http://www.nsu.ru/education/etfm/frontpg.htm (Дата обращения: 23.02.15).
2. Фатьянова М.Э, Семенов М.Е. Моделирование СП со встроенными барьерными опционами класса KNOCK-IN [Электронный ресурс] URL: http://science-persp.tpu.ru/Previous%20Materials/Konf_2014.pdf (Дата обращения: 23.02.15).
3. Вайн С. Опционы: Полный курс. – М.: Альпина Бизнес Букс, 2008. – 466 с.
4. Гарбер Г.З. Основы программирования на Visual Basic и VBA в Excel 2007. – М.:Солонн-Пресс, 2008. –192 с.
5. Подлин Ш. Освой самостоятельно программирование для Microsoft Excel 2000 за 24 часа. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2000. - 304 с.

Использование биномиальной модели для вычисления стоимости опциона продавца «put» в Microsoft Excel

Фатьянова М.Э.
mef1@tpu.ru

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент, Семенов М.Е., Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Целью данной работы является использование биномиальной модели для вычисления стоимости опциона продавца «put» в Microsoft Excel.

Аналитические формулы имеются лишь для очень ограниченного набора экзотических опционов: бинарных, простейших видов барьерных и азиатских, а также некоторых других. Поэтому в абсолютном большинстве приходится использовать численные методы оценки. Численные методы включают в себя биномиальный и Монте Карло.

Понятие опционов на фьючерсные контракты

Опцион представляет собой контракт, заключаемый между двумя инвесторами, один из которых продает (выписывает) опцион, а другой покупает его и приобретает тем самым право (но не обязанность) в течение оговоренного в условиях опциона срока либо купить, либо продать по фиксированной цене определенное количество или значение конкретного базисного актива.

Рыночная стоимость опциона определяется в результате аукционных торгов на опционной бирже. Цена, на которую согласны покупатель и продавец опциона, называется премией. Премия содержит в себе два основных элемента: внутреннюю стоимость и временную стоимость. Внутренняя стоимость отражает количество, если таковое имеется, на которое опцион находится "в деньгах".

Опцион к дате истечения контракта не имеет временной стоимости, а премия включает только внутреннюю стоимость. Самая большая величина временной стоимости обычно наблюдается у опционов "при деньгах". По мере того, как опцион перемещается дальше "в деньги" или "без денег", прогрессивно убывает составляющая временной стоимости в премии. Временная стоимость убывает по мере приближения даты истечения контракта, причем скорость убывания нарастает [1].

Основной проблемой подписчика опциона является определение минимального уровня премии, ниже которого он может оказаться в проигрыше при исполнении опциона держателем, даже если он наилучшим образом распорядится полученной премией и имеющимся в его распоряжении базисным активом.

Существует так называемая справедливая стоимость опциона - теоретически обоснованная минимальная цена, при получении которой подписчик опциона может обеспечить гарантированным образом опционные платежи.

Единицей торговли опциона на фьючерсный контракт является один фьючерсный контракт с заданным месяцем поставки и с определенным базисным активом. Все опционы на фьючерсные контракты являются опционами американского стиля. Опционы, которые истекают "в деньгах", автоматически исполняются согласно инструкции клиринговой палаты.

В опционах на фьючерсные контракты цены исполнения котируются в пунктах фьючерсной цены. Срок базисных фьючерсных контрактов обычно заканчивается вскоре после даты истечения опционного контракта. Держатель опциона купли на фьючерсный контракт при исполнении опциона открывает длинную позицию по фьючерсному контракту, а также получает сумму денег, равную превышению фьючерсной цены над ценой исполнения, а держатель опциона продажи - короткую и сумму денег, равную превышению цены исполнения над фьючерсной ценой [2].

В отличие от других, в опционах на фьючерсные контракты во время покупки опциона премия подписчику может не выплачиваться и расчет, как с держателем опциона, так и с подписчиком может производиться после исполнения опциона держателем. При определении справедливой стоимости опциона фьючерсный контракт рассматривают как акцию, выплачивающую дивиденд, ставка которого равна безрисковой процентной ставке.

Размер премии опционов на фьючерсные контракты зависит:

- от отношения между ценой базисного фьючерса и ценой исполнения. Чем больше опцион "в деньгах", тем больше он стоит;
- от волатильности цены базисного фьючерса. Рост волатильности может стимулировать повышение спроса на опцион, что вызовет рост его стоимости;
- от времени до истечения опционного контракта. Так как стоимость базисного фьючерсного контракта изменяется сильнее на более длинных интервалах времени, то и опционная премия флуктуирует сильнее при больших сроках до истечения [1].

Рост популярности торговли опционами на фьючерсные контракты вызван рядом причин:

- гибкостью. С опционами на фьючерсы появляется возможность занять точную рыночную позицию, соответствующую допускаемому инвестором риску и потенциальной прибыли;
- отсутствием обязательств. Опцион дает право выбора без обязательств купить или продать фьючерсный контракт;
- ограниченным риском. Максимальный риск держателя опциона сведен к риску потерять премию;
- отсутствием требований маржи для покупателя опциона, несмотря на то, что участники фьючерсных сделок с обеих сторон должны вносить маржу;
- возможностью не продавать актив при снижении его стоимости, т.к. держатель опциона не получает маржинальных требований при снижении стоимости базисных облигаций;
- высокой ликвидностью на опционном рынке, позволяющей легко открывать и закрывать позиции [2].

Теоретические аспекты использования биномиальной модели

Приведем общую формулу для многопериодной биномиальной модели (БМ):

$$c = \frac{1}{R^n} \cdot \left[\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{n!}{j! \cdot (n-j)!} \right) \cdot p^j \cdot (1-p)^{n-j} \cdot \max\left(0; u^j \cdot d^{n-j} \cdot S - X\right) \right] \quad (1)$$

Формула (1) говорит о том, что цена опциона равна дисконтированной стоимости суммы ожидаемых выплат по контракту к моменту его истечения. Весь срок обращения разбит на n периодов. Соответственно, в знаменателе R^n – это коэффициент дисконтирования, который учитывает ставку без риска и количество периодов.

Числитель показывает ожидаемое значение суммы выплат по опциону с учетом вероятности каждого конкретного исхода. Поскольку мы рассматриваем биномиальный процесс, то в каждом периоде цена акции может пойти либо вверх с вероятностью p, либо вниз с вероятностью (1-p).

Индекс j показывает количество периодов, когда цена акции возрастала из общего числа периодов n. Величина (n-j) соответственно, говорит о количестве периодов, в течение которых цена акции падала.

Знак суммы в формуле показывает, что количество возможных вариантов роста цены акции имеет диапазон от j=0 до j=n. При j=0 оценивается вероятность падения цены акции в каждом периоде. При j=n оценивается вероятность роста цены акции в каждом периоде. Оцениваются все возможные комбинации движений цены акции за n периодов.

Выражение $n!/(j! \cdot (n-j)!)$ показывает количество различных комбинаций движения цены акции, которые дают одну и ту же цену к моменту истечения контракта. Выражение $p^j \cdot (1-p)^{n-j}$ говорит о вероятности события, когда курс акции вырастет j раз и упадет (n-j) раз. Комбинация [max (0; $u^j \cdot d^{n-j} \cdot S-X$)] дает выплату по опциону к моменту истечения контракта, если цена акции росла в j периодах на величину u и падала в (n-j) периодах на величину d.

Все выражение без знака суммы формулы (1), которое стоит перед [max (0; $u^j \cdot d^{n-j} \cdot S-X$)] показывает вероятность того, что цена акции будет расти в j периодах из n периодов и падать в (n-j) периодах с учетом всех возможных комбинаций роста и падения цены акции [2].

Основное допущение БМ для цен опционов состоит в том, что рынок опционов является эффективным, т. е. спекулянты не могут получить чрезмерную прибыль от комбинации с базисным инструментом и опционом при их одновременной покупке и/или продаже [3]. Представление модели обычно строится для европейского опциона, который может быть исполнен в день погашения.

Практическая реализация

Для демонстрации наглядного примера рассмотрим маржируемый опцион call (колл) на фьючерсный контракт на курс доллар США - российский рубль. Возьмем исторические данные за период: 01.10.13-1.04.14, так как для этого промежутка времени ранее проводилось конструирование СП. Пусть страйк E=32250 руб.; текущая цена базового актива P_s=32237 руб.; риск базового актива σ=14.99%; срок T=0.5 года (6мес.); безрисковая ставка r=6.5%.

Так как страйк E по отношению к P_s не является «дальним», то для построения достаточно взять n=50 периодов. Отметим, что при увеличении n, точность вычисления будет расти. Таким образом, построим n=50 – периодную биномиальную модель, добавив к имеющимся новые входные параметры: u=1.015; d=0.99; p=0.52; q=0.48.

Используя формулу (1) работы [2] рассчитаем сначала цену фьючерса на курс доллар/рубль, а затем найдем цену опциона на фьючерс. В результате у нас получится 2 «треугольника чисел» протяженностью по вертикали и горизонтали в n=50 периодов (рис. 1).

11												25,0706
10											40,8862	57,936
9										64,0362	88,9982	122,496
8									96,7038	131,937	178,255	238,411
7								141,303	189,417	251,438	330,416	429,725
6							200,396	264,165	344,842	445,675	570,129	721,769
5						276,601	358,86	461,098	586,642	738,908	921,267	1136,88
4					372,486	476,021	602,558	755,378	937,713	1152,6	1402,74	1690,32
3				490,471	617,915	771,22	953,497	1167,67	1416,35	1701,67	2025,18	2387,74
2			632,747	786,483	968,679	1182,16	1429,48	1712,73	2033,51	2392,84	2791,14	3228,38
1		801,212	983,318	1196,15	1442,2	1723,57	2041,93	2398,42	2793,77	3228,38	3660,75	4086,69
0	997,4608	1209,69	1454,56	1734,2	2050,31	2404,17	2796,67	3228,38	3660,75	4086,69	4506,28	4919,61
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Рисунок 1. Первые 11 периодов n=50-периодной биномиальной модели

Таким образом, мы получим стоимость опциона по биномиальной модели: V_{c2}=997,46 руб.

Биномиальная модель ценообразования тоже имеет следующие ограничения: траектории цен, описываемые с помощью модели, более плавны и потому менее реалистичны, чем наблюдаемое на практике поведение цен. В реальной жизни бывают дни как с очень высокой, так и с очень низкой волатильностью. Модель же не предусматривает сильного роста или падения цен за первый временной шаг. В качестве следствия можно отметить, что метод является удобным для проверки результатов оценки другими методами, однако для «глубоких» страйков метод не рекомендуется к применению ввиду равномерности сетки и отсутствия детализации «на концах». Тем не менее биномиальная модель — хороший компромисс между точностью метода «Монте-Карло» и скоростью расчетов по модели Блэка-Шоулза.

Список литературы:

1. Расчет премии опциона методом Монте-Карло [Электронный ресурс] URL: http://www.nsu.ru/education/etfm/frontpg.htm (Дата обращения: 23.02.15).
2. Буренин А.Н. Форварды, фьючерсы, опционы, экзотические производные. – М.: НТО – 2008. – 512 с.
3. Мицель А.А., Евремов В.А. Финансовый инжиниринг на рынке опционов // Известия Томского политехнического университета. – 2009. – № 6. – С. 47-49.
4. Крицкий О.Л. Случайные процессы. Алгоритмы. Методы. Решения. - Saarbrucken: Palmarium Academic Publishing, 2013. - 144 с.