюсов системы зададим функцией

$$X(j\omega)=\alpha+\delta(\omega)+j\omega,\delta(\omega)=\delta(-\omega),\omega\in(-\infty,\infty).$$

Для вывода уравнения границы D-разбиения на плоскости двух свободных параметров сделаем в (4) подстановку $p=\alpha+\delta(\omega)+j\omega$ и преобразуем получившееся комплексное уравнение в систему двух вещественных уравнений. В матричной форме она будет иметь вид

$$\mathbf{Q}_{21}(\omega)\cdot\mathbf{k}_c+\mathbf{Q}_{22}(\omega)\cdot\mathbf{k}_з=\mathbf{R}_2(\omega), \qquad (7)$$

где

$$\mathbf{Q}_{21}(\alpha,\omega)=\begin{bmatrix}\operatorname{Re}G_1(\alpha,\omega) & \operatorname{Re}G_2(\alpha,\omega)\\ \operatorname{Im}G_1(\alpha,\omega) & \operatorname{Im}G_2(\alpha,\omega)\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_{22}(\alpha,\omega)=\begin{bmatrix}\operatorname{Re}G_3(\alpha,\omega) & \cdots & \operatorname{Re}G_r(\alpha,\omega)\\ \operatorname{Im}G_3(\alpha,\omega) & \cdots & \operatorname{Im}G_r(\alpha,\omega)\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{R}_2(\alpha,\omega)=\begin{bmatrix}-\operatorname{Re}G_0(\alpha,\omega)\\ -\operatorname{Im}G_0(\alpha,\omega)\end{bmatrix}.$$

В результате объединения (6) и (7) получим систему уравнений:

$$\mathbf{Q}_{11}(\lambda)\,\mathbf{k}_c+\mathbf{Q}_{12}(\lambda)\,\mathbf{k}_з=\mathbf{R}_1(\lambda);$$
$$\mathbf{Q}_{21}(\alpha,\omega)\,\mathbf{k}_c+\mathbf{Q}_{22}(\alpha,\omega)\,\mathbf{k}_з=\mathbf{R}_2(\alpha,\omega). \qquad (8)$$

Систему уравнений (8) можно рассматривать как параметрическое уравнение границы D-разбиения плоскости параметров k_1,k_2, образующих вектор $\mathbf{k}_c$, когда значение ω пробегает границу области F, при дополнительном условии, что доминирующие полюсы λ_j, $j=1,...,l$ замкнутой системы принимают предписанные значения. Из первого уравнения системы (8) выразим вектор $\mathbf{k}_з$ зависимых варьируемых параметров:

$$\mathbf{k}_з=\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda)\cdot\mathbf{R}_1(\lambda)-\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda)\cdot\mathbf{Q}_{11}(\lambda)\cdot\mathbf{k}_c. \qquad (9)$$

Из второго уравнения системы (8) после подстановки (9) получим:

$$\mathbf{k}_c(\alpha,\omega)=\begin{bmatrix}k_1(\alpha,\omega)\\ k_2(\alpha,\omega)\end{bmatrix}=$$
$$=[\mathbf{Q}_{21}(\alpha,\omega)-\mathbf{Q}_{22}(\alpha,\omega)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda)\cdot\mathbf{Q}_{11}(\lambda)]^{-1}\times$$
$$\times[\mathbf{R}_2(\alpha,\omega)-\mathbf{Q}_{22}(\alpha,\omega)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda)\cdot\mathbf{R}_1(\lambda)]. \qquad (10)$$

Для каждого конкретного значения на основании (10) рассчитывается числовое значение вектора $\mathbf{k}_c$, определяющее одну точку границы D-разбиения на плоскости свободных параметров k_1 и k_2 регулятора. Изменяя в (10) ω от $-\infty$ до ∞, можно построить всю кривую D-разбиения на этой плоскости.

Некоторые значения частоты дают при вычислениях неопределенности. Этим значениям ω соответствуют уже не отдельные точки, а так называемые особые прямые. Первая особая прямая соответствует $\omega=0$. Для того чтобы получить ее уравнение, в (4) подставим $p=\alpha+\delta(\omega)+j\omega|_{\omega=0}=\alpha$. Будем иметь

$$k_1\cdot G_1(\alpha)+k_2\cdot G_2(\alpha)+\sum_{i=3}^{r}k_i\cdot G_i(\alpha)+G_0(\alpha)=0.$$

Запишем это уравнение в векторно-матричной форме:

$$\mathbf{Q}_{21}(\alpha)\cdot\mathbf{k}_c+\mathbf{Q}_{22}(\alpha)\mathbf{k}_з=G_0(\alpha), \qquad (11)$$

где

$$\mathbf{Q}_{21}(\alpha)=[G_1(\alpha)\;G_2(\alpha)];\;\;\mathbf{Q}_{22}(\alpha)=[G_3(\alpha)\;...\;G_r(\alpha)].$$

И, наконец, подставив в (11) выражение (9), получим уравнение первой особой прямой в векторно-матричной форме:

$$[\mathbf{Q}_{21}(\alpha)-\mathbf{Q}_{22}(\alpha)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda)\cdot\mathbf{Q}_{11}(\lambda)]\cdot\mathbf{k}_c=$$
$$=G_0(\alpha)-\mathbf{Q}_{22}(\alpha)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda)\cdot\mathbf{R}_1(\lambda).$$

Вторая особая прямая, соответствующая $\omega=\infty$, находится путем приравнивания к нулю коэффициента a_n при слагаемом со старшей степенью характеристического уравнения (3), если этот коэффициент зависит от варьируемых параметров регулятора.

Штриховка границы D-разбиения производится в соответствии со знаком определителя

$$\Delta(\omega)=\mathbf{Q}_{21}(\omega)-\mathbf{Q}_{22}(\omega)\cdot\mathbf{Q}_{12}^{-1}(\lambda)\cdot\mathbf{Q}_{11}(\lambda)$$

системы уравнений (9) на основании известных правил. Штриховка особых прямых, как обычно, выполняется согласно со штриховкой границы D-разбиения в окрестности точек сопряжения.

4. Алгоритм синтеза регуляторов пониженного порядка

На основе полученных соотношений предлагается следующий порядок параметрического синтеза регуляторов пониженного порядка.

Этап 1. Формирование исходных данных для выполнения расчетов по предлагаемому методу синтеза. Исходя из априорных сведений о свойствах объекта управления определяются тип (статический, астатический) регулятора и его порядок. Множество рассчитываемых параметров регулятора, состоящее из коэффициентов передаточной функции, разбивается на свободные и зависимые. В качестве двух свободных параметров, в плоскости которых предполагается строить область D-разбиения, выбираются коэффициенты передаточной функции, оказывающие решающее влияние на интересующие свойства системы. Задаются значения λ_j, $j=1,...,l$ доминирующих полюсов системы. Количество доминирующих полюсов системы должно быть равно числу зависимых параметров регулятора.

Этап 2. Построение области *D*-разбиения в плоскости свободных параметров регулятора. На этом этапе формируются матрицы $\mathbf{Q}_{11}(\lambda)$, $\mathbf{Q}_{12}(\lambda)$, $\mathbf{Q}_{21}(\omega)$, $\mathbf{Q}_{22}(\omega)$, и векторы $\mathbf{R}_1(\lambda)$, $\mathbf{R}_2(\omega)$. С помощью формул, полученных в разделе 3, в пространстве свободных параметров строятся граница D-разбиения и особые прямые. Для этого предлагается использовать современные специализированные системы программирования, имеющие в своем составе средства решения систем линейных алгебраических уравнений. К таким системам относится, например, MathCAD. Далее с помощью правил штриховки выделяется область, в которой обеспечивается заданное расположение доминирующих и других полюсов системы.

Этап 3. Поиск численных значений свободных варьируемых параметров из области *D*-разбиения. На этом этапе решается задача оптимизации по двум свободным параметрам регулятора. В качестве критерия оптимальности могут выбираться различные показатели качества, характеризующие работу системы в установившихся и переходных режимах. Построенная область D-разбиения рассматривается как область допустимых решений задачи. Для поиска оптимального решения целесообразно использовать численные методы или методы моделирования с направленным перебором допустимых вариантов.

5. Пример синтеза регулятора

Рассмотрим систему стабилизации, операторно-структурная схема которой показана на рис. 3.

Объект управления описывается уравнением

$$(10p+1)(p+1)^2 y(t) = 1,2 \cdot u(t) - 0,1 \cdot z(t).$$

В качестве регулятора используется ПИД-регулятор, в котором воздействие по производной формируется с помощью реального дифференцирующего звена непосредственно по выходной координате системы. В отличие от обычно принимаемого предположения, что постоянная времени дифференциатора $T_д$ мала и ею можно пренебречь, будем считать эту постоянную времени четвертым параметром, подлежащим определению в процессе синтеза. Передаточная функция регулятора по управляемой величине y имеет вид

$$W_р(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{(k_д + k_п T_д)s^2 + (k_п + k_и T_д)s + k_и}{T_д s^2 + s}.$$

Найдем значения параметров $k_и$, $k_п$, $k_д$, $T_д$ ПИД-регулятора, которые:

- обеспечивают расположение двух доминирующих полюсов замкнутой системы в точках λ_1=–0,2+j0,3 и λ_2=–0,2–j0,3 при условии, что остальные полюсы системы удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re} s_i < \begin{cases} -0,2 + 0,5\omega & \text{при } \omega \in (-\infty, 0], \\ -0,2 - 0,5\omega & \text{при } \omega \in [0, \infty); \end{cases}$$

- максимальное подавление возмущения z при выполнении заданных условий на расположение полюсов замкнутой системы. Качество подавления возмущения будем оценивать с помощью интеграла

$$J = \int_0^\infty y_z^2(t)\, dt,$$

где $y_z(t)$ – реакция системы на ступенчатое изменение возмущающего воздействия.

Введем следующие обозначения: $k_1=T_д$, $k_2=k_и$, $k_3=k_п+k_и T_д$, $k_4=k_д+k_п T_д$ и запишем характеристическое уравнение системы в виде, удовлетворяющем условиям применения описанного метода:

$$k_1 \cdot G_1(p) + k_2 \cdot G_2(p) + k_3 \cdot G_3(p) + $$
$$+ k_4 \cdot G_4(p) + k_5 \cdot G_5(p) + G_0(p) = 0,$$

где

$$G_1(p) = 10p^5 + 21p^4 + 12p^3 + p^2;$$
$$G_2(p) = 1,21;$$
$$G_3(p) = 1,21p;$$
$$G_4(p) = 1,21p^2;$$
$$G_0(p) = 10p^4 + 21p^3 + 12p^2 + p.$$

Параметры регулятора $T_д=k_1$ и $k_и=k_2$ будем считать свободными, а k_3 и k_4 – зависимыми. На основе полученных выше соотношений и исходных данных для рассматриваемой системы сформированы необходимые векторы и матрицы, проведено D-разбиение по двум свободным параметрам. На рис. 4 построена область в плоскости свободных параметров $T_д$ и $k_и$, соответствующая заданному расположению полюсов замкнутой системы.

В области D-разбиения нанесены линии равного значения критерия подавления возмущающего воздействия, выбранного для определения оптимальных значений параметров регулятора (рис. 4). Минимальное значение критерия достигается при значении $T_д$=0, то есть для идеализированного ПИД-регулятора. Выберем $T_д$=0,05 с. При этом максимально возможное значение $k_и$=2,2.

После подстановки этих значений в выражение, связывающее свободные и зависимые параметры регулятора, получены следующие значения зависимых параметров: $k_п$=7,68; $k_д$=13,43. При найденных значениях параметров регулятора замкнутая система имеет полюсы:

$$\lambda_1 = -0,2 + j0,3; \quad \lambda_2 = -0,2 - j0,3;$$
$$\lambda_3 = -0,805 + j1,179; \quad \lambda_4 = -0,805 - j1,179;$$
$$\lambda_5 = -20,09.$$

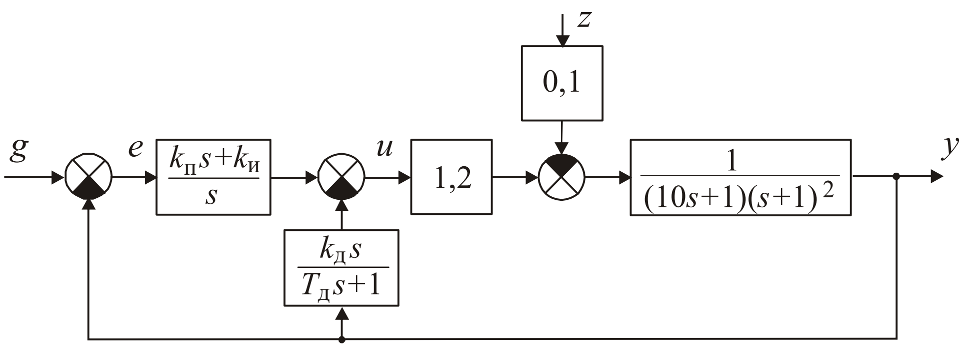

Рис. 3. *Операторно-структурная схема синтезируемой системы*

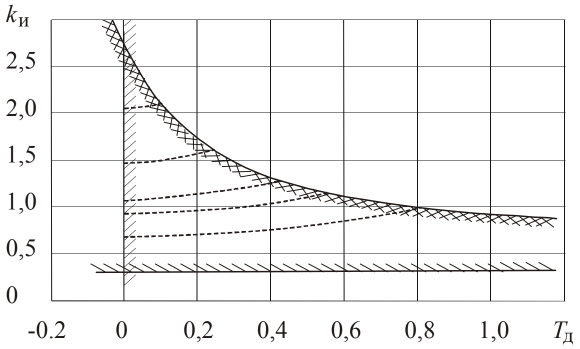

Рис. 4. *Область D-разбиения в плоскости свободных параметров регулятора*

Заключение

Предложен алгоритм синтеза параметров регулятора пониженного порядка, обеспечивающего заданное расположение доминирующих и недоминирующих полюсов замкнутой системы. В основу алгоритма положен метод построения границ D-разбиения с учетом ограничений на расположение доминирующих полюсов системы в заданных точках комплексной плоскости.

По существу предложенный алгоритм синтеза лежит в русле многокритериальных подходов к конструированию систем автоматического управления, получивших распространение в настоящее время. Он может служить основой для развития человеко-машинных (диалоговых) процедур проектирования систем автоматического управления с использованием, в частности, универсальной среды программирования MathCAD, имеющей в своем составе средства решения систем линейных алгебраических уравнений. Приведенный в статье пример подтверждает эффективность предложенного алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киселев О.Н., Поляк Б.Т. Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 3. – С. 119–130.
2. Скворцов Л.М. Синтез линейных систем методом полиномиальных уравнений // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 6. – С. 54–59.
3. Скворцов Л.М. Интерполяционный метод решения задачи назначения доминирующих полюсов при синтезе одномерных регуляторов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 1996. – № 4. – С. 10–13.
4. Lim Choo Min, Flangovan S. Pole Assignment of a Class of System Using Output-Feedback Dynamic Compensators // IEEE Trans. of Circuits and Systems. – 1987. – V. 34. – № 2. – P. 199–201.
5. Райцын Т.М. Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. – Л.: Энергия, 1970. – 96 с.
6. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 24–28.
7. Зотов М.Г. Многокритериальное конструирование систем автоматического управления. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 375 с.

Поступила 28.09.2007 г.