УДК 514.76

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПЛОСКОСТЕЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, Е.Д. Глазырина

Томский политехнический университет
E-mail: glasirina@mail2000.ru

Статья является продолжением статьи "Распределение двумерных плоскостей в четырехмерном евклидовом пространстве" и посвящена геометрической интерпретации аналитических отображений $f_{\alpha a}, \varphi_{\alpha a}: L_2^\alpha \to L_2^\beta$ и доказательству существования этих отображений.

1. Геометрические свойства отображений $f_{\alpha a}$ и $\varphi_{\alpha a}$

В статье [1, п. 3] даны геометрические свойства отображений $f_{\alpha r}$ и $\varphi_{\alpha r}$. Подробно эти свойства были выявлены в случае $\alpha=1$. Геометрические же свойства этих отображений при $\alpha=2$ получаются из геометрических свойств отображений f_{1r} и φ_{1r} формальной заменой индексов $1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4$. Аналогичным образом поступим и для отображений $f_{\alpha r}$ и $\varphi_{\alpha r}$ (см. определение 2.1 и [1, (2.7)]).

В соответствии с утверждениями 1 и 2 в [1, п. 2] отображения f_{1a} и φ_{1a} обладают, в частности, теми же геометрическими свойствами, что и отображения $f_{1r}, \varphi_{1r}: L_2^1 \to L_2^2$ (см. определение 2.1 и [1, (2.6)]). Однако в этом пункте выясним другие свойства отображений f_{1a} и φ_{1a}.

1.1. Основные прямые в L_2^1

Определение 1.1. Прямая $x = (\bar{A}, \bar{e}_\alpha) x^\alpha$ в плоскости $L_2^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ типа [1, (1.4)], проходящая через точку $A \in E_4$, называется основной прямой, если ее образы при отображениях $f_1, \varphi_1: L_2^1 \to L_2^2$ в плоскости L_2^1 типа [1, (1.6)] ортогональны.

Теорема 1.1. Через каждую точку $A \in E_4$ в плоскости L_2^1 проходят в общем случае не более четырех основных прямых в смысле определения 1.1.

Доказательство. Из [1, (2.1–2.2)] следует, что прямая $x \in L_2^1$ будет основной прямой тогда и только тогда, когда величины x^α удовлетворяют уравнениям:

$$h_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} x^{\alpha_3} x^{\alpha_4} = 0, \; x^{\hat{\alpha}} = 0,$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 = 1,2), \tag{1.1}$$

где симметрические по всем индексам величины $h_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}$ определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
&h_{1111} = -A_{11}^3 A_{21}^3 - A_{11}^4 A_{21}^4, \; h_{2222} = A_{22}^3 A_{12}^3 + A_{22}^4 A_{12}^4,\\
&h_{1112} = A_{11}^3 (A_{22}^3 - A_{11}^3) - A_{21}^3 (A_{12}^3 + A_{21}^3) +\\
&+ A_{11}^4 (A_{22}^4 - A_{11}^4) - A_{21}^4 (A_{12}^4 + A_{21}^4),\\
&h_{2221} = A_{22}^3 (A_{22}^3 - A_{11}^3) + A_{12}^3 (A_{12}^3 + A_{21}^3) +\\
&+ A_{22}^4 (A_{22}^4 - A_{11}^4) + A_{12}^4 (A_{12}^4 + A_{21}^4),\\
&h_{1122} = A_{12}^3 A_{22}^3 - A_{11}^3 A_{21}^3 + A_{22}^4 A_{12}^4 - A_{21}^4 A_{11}^4.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Из (1.1) с учетом (1.2) вытекает справедливость теоремы 1.1.

1.2. Канонизация ортонормального репера R

Для упрощения дальнейших геометрических и аналитических рассуждений проведем в каждой точке $A \in E_4$ такую канонизацию ортонормального репера R, при которой

$$A_{22}^3 = 0, \; A_{12}^4 = 0,$$
$$(A_{21}^3 + A_{12}^3) A_{12}^3 + (A_{11}^4 - A_{22}^4) A_{22}^4 \neq 0. \tag{1.3}$$

Из дифференциальных уравнений [1, (1.5)] убеждаемся в том, что 1-формы ω_1^2 и ω_3^4 являются главными:

$$\omega_1^2 = A_{1i}^2 \omega^i, \omega_3^4 = A_{3i}^4 \omega^i. \tag{1.4}$$

Поэтому в соответствии с [2] канонизация ортонормального репера R типа (1.3) существует. Из (1.1) и (1.2) в силу (1.3) следует, что при указанной канонизации репера R прямая $l_1^2 = (\bar{A}, \bar{e}_2)$ является основной прямой, а прямая

$l_1^4 = (\bar{A}, \bar{e}_4)$ в L_2^2 является образом прямой l_1^2 при отображении $f_1 : L_2^1 \to L_2^2$. При этом из рассмотрения исключается случай $h_{2221} = 0$, когда прямая l_1^2 является двойной основной прямой.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.2. Если отображения $f_{1r}, \varphi_{1r} : L_2^1 \to L_2^2$ в каждой точке $A \in E_4$ являются гармоническими $(f_1 \to f_{1r}, \varphi_1 \to \varphi_{1r})$, то основные прямые в плоскости L_2^1, проходящие через точку A, состоят из двух пар ортогональных прямых, сопряженных относительно друг друга.

Доказательство. Из (1.1) и (1.2) в силу (1.3) и [1, (2.6)] получаем, что в случае отображений f_{1r} и φ_{1r} основными прямыми в точке A плоскости L_2^1 являются

$$l_1^1 = (\bar{A}, \bar{e}_1),\ l_1^2 = (\bar{A}, \bar{e}_2),\ l_1^\pm = (\bar{A}, \bar{e}_1 \pm \bar{e}_2),$$

что и доказывает настоящую теорему.

Теорема 1.3. Если отображение $f_1(\varphi_1) : L_2^1 \to L_2^2$ в каждой точке $A \in E_4$ является отображением $f_{1a}(\varphi_{1a})$, то прямые l_1^1 и l_1^2 являются основными прямыми, две другие основные прямые в плоскости L_2^1 сопряжены относительно l_1^1 и l_1^2, т.е. составляет вместе с ними гармоническую четверку.

Доказательство этой теоремы вытекает из (1.1–1.3), [1, (2.7)] и соотношений

$$f_1 \to f_{1a} \Leftrightarrow A_{22}^3 = A_{11}^3 = A_{12}^4 = A_{21}^4 = 0,$$

$$A_{12}^3 + A_{21}^3 = -A_{11}^4 \neq 0 \overset{(1.1-1.3)}{\Rightarrow} \qquad (1.5)$$

$$x^1 x^2 \left\{ \left(A_{21}^3 - A_{11}^4\right)\left(x^1\right)^2 + \left(A_{12}^3 + A_{11}^4\right)\left(x^2\right)^2 \right\} = 0;$$

$$\varphi_1 \to \varphi_{1a} \Leftrightarrow A_{12}^3 = A_{21}^3,\ A_{12}^4 = A_{21}^4 = 0,$$

$$A_{11}^3 = A_{22}^3, A_{11}^4 - A_{22}^4 = -2A_{12}^3 \neq 0 \overset{(1.1-1.3)}{\Rightarrow} \qquad (1.6)$$

$$x^1 x^2 \left\{ \left(A_{11}^4 - A_{12}^3\right)\left(x^1\right)^2 + \left(A_{22}^4 + A_{12}^3\right)\left(x^2\right)^2 \right\} = 0.$$

1.3. Случай $f_{1a} \cup \varphi_{1a}$

При построении канонического ортонормального репера R типа (1.3) из рассмотрения исключается случай $f_{1a} \cup \varphi_{1a}$, когда в каждой точке $A \in E_4$ отображения f_1 и φ_1 являются одновременно отображениями f_{1a} и φ_{1a}. Из [1, (2.7)] следует, что рассматриваемый случай характеризуется соотношениями:

$$A_{21}^3 = A_{12}^3 = A_{22}^4 = -A_{11}^4 = a,$$

$$A_{12}^4 = A_{21}^4 = -A_{22}^3 = A_{11}^3 = b. \qquad (1.7)$$

Из (1.1–1.3) с учетом (1.5), (1.6) и [1, п. 3.2] вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1.4. Если отображения $f_1, \varphi_1 : L_2^1 \to L_2^2$ в каждой точке $A \in E_4$ является одновременно отображениями f_{1a}, φ_{1a}, то выполняются следующие свойства:

1) коника $K_2^{12} \subset L_2^2$ является окружностью с центром в точке $A \in E_4$ и радиуса $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$;

2) основные прямые в плоскости L_2^1 не определены, т.е. любая прямая в L_2^1, проходящая через точку A, является основной прямой.

2. Существование отображений $f_{\alpha r}, \varphi_{\alpha r}, f_{\alpha a}$ и $\varphi_{\alpha a}$ $(\alpha = 1,2)$

Прежде всего заметим, что распределение $\Delta_{2,4}^1 : A \to L_2^1$ в E_4, о котором идет речь в [1, п. 1], представляет собой четырехпараметрическое многообразие $V_{2,4}^1$ двумерных плоскостей L_2^1, проходящих через соответствующие точки $A \in E_4$.

Определение 2.1. Многообразием $V_{2,4}^{1\alpha r}$ (α=1,2; α – фиксировано) называется распределение $\Delta_{2,4}^1$, у которого отображение $f_\alpha : L_2^\alpha \to L_2^\beta$ $(\alpha, \beta = 1,2;\ \alpha \neq \beta)$ является отображением $f_{\alpha r}(f \to f_{\alpha r})$. Аналогично определяются многообразия

$$
\begin{aligned}
& V_{2,4}^{1\alpha a}(f_\alpha) \Leftrightarrow f_\alpha \to f_{\alpha a}, \\
& V_{2,4}^{1\alpha r}(\varphi_\alpha) \Leftrightarrow \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha r}, \\
& V_{2,4}^{1\alpha a}(\varphi_\alpha) \Leftrightarrow \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha a}, \\
& V_{2,4}^{1\alpha r}(f_\alpha, \varphi_\alpha) \Leftrightarrow f_\alpha \to f_{\alpha r},\ \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha r}, \\
& V_{2,4}^{1\alpha a}(f_\alpha, \varphi_\alpha) \Leftrightarrow f_\alpha \to f_{\alpha a},\ \varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha a}, \\
& V_{2,4}^{1a} \Leftrightarrow f_1 \to f_{1a}, \varphi_1 \to \varphi_{1a},\ f_2 \to f_{2a}, \varphi_2 \to \varphi_{2a}.
\end{aligned}
\qquad (2.1)
$$

Заметим, что геометрические свойства многообразий, о которых идет речь в определении 2.1, см. (2.1), изучены в п. 1 и в [1, п. 3]. В частности, в соответствии с теоремой 2.1 в [1] в случае многообразия $V_{2,4}^{1a}$ распределения $\Delta_{2,4}^\alpha : A \to L_2^\alpha\ (\alpha = 1,2)$ голономны.

Из (2.1) следует, что многообразие $V_{2,4}^{1a}$ является частным случаем всех многообразий, о которых идет речь в определении 2.1. Поэтому, если многообразие $V_{2,4}^{1a}$ существует, то все остальные многообразия 2.1 также существуют.

Теорема 2.1. Многообразие $V_{2,4}^{1a}$ в E_4 существует и определяется с произволом двух функций четырех аргументов.

Доказательство существования многообразия $V_{2,4}^{1a}$ проведем методом Кэлера [3].

В соответствии с определением 2.1, (2.1), (1.7) и [1, (2.7)] заключаем, что многообразие $V_{2,4}^{1a}$ характеризуется конечными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
& A_{21}^3 = A_{12}^3 = A_{22}^4 = -A_{11}^4 = a, \\
& A_{12}^4 = A_{21}^4 = -A_{22}^3 = A_{11}^3 = b; \\
& A_{43}^1 = A_{34}^1 = A_{44}^2 = -A_{33}^2 = a^*, \\
& A_{34}^2 = A_{43}^2 = -A_{44}^1 = A_{33}^1 = b^*.
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

Из дифференциальных уравнений [1, (1.5)] с учетом (2.2) получаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины a, b, a^* и b^*:

$$
\begin{aligned}
& da - b\left(2\omega_1^2 - \omega_3^4\right) = a_i \omega^i, \\
& db + a\left(2\omega_1^2 - \omega_3^4\right) = b_i \omega^i, \\
& da^* - b^*\left(2\omega_3^4 - \omega_1^2\right) = a_i^* \omega^i, \\
& db^* + a^*\left(2\omega_3^4 - \omega_1^2\right) = b_i^* \omega^i,
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

где явный вид величин, стоящих при ω^i, для нас несущественный.

Дифференциальные уравнения (2.3) позволяют провести следующую канонизацию ортонормального репера R:

$$a=0,\ a^*=0,\ b\neq 0,\ b^*\neq 0. \tag{2.4}$$

Тогда из (2.3) получаются дифференциальные уравнения типа (1.4), где

$$\begin{aligned} A_{1i}^2&=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{b}a_i+\frac{1}{b^*}a_i^*\right),\\ A_{3i}^4&=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{b}a_i+\frac{2}{b^*}a_i^*\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

а значит в соответствии с [2] канонизация ортонормального репера R типа (2.4) существует. Из [1, (1.5)] с учетом (2.2–2.5) и (1.4) следует, что многообразие $V_{2,4}^{1a}$ характеризуется в терминах построенного канонического репера R дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} &\omega_1^3=\omega_2^4=b\omega^1-b^*\omega^3,\\ &\omega_1^4=-\omega_2^3=b\omega^2+b^*\omega^4,\\ &\omega_1^2=A_{1i}^2\omega^i,\ \omega_3^4=A_{3i}^4\omega^i. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Продолжение первых двух дифференциальных уравнений в (2.6) приводит к дифференциальным уравнениям:

$$db=b_i\omega^i,\ db^*=b_i^*\omega^i, \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned} &b_1=a_2,\ b_2=-a_1,\ b_3=-a_4,\ b_4=a_3,\\ &b_1^*=a_2^*,\ b_2^*=a_1^*,\ b_3^*=a_4^*,\ b_4^*=-a_3^*, \end{aligned} \tag{2.8}$$

причем величины a_i и a_i^* в силу (2.3) и (2.4) определяются по формулам

$$a_i=\left(A_{3i}^4-2A_{1i}^2\right)b,\ a_i^*=\left(A_{1i}^2-2A_{3i}^4\right)b^*. \tag{2.9}$$

Заметим также, что при продолжении указанных дифференциальных уравнений возникают следующие конечные соотношения:

$$a_3=a_1^*,\ b^2-a_4+b^{*2}-a_2^*=0. \tag{2.10}$$

Замыкание дифференциальных уравнений (2.7) и (2.6) приводит к четырем квадратичным внешним уравнениям вида:

$$\begin{aligned} &\left(db_i-b_k\omega_i^k\right)\wedge\omega^i=0,\ \left(db_i^*-b_k^*\omega_i^k\right)\wedge\omega^i=0,\\ &\left(dA_{1j}^2-A_{1k}^2\omega_j^k-C_{1ji}^2\omega^i\right)\wedge\omega^j=0,\\ &\left(dA_{3j}^4-A_{3k}^4\omega_j^k-C_{3ji}^4\omega^i\right)\wedge\omega^j=0, \end{aligned} \tag{2.11}$$

где

$$C_{3ij}^4=-C_{1ij}^2,\ C_{1[ij]2}=0,\ C_{112}^2=2b^2,\ C_{113}^2=0,$$
$$C_{114}^2=2bb^*,\ C_{123}^2=2bb^*,\ C_{124}^2=0,\ C_{134}^2=-2b^{*2}.$$

Из квадратичных уравнений (2.11) по лемме Картана получаются дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} &db_i-b_k\omega_i^k=b_{ij}\omega^j,\ db_i^*-b_k^*\omega_i^k=b_{ij}^*\omega^j,\\ &dA_{1j}^2-A_{1k}^2\omega_j^k-C_{1ji}^2\omega^i=\overset{*}{A}{}_{1ji}^2\,\omega^i,\\ &dA_{3j}^4-A_{3k}^4\omega_j^k-C_{3ji}^4\omega^i=\overset{*}{A}{}_{3ji}^4\,\omega^i, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где

$$b_{[ij]}=0, b_{[ij]}^*=0, \overset{*}{A}{}_{1[ji]}^2=0, \overset{*}{A}{}_{3[ji]}^4=0. \tag{2.13}$$

Поскольку ортонормальный репер R канонический, то

$$\omega_j^k=A_{ji}^k\omega^i,\ \left(j\neq k\right). \tag{2.14}$$

Положим

$$dA_{1j}^2=A_{1ji}^2\omega^i,\ dA_{3j}^4=A_{3ji}^4\omega^i, \tag{2.15}$$

тогда из (2.12) с учетом (2.14) и (2.15) получаем:

$$\begin{aligned} &A_{1ji}^2=\overset{*}{A}{}_{1ji}^2+A_{1k}^2A_{ji}^k+C_{1ji}^2, A_{1[ji]}^2=0,\\ &A_{1ji}^2=\overset{*}{A}{}_{3ji}^4+A_{3k}^4A_{ji}^k+C_{3ji}^4, \overset{*}{A}{}_{3[ji]}^4=0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Дифференцируя конечные соотношения (2.10) и пользуясь при этом соотношениями (2.7) и (2.9), с учетом (2.16) получаем следующие конечные соотношения:

$$a_{3j}=a_{1j}^*,\ 2bb_j-a_{4j}+2b^*b_j^*-a_{2j}^*=0, \tag{2.17}$$

где

$$a_{ij}=b\left(A_{3ij}^4-2A_{1ij}^2\right)+b_j\left(A_{3i}^4-2A_{1i}^2\right),$$
$$a_{ij}^*=b^*\left(A_{1ij}^{24}-2A_{3ij}^4\right)+b_j^*\left(A_{1i}^2-2A_{3i}^4\right).$$

Заметим, что соотношения (2.16) получены из внешних квадратичных дифференциальных уравнений (2.11) после подстановки в них соотношений (2.15).

Учитывая соотношения (2.13), (2.16) и (2.17), получаем число N независимых параметров наиболее общего элемента, которое равно

$$N=4\cdot 10-8=32. \tag{2.18}$$

Строим интегральную цепь по формам базиса $\left[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^4\right]$. Пользуясь соотношениями (2.12), (2.16), (2.15) и (2.18), получаем, что линейные элементы $\tilde{E}_1\left(\omega^2=\omega^3=\omega^4=0\right)$, $\tilde{E}_2\left(\omega^3=\omega^4=0\right)$, $\tilde{E}_3\left(\omega^4=0\right)$, $\tilde{E}_4$ определяются с произволом, соответственно

$$r_1=14,\ r_2=10,\ r_3=6,\ r_4=2.$$

Поэтому число Картана равно

$$Q=r_1+r_2+r_3+r_4=14+10+6+2=32.$$

Таким образом, с учетом (2.18) имеем $N=Q$. Это означает, что система дифференциальных уравнений (2.7) и (2.12) в иволюции, а поэтому многообразие $V_{2,4}^{1a}$ в E_4 существует и определяется с произволом $r_4=2$ функций четырех аргументов. Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Поскольку распределения $\Delta_{2,4}^1$ и $\Delta_{2,4}^2$ в случае многообразия $V_{2,4}^{1a}$ в E_4 голономны, то многообразие $V_{2,4}^{1a}$ в E_4 расслаивается на двумерные поверхности S_2^1 и S_2^2 с касательными плоскостями L_2^1 и L_2^2 в точке A, соответственно.

Замечание 2.2. Из (2.6–2.8) в силу [1, (1.1)] следует, что в случае многообразия $V_{2,4}^{1a}$ существуют два голономных распределения $\overset{*1}{\Delta}_{2,4} : \bar{A} \to \overset{*1}{L}_2 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2)$ и $\overset{*2}{\Delta}_{2,4} : \bar{A} \to \overset{*2}{L}_2 = (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_4) \perp \overset{*1}{L}_2$, где $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{e}_1 - \frac{b}{b^*}\bar{e}_3$, $\bar{\varepsilon}_2 = \bar{e}_2 + \frac{b}{b^*}\bar{e}_4$, $\bar{\varepsilon}_3 = \bar{e}_3 - \frac{b^*}{b}\bar{e}_1$, $\bar{\varepsilon}_4 = \bar{e}_4 - \frac{b^*}{b}\bar{e}_2$. При этом плоскости L_2^1 и L_2^2 изменяются параллельно самим себе вдоль интегральных кривых $\omega_1^3 = 0$, $\omega_1^4 = 0$ распределения $\overset{*1}{\Delta}_{2,4}$ или $\overset{*2}{\Delta}_{2,4}$, описываемых точкой A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ивлев Е.Т., Глазырина Е.Д. Распределение двумерных плоскостей в четырехмерном эвклидовом пространстве // Известия Томского политехнического университета. – 2003. – Т. 306. – № 6. – С. 5–7.
2. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR). – 1962. – № 2. – P. 231–240.
3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

УДК 530.12.531.51

КВАНТОВАЯ КОСМОЛОГИЯ И ПРОБЛЕМА ВРЕМЕНИ

В.В. Ласуков

Томский политехнический университет
Тел.: (382-2)-56-37-92

Работа посвящена исследованию проблемы введения переменной времени для различных космологических моделей Вселенной. Известно, что в силу масштабной инвариантности данные космологические модели являются системами со связями первого рода, что приводит к проблеме введения времени и к проблеме квантования. В данной работе показано, что учет уравнений связи Логунова обуславливает отличие от нуля гамильтониана, что позволяет решить проблему времени квантовой космологии вне рамок традиционных подходов решения этой проблемы.

Введение

Считается, что во второй половине прошлого столетия научным сообществом был осознан статус теории гравитации как системы со связями первого рода [1]. При таком подходе неизбежно возникает проблема времени в квантовой космологии из-за гамильтоновой связи, обусловленной требованием инвариантности относительно изменения масштаба времени, а не выбором замкнутой модели Вселенной. В данной работе проводится краткий обзор методов классического квантования Дирака-Уиллера-Де Витта и Арновитта-Дезера-Мизнера в применении к рассматриваемым космологическим моделям, в рамках которых переменная времени может быть введена на основе квазиклассического приближения либо как параметр калибровочного условия. При использовании данных методов квантования возникают такие проблемы, как отсутствие положительной определенности скалярного произведения волновых функций и зависимость физических величин от выбора калибровочных условий.

В этой связи в данной работе на основе исследования уравнений связи Логунова [2] решена проблема времени, возникающая в эффективной геометродинамике, вне рамок традиционных подходов решения этой проблемы. В первом и втором разделах данной работы проводится краткий обзор методов классического квантования Дирака-Уиллера-Де Витта и Арновитта-Дезера-Мизнера, согласно которым переменная времени может быть введена на основе квазиклассического приближения либо как параметр калибровочного условия. В заключительном разделе предлагается альтернативный способ решения проблемы времени.

Квантование Дирака-Уиллера-Де Витта

Классическое квантование общей теории относительности в рамках геометродинамического подхода было развито в работах Дирака, Уиллера, Де Витта [1, 3–6]. В рамках их подхода гамильтониан равен нулю, следствием чего является независимость физических состояний от времени. Проиллюстрируем формализм квантования Дирака-Уиллера-Де Витта для двумерного пространства (a, φ), где $a(x^0)$ – масштабный фактор заполненной однородным скалярным полем φ Вселенной с метрикой

$$dS^2 = N^2 (dx^0)^2 - a(x^0)^2 dl^2, \quad (1)$$

здесь $N(x^0)$ – функция, определяющая масштаб, в котором измеряется время; пространственный элемент длины равен

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (\sin^2(\vartheta) d\psi^2 + d\vartheta^2). \quad (2)$$