МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛЁГКИХ ПРИМЕСЕЙ В ЗАКРЫТОМ ВОДОЁМЕ

М.А.Гурских
Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. В.А.Перминов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: mtorig@gmail.com

MATHEMATICAL MODELING OF LIGHT CONTAMINANT PROPAGATION IN CLOSED RESERVOIR

M.A. Gurskih
Scientific Supervisor: Prof., Dr. Sci. (Phys.–Math.) V.A.Perminov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: mtorig@gmail.com

Annotation. *A mathematical model of the propagation in flooded mine lightweight contaminant due to allocation of groundwater is considered. The boundary-value problem is solved numerically using the finite volume method. With the help of numerical solutions obtained distribution of the main functions of the process (the velocity field, the concentration of the pollutant components, etc.) over time.*

Для Кузбасса и многих других регионов характерна проблема загрязнения водоёмов вредными веществами. Лёгкие вещества (плотность которых меньше плотности воды) такие как нефтепродукты скапливаются на поверхности воды. И многие практические задачи связаны с распространением таких примесей в некотором закрытом водоёме [1].

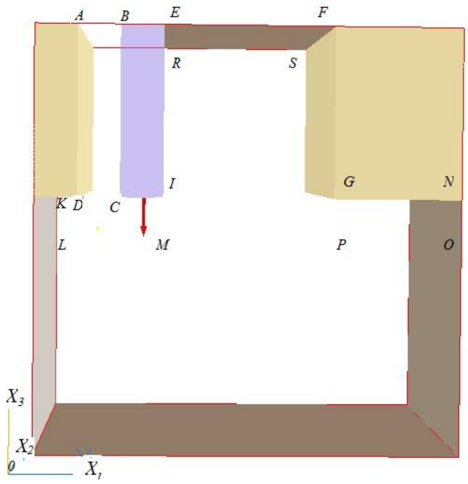

Рис. 1. Модель заброшенной затопленной шахты

Здесь рассматривается модель заброшенной затопленной шахты (рис. 1) с пробуренной скважиной (ABCD) и обрушенной кровлей, где естественным образом образовался отстойник (EFGI). Предполагается, что вдоль верхней кровли была накоплена примесь (IKML, EFSR и GNOP). Через границы (KD, CI, GN) в шахту поступают грунтовые воды, размывая тем самым накопленную примесь. Жидкость вытекает через границу *AB*. Часть примеси выносится течением из шахты, а часть задерживается внутри шахты. Для описания данного процесса переноса используется система дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения массы, импульса и концентрации компонентов в рассматриваемой области. Математически данная задача сводится к решению следующей системы дифференциальных уравнений для турбулентного течения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0, \quad i, j = 1,3, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(-\overline{\rho u_i' u_j'}) - \rho S C_d u_i |\vec{u}| - \rho g_i, \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial Y_k}{\partial t} + u_1 \frac{\partial Y_k}{\partial x_1} + (u_3 - u_{3k})\frac{\partial Y_k}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\overline{\rho Y_k' u_j'}), \tag{3}$$

$$p = \rho R_0 T \sum_k \frac{Y_k}{M_k}, \ \vec{g} = (0, g), u_{3k} = \frac{g d_k{}^2}{18\nu}\left(\frac{\rho_k}{\rho} - 1\right). \tag{4}$$

В представленной выше системе уравнений используются следующие обозначения: t, x_i – временная и пространственные координаты ($i=1, 3$); u_i – проекции вектора скорости на соответствующие оси декартовой системы координат, p – давление; g – ускорение свободного падения, R_0 – универсальная газовая постоянная, M_k – молекулярный вес k – компоненты, ρ – плотность смеси жидкости с частицами, ν – коэффициент кинематическойвязкости, D_t – коэффициент диффузии, d_k, ρ_k, u_{3k} - диаметр, плотность и скорость осаждения частиц, Y_k - массовые концентрации k – компоненты ($k=1$ – вода, 2 – твердые частицы). Система уравнений (1)-(4) содержит члены, связанные с турбулентной конвекцией и нуждаются в замыкании. Компоненты тензора турбулентных напряжений - $\rho\overline{v_i' v_j'}$ записываются через градиенты среднего течения согласно

$$-\rho\overline{u_i' u_j'} = \mu_t\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}k\delta_{ij}. \tag{5}$$

В связи с тем, что течение турбулентное используется коэффициент турбулентной вязкости $\mu_t = \rho C_\mu k^2/\varepsilon$, где: $k = \overline{u_i' u_i'}/2$ - турбулентная кинетическая энергия; ε – ее диссипация, C_μ- константа. По аналогии с турбулентным переносом импульса, поток -$\rho\,\overline{u_i' Y_k'}$ моделируются с помощью допущения о градиентной диффузии $-\overline{\rho u_i' Y_k'} = \Gamma_k \frac{\partial Y_k}{\partial x_i}$, где Γ_k - коэффициент турбулентного переноса, соответствующий скалярной функции Y_k. Здесь в неявной форме вводится допущение об изотропности турбулентности по всем направлениям. Предполагается, что коэффициент переноса Γ_k для скалярных функций равен отношению турбулентной вязкости к турбулентному числу Прандтля $\Gamma_k = \nu_t/\Pr_t$. Уравнение для турбулентной кинетическая энергия k запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k) + \bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}k) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} + \mu\right)\frac{\partial k}{\partial x_i}\right] - \mu_t\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta\bar{\rho}g_i\frac{\mu_t}{Pr}\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \bar{\rho}\varepsilon., \tag{6}$$

где $\beta = -\frac{1}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{T}}\right)_p$

Уравнение для диссипации турбулентной кинетической энергии ε записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\varepsilon) + \bar{u}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{\rho}\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} + \mu\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}\right] + C_1\frac{\varepsilon}{k}(G_k + G_B) - C_2\bar{\rho}\frac{\varepsilon^2}{k}\ , \qquad (7)$$

где σ_k, σ_ε, C_1, C_2 – эмпирические константы, а G_k, G_B - генерация турбулентности за счет вынужденной и естественной конвекции.

На основе математической постановки (1)–(7) проводились численные расчеты по определению картины процесса распространения загрязняющей примеси в затопленной шахте с помощью программного комплекса **PHOENICS** [2-3]. В результате численного интегрирования получены векторные поля скорости и распределений загрязняющей примеси в различные моменты времени. Рассматривается трёхмерная область, предполагается, что боковые стенки не влияют на процесс распространения примеси и течения жидкости. Поэтому комментарии будут даны на примере двумерной области. Рассматривается кубическая область с размерами 10 метров. В области задана вода и примесь, концентрация которой 0.1 и размер частиц 8.10^{-5} м. Плотность примеси равна 500 кг/м, что в два раза меньше плотности воды. Скорость поступления грунтовых вод 0.1 м/с. Через 300 секунд после начала расчета происходит установление рассматриваемого течения и, следовательно, распределения загрязняющей примеси, которая собирается в области EFGI. На рис. 2 представлено полученное распределение загрязняющей примеси.

Данная математическая модель может быть использована описания процесса распространения загрязняющих примесей при очистке загрязненных вод и для выборе оптимальных параметров.

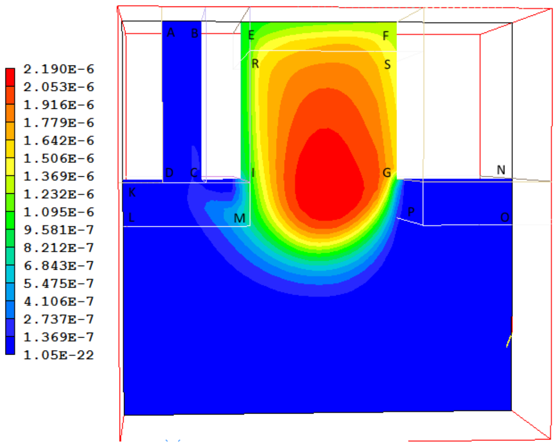

Рис.2. Распределение загрязняющей примеси

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белолипецкий В.М., Шокин Ю.И. Математическое моделирование в задачах охраны окружающей среды. − Новосибирск: Издательство «Инфолио-пресс», 1997. − 240 с.
2. Агранат В.М., Перминов В.А., Шатохин А.А. Введение в **PHOENICS**. – Томск: Издательство Томского политехнического университета, 2014. – 47 с.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. − М: Энергоатомиздат, 1984. − 124 с.