

СОЗДАНИЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ГЕНЕРАЦИИ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ WOLFRAM MATHEMATICA

*Е.В. Гнедаш, студентка гр.17В20,
научный руководитель: Чернышева Т.Ю., к.т.н., доцент
Юргинский технологический институт (филиал) Национального исследовательского
Томского политехнического университета
652055, Кемеровская обл., г. Юрга, ул. Ленинградская, 26
E-mail: sunshine9494@rambler.ru*

В статье рассматривается возможность применения пакета Wolfram Mathematica для решения заданий и создания автоматической генерации вариантов контрольных работ и ответов к ним по разделу математической дисциплины - линейная алгебра.

Использование компьютерных математических систем на занятиях оказывает существенное влияние на все компоненты целостного образовательного процесса, а именно позволяет:

1. Организовать творческую, исследовательскую деятельность учащихся. Возможности, предоставляемые программой (автоматизация вычислений, построение графиков, динамичное представление информации), позволят усилить мотивацию учения.

2. Реализовать связь теории с практикой (основой вычислительного эксперимента является математическое моделирование, геометрической базой – прикладная математика).

4. Способствовать формированию алгоритмической культуры учащихся.

5. Визуализировать учебную информацию, представить ее в виде графиков; показать геометрические объекты в динамике, проиллюстрировать процесс изменения геометрических объектов с изменением значений параметров.

6. Высвободить учебное время за счет выполнения на компьютере трудоемких вычислительных работ и деятельности, связанной с числовым анализом.

В качестве средства информационных технологий предлагается система компьютерной алгебры Wolfram Mathematica 9.0 – это мощная и эффективная компьютерная математическая система, позволяющая выполнять не только численные, аналитические и графические вычисления, но и гораздо большее: от моделирования и симуляции, визуализации, документации, до создания веб-сайтов. Система Mathematica имеет без малого 5 000 встроенных функций, покрывающих все области технических вычислений. При этом наиболее сильной стороной системы Mathematica по сравнению с другими приложениями является возможность проводить сложные символьные преобразования. Более того, по уровню использования графики Mathematica превосходит все имеющиеся к настоящему времени компьютерные математические системы. В США, Западной Европе и Японии Mathematica применяется в качестве базисной для построения курса математики во многих высших технических и гуманитарных учебных заведениях [1].

Для любого преподавателя существует проблема проверки знаний учащихся по своему предмету. Стандартной проверкой знаний учащегося обычно служит некоторая контрольная работа или тест. Создание большого количества схожих вариантов одной контрольной работы потребует огромного количества времени, особенно если снабдить каждого учащегося уникальным вариантом. В обычной группе студентов ВУЗа около 20 человек, даже если один вариант контрольной работы будет содержать всего 2 задания, то потребуются создать уже 40 задач. К тому же нужно помнить о том, что вся информация, в том числе и варианты контрольных работ, могут быстро распространиться в интернете и следующие группы студентов будут уже знать заранее все, что будет в контрольной, если, особенно, существует, например, всего 4 варианта некоторой контрольной работы, которые даются из года в год учащимся [2].

С помощью Wolfram Mathematica можно решить описанные проблемы, генерируя качественные задания вместе с ответами к ним в нужном количестве. При этом можно быть уверенным в том, что все задачи будут корректны, а ответы будут абсолютно точно верны.

Создадим вариант контрольной работы по линейной алгебре, который будет содержать 2 задачи:

1) методом Гаусса решить систему 3-х линейных уравнений с 4 неизвестными;

2) вычислить определитель 3-го порядка;

Задание 1. Методом Гаусса решить систему 3-х линейных уравнений с 4 неизвестными.

С помощью функции RandomInteger сгенерируем основную матрицу системы и вектор свободных членов. При этом пусть коэффициенты при неизвестных будут целыми числами в интервале [-4,4], а свободные члены – [-6, 6]:

```

A:=RandomInteger[{-4,4},{3,4}]
B:=RandomInteger[{-6,6},3]
{A,B}

Out[19]=
{{{ -3, -3, 0, 1}, {0, 3, -3, -2}, {0, -2, -3, 3}}, {-4, 1, 4}}

```

Рис. 1. Применение функции RandomInteger

Ввиду случайной генерации основной матрицы системы, возможна ситуация, когда некоторая строка (или строки) или некоторый столбец (столбцы) будут состоять только из нулей или в матрице будет несколько одинаковых строк или если все элементы столбца свободных членов будут нулями. Исключим возможность появлений таких ситуаций:

```

In[20]:=
A :=Block[{A,AGenerator},AGenerator:=RandomInteger[{-4,4},{3,4}];
A=AGenerator;
While[Length[DeleteDuplicates[A]]<Length[A]||Or@@(DeleteCases[#,0]=={}/@A)||
Or@@(DeleteCases[#,0]=={}/@Transpose[A]),A=AGenerator];A]
B:=Block[{B,BGenerator},BGenerator:=RandomInteger[{-6,6},3];
B=BGenerator;While[DeleteCases[B,0]=={}/@B,B=BGenerator];B]
{A,B}

Out[22]=
{{{4,-1,-4,3},{2,3,3,-3},{0,2,4,3}},{-3,1,-4}}

```

Рис. 2. Исключение возможности появления неблагоприятных ситуаций

Здесь были использованы функции:

- Apply в виде @@, применяет функцию, переданную в качестве первого аргумента, к параметрам, которые переданы вторым и третьим аргументом.
- SameQ, которая проверяет идентичность двух выражений, обычно употребляется в виде ==, т. е. SameQ[x, y] тоже что и x==y.
- Length[list] длина списка list
- Or[a, b] или a||b Логическое ИЛИ, (a ИЛИ b)
- Transpose[matrix] транспонирование матрицы matrix
- DeleteDuplicates[list] устранение повторяющихся элементов в списке list
- Функция DeleteCases[expr, pattern] будет нашим фильтром — она удаляет из списка expr все элементы, которые совпадают с образцом pattern[3].

Теперь построим систему линейных уравнений:

```

In[23]:=
system:=Thread[A.{x[1],x[2],x[3],x[4]}==B]
system

Out[24]=
{2 x[1]-x[2]-2 x[3]+2 x[4]==0,x[1]-x[2]-2 x[3]+2 x[4]==0,-4 x[1]-x[2]+2 x[3]-3 x[4]==2}

```

Рис. 3. Применение функции Thread к функциям, аргументами которых являются списки

В простейшем варианте Thread[func[args]] функция содержит всего один аргумент и в процессе вычисления применяет func к каждому элементу выражения args. Если выражение args включает в себя списки, то функция func будет применена не к спискам в целом, а к их элементам. Функция Thread, позволяет “распространить” функцию над всеми списками, которые входят в ее тело в качестве аргументов.

Теперь попробуем найти решение системы, это можно сделать с помощью функции Reduce, которая вычисляет значения переменных:

```
In[26]:= system
Out[26]:= {2 x[1]+4 x[2]+2 x[3]==6,-2 x[1]-3 x[2]-2 x[3]+3 x[4]==-2,2 x[2]+2 x[3]+4 x[4]==2}
In[29]:= Reduce[%, {x[1], x[2], x[3], x[4]}]
Out[28]:= x[2]==14/5-3 x[1]/5&&x[3]==-13/5+x[1]/5&&x[4]==2/5+x[1]/5
```

Рис. 4. Результат функции Reduce

Создадим функцию, которая будет выдавать задание в привычном виде:

```
In[31]:= task[2][system_]:=TraditionalForm[RowBoxes[RowBox[{"",GridBox[Transpose[{ToBoxes/@(system/.x[_]>xi)}]}]]]
In[33]:= task[2][system]
Out[33]/TraditionalForm=
{-x1+x2+3 x3+3 x4==6
 -3 x1+4 x3+3 x4==2
 -x1-4 x2-x3+2 x4==4}
```

Рис. 5. Применение функций TraditionalForm, RowBoxes, RowBox, GridBox, ToBoxes

Во введенной функции были использованы следующие встроенные выражения: функция TraditionalForm, позволяющая представить выражение в привычной математической нотации и функции RowBoxes, RowBox, GridBox, ToBoxes с помощью которых осуществляется низкоуровневое форматирование выражений.

Теперь создадим функцию, которая будет выдавать ответ в привычной форме:

```
answer[2][system_]:=TraditionalForm[Reduce[system,{x[1],x[2],x[3],x[4]}/.x[_]>xi]
system]
Out[37]:= {-4 x[1]+4 x[2]-2 x[3]-2 x[4]==-5,-2 x[2]+4 x[4]==-6,4 x[1]+4 x[2]-4 x[4]==4}
In[38]:= task[2][%]
Out[38]/TraditionalForm=
{-4 x1+4 x2-2 x3-2 x4=-5
 -2 x2+4 x4=-6
 4 x1+4 x2-4 x4=4}
In[39]:= answer[2][%%]
Out[39]/TraditionalForm=
x2=-2 x1-1^x3=5/2-x1^x4=-x1-2
```

Рис. 6. Ответ на задание 1 в привычной форме

Задание 2. Вычислить определитель 3-го порядка.

С помощью функции `RandomInteger` сгенерируем определитель третьего порядка с элементами, которые являются положительными целыми числами в интервале [2, 15]:

```
In[40]:= det:=RandomInteger[{2,15},{3,3}]
det

Out[41]:= {{9,13,15},{14,6,15},{8,8,3}}
```

Рис. 7. Применения функции `RandomInteger`

Наложим на генерируемую матрицу ограничения (отсутствие повтора одинаковых столбцов):

```
det :=Block[{det,detGenerator},detGenerator:=RandomInteger[{2,15},{3,3}];
det=detGenerator;While[Length[DeleteDuplicates[A]]<Length[det]||
Length[DeleteDuplicates[Transpose[A]]]<Length[Transpose[A]],det=detGenerator];det
det

Out[43]:= {{9,3,9},{3,13,6},{2,7,6}}
```

Рис. 8. Исключение возможности появления неблагоприятных ситуаций

Создадим функцию, которая будет выдавать задание в привычном виде (функция `Grid` позволяет сформировать таблицу):

```
In[44]:= task[3][det_]:=TraditionalForm[Abs[Grid[det]]]
task[3][det]

Out[45]/TraditionalForm=

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 13 \\ 4 & 3 & 11 \\ 9 & 6 & 14 \end{vmatrix}$$

```

Рис. 9. Применение функции `Grid`

Сделаем функцию, которая будет вычислять ответ (функция `Det` позволяет вычислить определитель произвольной квадратной матрицы, как символьно, так и численно) и проверим работоспособность функций на конкретном примере:

```
In[46]:= answer[3][det_]:=Det[det]
det

Out[47]:= {{5,5,10},{13,6,13},{13,14,5}}

In[48]:= task[3][%]

Out[48]/TraditionalForm=

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 13 & 6 & 13 \\ 13 & 14 & 5 \end{vmatrix}$$


answer[3][%%]

-88
```

Рис. 10. Применение функции `Det`

Используя созданные функции можно теперь создать один вариант контрольной работы:

```

In[119]:= variant:={task[2][#],answer[2][#]}&[system],
{task[3][#],answer[3][#]}&[det]
variant


$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 = -5 \\ -4x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -2 \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -2 \end{array} \right. \right\},$$


$$x_2 = -\frac{19x_1}{28} - \frac{11}{28}, x_3 = \frac{31x_1}{7} + \frac{1}{7}, x_4 = \frac{11}{14} - \frac{37x_1}{14},$$


$$\left\{ \left[ \begin{array}{ccc|c} 11 & 10 & 14 & \\ 6 & 5 & 9 & 50 \\ 8 & 3 & 13 & \end{array} \right], 50 \right\}$$


```

Рис. 11. Создание одного варианта контрольной работы

Теперь создадим столько разных вариантов, сколько человек в группе, например 20:

```

In[126]:= variants[n_]:=Block[{variants,variantsGenerator},
variantsGenerator:=Table[variant,{n}];
variants=variantsGenerator;
While[Total[Length[DeleteDuplicates[#]]&/@Transpose[variants[{:,:,:,1}]]]=n,
variants=variantsGenerator];variants]
variants[20]

Out[127]= 
$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} -4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \end{array} \right. \right\}, x_2 = \frac{x_1}{5} - \frac{2}{5}, x_3 = -\frac{5x_1}{6} - \frac{1}{3}, x_4 = \frac{19x_1}{60} - \frac{17}{15}, \left\{ \left[ \begin{array}{ccc|c} 11 & 12 & 10 & \\ 10 & 7 & 10 & 415 \\ 14 & 7 & 5 & \end{array} \right], 415 \right\},$$


$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = -3 \\ -2x_1 + x_3 - x_4 = -4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = -3 \end{array} \right. \right\}, x_2 = \frac{11x_1}{10} - 3, x_3 = \frac{27x_1}{20} - 2, x_4 = 2 - \frac{13x_1}{20}, \left\{ \left[ \begin{array}{ccc|c} 8 & 14 & 15 & \\ 14 & 13 & 10 & 86 \\ 8 & 9 & 7 & \end{array} \right], 86 \right\},$$


$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -6 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -5 \\ 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{array} \right. \right\}, x_2 = \frac{10x_1}{23} - \frac{16}{23}, x_3 = \frac{8x_1}{23} - \frac{45}{23}, x_4 = \frac{36}{23} - \frac{11x_1}{23}, \left\{ \left[ \begin{array}{ccc|c} 12 & 12 & 8 & \\ 8 & 10 & 14 & 448 \\ 11 & 8 & 13 & \end{array} \right], 448 \right\},$$


$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -6 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{array} \right. \right\}, x_1 = 1, x_2 = \frac{16}{5} - \frac{3x_3}{2}, x_4 = \frac{9}{5}, \left\{ \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 3 & \\ 15 & 7 & 7 & -623 \\ 11 & 14 & 15 & \end{array} \right], -623 \right\},$$


$$\left\{ \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 3x_2 - 4x_3 - 4x_4 = -2 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \end{array} \right. \right\}, x_2 = -\frac{69x_1}{114} - \frac{114}{114}, x_3 = \frac{12x_1}{114} + \frac{53}{114}, x_4 = \frac{67x_1}{114} + \frac{87}{114}, \left\{ \left[ \begin{array}{ccc|c} 11 & 2 & 12 & \\ 6 & 7 & 11 & -659 \\ & & & \end{array} \right], -659 \right\},$$


```

Рис. 12. Создание нескольких разных вариантов контрольной работы

После этого остается только экспортировать полученные варианты и ответы к ним, например, в TIFF и распечатать. Это можно сделать с помощью функции Export (функция NotebookDirectory дает адрес директории в которой сохранен текущий документ Mathematica).

После генерации, в данном случае картинок, остается их распечатать и разрезать на варианты. Теперь можно генерировать произвольное число качественных вариантов вместе с ответами к ним, при этом как все задачи, так и все ответы будут корректны.

На уроках математики использование компьютерных математических систем предполагает построение новой или изменение традиционной методической деятельности преподавателя. Использование компьютерных программных продуктов в учебном процессе предъявляет новые требования к профессиональным качествам и уровню подготовки педагогов, что определяет актуальность решения задач по формированию информационной культуры педагога.

Литература.

1. Wolfram Mathematica Наиболее полная система для современных технических вычислений в мире // [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.wolfram.com/mathematica/?source=nav>.
2. Русскоязычная поддержка Wolfram Mathematica // [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://wolframmathematica.ru/>.
3. Справочник по Wolfram Mathematica 7/8/9 // [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://kobrinuq.ru/mathematica>.