

Математика и механика.

Физика

УДК 514.76

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОЛЯХ ДВУМЕРНЫХ ПЛОЩАДОК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В ЭВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е.Т. Ивлев, А.С. Пшеничникова, В.А. Пилипенко

Томский политехнический университет
E-mail: AnkaBee@mail.ru

Изучаются поля пар соответствующих двумерных площадок m -плоскостей L_m и нормальных $(n-m)$ -плоскостей P_{n-m} распределения $\Delta_{n,m}^1$ в эвклидовом пространстве E_n . Доказывается существование конечного числа пар соответствующих площадок $L_2 \subset L_m$ и $P_2 \subset P_{n-m}$, характеризуемых наличием вполне определенных отображений этих площадок специального вида.

Введение

Распределения на погруженных многообразиях составляют один из важных разделов дифференциально-геометрических структур [1]. Одной из основных проблем распределения m -плоскостей L_m в n -мерном однородном пространстве является проблема оснащения [1]. Эта проблема для распределения m -плоскостей L_m в эвклидовом пространстве E_n является тривиальной, поскольку оснащающей плоскостью является $(n-m)$ -плоскость $P_{n-m} \perp L_m$. В этом случае возникает необходимость более детального изучения инвариантных геометрических образов, связанных с распределением m -плоскостей L_m в E_n .

Данная статья является продолжением статьи [2].

В первом пункте, посвященном аналитическому аппарату, приводятся некоторые аналитические результаты работы [2], которые используются в данной статье при изучении распределения $\Delta_{n,m}^1: A \rightarrow L_m$ в E_n .

В пункте 2 доказывается теорема о существовании в общем случае инвариантного поля пар двумерных площадок $L_2 \subset L_m$ и $P_2 \subset P_{n-m}$, $P_{n-m} \perp L_m$.

Третий пункт посвящен изучению некоторых специальных распределений и $\Delta_{n,m}^1$ в E_n .

Все рассмотрения в данной статье, как и в [2], носят локальный характер, а функции, встречающиеся в статье, предполагаются функциями класса C^∞ .

1. Аналитический аппарат

1.1. В n -мерном эвклидовом пространстве E_n , отнесенном к ортонормальному реперу $R = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$, $(i, j, k, l = \overline{1, n})$ с деривационными формулами и структурными уравнениями

$$\begin{aligned} d\bar{A} &= \omega^i \bar{e}_i, & d\bar{e}_i &= \omega_j^i \bar{e}_j, \\ D\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i, & D\omega_i^k &= \omega_j^i \wedge \omega_j^k, \\ \omega_i^j + \omega_j^i &= 0, & \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle &= \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j, \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

рассматривается распределение

$$\Delta_{n,m}^1: A \rightarrow L_m = (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m). \quad (2)$$

Здесь, как и в [2], символ $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ означает скалярное произведение векторов $\bar{x}, \bar{y} \in E_n$, а символ $L_p = (\bar{B}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p)$ обозначает p -мерная плоскость (p -плоскость) $L_p \subset E_n$, проходящая через точку $B \in E_n$ параллельно линейно независимым векторам $\bar{B}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$.

В соответствии с (1), (2) и [2. Ур. (6), (8), (9)] дифференциальные уравнения распределения $\Delta_{n,m}^1$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha^\alpha &= A_{\alpha i}^\alpha \omega^i, & \nabla A_{\alpha i}^\alpha &= A_{\alpha ij}^\alpha \omega^j, & A_{\alpha [ij]}^\alpha &= 0, \\ (i, j &= \overline{1, n}, \alpha, \beta, \gamma = \overline{1, m}; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1, n}). \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (1)-(3) и [2. Ур. (10), (11)] замечаем, что в пространстве E_n определено распределение:

$$\Delta_{n,n-m}^2: A \rightarrow P_{n-m} = (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}, \dots, \bar{e}_n) \perp L_m. \quad (4)$$

Из (1) и (3) следует, что

$$\omega_\alpha^\alpha = A_{\alpha i}^\alpha \omega^i = -\omega_\alpha^{\hat{\alpha}} \Rightarrow A_{\alpha i}^{\hat{\alpha}} = -A_{\alpha i}^{\hat{\alpha}}, \quad (5)$$

(см. [2. Ур. (11)]).

Замечание 1.1. Здесь и в дальнейшем предполагается, что m и n удовлетворяют неравенствам:

$$m \geq 2, \quad n - m \geq 2, \quad m < n.$$

1.2. Каждой точке $A \in E_n$ сопоставим в L_m и P_{n-m} следующие двумерные плоскости в соответствии с [2. Ур. (15), (16)]:

$$\begin{aligned} L_2^1 &= (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} x^{\alpha_1}, \\ x^{\hat{\alpha}} &= 0, \quad L_2^1 \subset L_m; \\ P_2^1 &= (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_{m+1}, \bar{\varepsilon}_{m+2}) \Leftrightarrow x^{\hat{\alpha}_2} = g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} x^{\alpha_2}, \\ x^{\alpha} &= 0, \quad P_2^1 \subset P_{n-m}, \\ \bar{\varepsilon}_{\alpha_1} &= \bar{e}_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} \bar{e}_{\hat{\alpha}_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{\alpha_2} = \bar{e}_{\alpha_2} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} \bar{e}_{\hat{\alpha}_2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где
$$\left(\begin{array}{l} \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 = 1, 2; \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\gamma}_1 = \overline{3, m}; \\ \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 = m+1, m+2; \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2, \hat{\gamma}_2 = \overline{m+3, n} \end{array} \right), \quad (7)$$

причем величины $g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}$ и $g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям [2. Ур. (14)]:

$$\nabla g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + \omega_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = g_{\alpha_1 i}^{\hat{\alpha}_1} \omega^i, \quad \nabla g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} + \omega_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} = g_{\alpha_2 i}^{\hat{\alpha}_2} \omega^i. \quad (8)$$

Заметим с учетом (1), (2), (4)–(7) и в соответствии с [2. Ур. (17)–(19)], что в точке $A \in E_n$ определяются следующие линейные подпространства:

$$\begin{aligned} L_{m-2}^2 &= (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_3, \dots, \bar{\varepsilon}_m) \perp L_2^1, \quad L_{m-2}^2 \subset L_m; \\ P_{n-m-2}^2 &= (\bar{A}, \bar{\varepsilon}_{m+3}, \dots, \bar{\varepsilon}_n) \perp P_2^1, \quad P_{n-m-2}^2 \subset P_{n-m}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\bar{\varepsilon}_{\alpha_1} = \bar{e}_{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} \bar{e}_{\hat{\alpha}_1}$, $\bar{\varepsilon}_{\alpha_2} = \bar{e}_{\alpha_2} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} \bar{e}_{\hat{\alpha}_2}$,

$$g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = -g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}, \quad g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} = -g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}. \quad (10)$$

2. Поля инвариантных плоскостей $L_i^1 \subset L_m$ и $P_i^1 \subset P_{n-m}$

2.1. В соответствии с [2. Ур. (27)] в каждой точке $A \in E_n$ определены при каждом фиксированном направлении $t \in E_n$:

$$t = (\bar{A}, \bar{e}_i) t^i \quad (11)$$

следующие отображения

$$\begin{aligned} F_t : L_2^1 &\rightarrow P_2^1 \Leftrightarrow y^{\alpha_2} = (G_{\alpha_i}^{\alpha_2} x^{\alpha_1} + \delta_i^{\alpha_2}) t^i, \\ \tilde{F}_t : P_2^1 &\rightarrow L_2^1 \Leftrightarrow x^{\alpha_1} = (G_{\alpha_i}^{\alpha_1} y^{\alpha_2} + \delta_i^{\alpha_1}) t^i, \end{aligned} \quad (12)$$

геометрически определенные в виде [2, (28)].

Здесь величины $G_{\alpha_i}^{\alpha_2}$ и $G_{\alpha_i}^{\alpha_1}$ в соответствии с [2. Ур. (20)] определяются по формулам:

$$\begin{aligned} G_{\alpha_i}^{\alpha_2} &= A_{\alpha_i}^{\alpha_2} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} A_{\alpha_i}^{\alpha_2} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} (A_{\alpha_i}^{\hat{\alpha}_2} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} A_{\alpha_i}^{\hat{\alpha}_2}), \\ G_{\alpha_i}^{\alpha_1} &= A_{\alpha_i}^{\alpha_1} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} A_{\alpha_i}^{\alpha_1} + g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} (A_{\alpha_i}^{\hat{\alpha}_1} + g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} A_{\alpha_i}^{\hat{\alpha}_1}), \end{aligned} \quad (13)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям [2. Ур. (21)].

В соответствии с определением 3.1, теоремой 3.1 и (27) в [2] имеем

$$F_t \rightarrow F_{t\alpha} \Leftrightarrow \tilde{F}_t \rightarrow \tilde{F}_{t\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} (G_{1i}^{m+1} - G_{2i}^{m+2}) t^i = 0; \\ (G_{2i}^{m+1} + G_{1i}^{m+2}) t^i = 0 \end{cases} \quad (14)$$

при каждом фиксированном направлении (11).

В соответствии с теоремой [2. Теорема 3.2] и [2. Ур. (29)–(31)] в точке $A \in E_n$ плоскостям $L_2^1 \subset L_m$ и $P_2^1 \subset P_{n-m}$ отвечает $(n-2)$ -плоскость

$$\Gamma_{n-2} \Leftrightarrow \begin{cases} (G_{1i}^{m+1} - G_{2i}^{m+2}) t^i = 0; \\ (G_{1i}^{m+2} + G_{2i}^{m+1}) t^i = 0, \end{cases} \quad (15)$$

как совокупность всех направлений (11), при которых $F_t \rightarrow F_{t\alpha} \Leftrightarrow \tilde{F}_t \rightarrow \tilde{F}_{t\alpha}$.

2.2. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Каждой точке $A \in E_n$ при $n > 4$ отвечает конечное число пар соответствующих плоскостей

$$L_2^1 = L_m \cap \Gamma_{n-2} \quad \text{и} \quad P_2^1 = P_{n-m} \cap \Gamma_{n-2} \quad (16)$$

таких, что $F_t \rightarrow F_{t\alpha}$, $\forall t \in \Gamma_{n-4} = L_{m-2}^2 \cup P_{n-m-2}^2$.

Доказательство. Из (9) и (10) с учетом (11)–(16) получаем, что

$$n_1 = 2(m-2) + 2(n-m-2) = 2(n-4)$$

величин $g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = -g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1}$ и $g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} = -g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2}$, определяющих искомые плоскости L_2^1 и P_2^1 в точке $A \in E_n$, удовлетворяют n_1 неоднородным алгебраическим уравнениям:

$$\begin{cases} \varphi_{\hat{\alpha}_1} \equiv (G_{1\alpha_1}^{m+1} - G_{2\alpha_1}^{m+2}) g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + G_{1\alpha_1}^{m+1} - G_{2\alpha_1}^{m+2} = 0; \\ \psi_{\hat{\alpha}_1} \equiv (G_{1\alpha_1}^{m+2} + G_{2\alpha_1}^{m+1}) g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} + G_{1\alpha_1}^{m+2} + G_{2\alpha_1}^{m+1} = 0; \\ \varphi_{\hat{\alpha}_2} \equiv (G_{1\alpha_2}^{m+1} - G_{2\alpha_2}^{m+2}) g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} + G_{1\alpha_2}^{m+1} - G_{2\alpha_2}^{m+2} = 0; \\ \psi_{\hat{\alpha}_2} \equiv (G_{1\alpha_2}^{m+2} + G_{2\alpha_2}^{m+1}) g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} + G_{1\alpha_2}^{m+2} + G_{2\alpha_2}^{m+1} = 0, \end{cases} \quad (17)$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha_1, \beta_1 = 1, 2; \quad \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1 = \overline{3, m}; \\ \alpha_2, \beta_2 = m+1, m+2; \quad \hat{\alpha}_2, \hat{\beta}_2 = \overline{m+3, n} \end{array} \right).$$

Рассмотрим якобиеву матрицу системы (17):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{\alpha}_1}}{\partial g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_1}}, & \frac{\partial \psi_{\hat{\alpha}_1}}{\partial g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_1}}, & \frac{\partial \varphi_{\hat{\alpha}_1}}{\partial g_{\beta_2}^{\hat{\alpha}_1}}, & \frac{\partial \psi_{\hat{\alpha}_1}}{\partial g_{\beta_2}^{\hat{\alpha}_1}} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{\alpha}_2}}{\partial g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_2}}, & \frac{\partial \psi_{\hat{\alpha}_2}}{\partial g_{\beta_1}^{\hat{\alpha}_2}}, & \frac{\partial \varphi_{\hat{\alpha}_2}}{\partial g_{\beta_2}^{\hat{\alpha}_2}}, & \frac{\partial \psi_{\hat{\alpha}_2}}{\partial g_{\beta_2}^{\hat{\alpha}_2}} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Подсчитаем ранг якобиевой матрицы (18) при следующих нулевых значениях величин:

$$g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = -g_{\alpha_1}^{\hat{\alpha}_1} = 0, \quad g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} = -g_{\alpha_2}^{\hat{\alpha}_2} = 0, \quad (19)$$

что с учетом (13) и (17) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} A_{1\alpha_1}^{m+1} - A_{2\alpha_1}^{m+2} &= 0, \quad A_{1\alpha_1}^{m+2} + A_{2\alpha_1}^{m+1} = 0, \\ A_{1\alpha_2}^{m+1} - A_{2\alpha_2}^{m+2} &= 0, \quad A_{1\alpha_2}^{m+2} + A_{2\alpha_2}^{m+1} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом (19), (20) и (13) следует, что в точке $A \in E_n$ при $n > 4$ в общем случае существует нижеследующий тождественно ненулевой минор порядка $n_1 = 2(n-4)$ матрицы (18):

$$B = \det \begin{bmatrix} A_{\beta_1 \hat{\alpha}_1}^{m+1} & -A_{\beta_1 \hat{\alpha}_1}^{m+2} & -A_{\beta_1 \hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_2} & A_{\beta_1 \hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_2} \\ A_{\beta_1 \hat{\alpha}_1}^{m+2} & A_{\beta_1 \hat{\alpha}_1}^{m+1} & -A_{\beta_1 \hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_2} & -A_{\beta_1 \hat{\alpha}_1}^{\hat{\beta}_2} \\ -A_{\beta_1 \hat{\alpha}_2}^{m+1} & A_{\beta_1 \hat{\alpha}_2}^{m+2} & A_{\beta_1 \hat{\alpha}_2}^{\hat{\beta}_2} & -A_{\beta_1 \hat{\alpha}_2}^{\hat{\beta}_2} \\ -A_{\beta_1 \hat{\alpha}_2}^{m+2} & -A_{\beta_1 \hat{\alpha}_2}^{m+1} & A_{\beta_1 \hat{\alpha}_2}^{\hat{\beta}_2} & A_{\beta_1 \hat{\alpha}_2}^{\hat{\beta}_2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Здесь $\hat{\alpha}_1 = \overline{3, m}$ – номера $(m-2)$ первых пар строк, $\hat{\alpha}_2 = \overline{m+3, n}$ – номера $(n-m-2)$ следующих пар строк, $\hat{\beta}_1 = \overline{3, m}$ – номера $(m-2)$ первых пар столбцов, $\hat{\beta}_2 = \overline{m+3, n}$ – номера $(n-m-2)$ следующих пар столбцов.

Поскольку определитель B порядка n_1 тождественно не равен нулю в точке $A \in E_n$, то система (17) в общем случае состоит из n_1 алгебраически независимых уравнений, а потому она допускает в общем случае конечное число решений относительно $g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_1} = -g_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_1}$ и $g_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_2} = -g_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_2}$.

Теорема 2.1 доказана.

Проведем в точке $A \in E_n$ такую канонизацию ортонормального репера $R = \{\bar{A}, \bar{e}_i\}$, при которой имеют место соотношения (20) и $B \neq 0$ (см. ур. (21)). Из [2. Ур. (21)] и (20) с учетом [2. Ур. (11)], (19), (20), (8) и $B \neq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_1} &= A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\hat{\alpha}_1} \omega^i, & \omega_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_2} &= A_{\hat{\alpha}_2 j}^{\hat{\alpha}_2} \omega^j, \\ \nabla A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\hat{\alpha}_1} &= A_{\hat{\alpha}_1 ij}^{\hat{\alpha}_1} \omega^j, & \nabla A_{\hat{\alpha}_2 j}^{\hat{\alpha}_2} &= A_{\hat{\alpha}_2 ij}^{\hat{\alpha}_2} \omega^j. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь явный вид величин $A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\hat{\alpha}_1}$ и $A_{\hat{\alpha}_2 j}^{\hat{\alpha}_2}$ для нас не существенен, причем в силу (1) имеем

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_1} &= -\omega_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_1} = -A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\hat{\alpha}_1} \omega^i \Rightarrow A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\hat{\alpha}_1} = -A_{\hat{\alpha}_1 i}^{\hat{\alpha}_1}, \\ \omega_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_2} &= -\omega_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_2} = -A_{\hat{\alpha}_2 j}^{\hat{\alpha}_2} \omega^j \Rightarrow A_{\hat{\alpha}_2 j}^{\hat{\alpha}_2} = -A_{\hat{\alpha}_2 j}^{\hat{\alpha}_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22) следует, что указанная канонизация ортонормального репера R , осуществленная по формулам (20) и $B \neq 0$, в соответствии с [3] существует на любом распределении $\Delta_{n,m}^1: A \rightarrow L_m$, на котором $B \neq 0$. В соответствии с Теоремой 2.1 эта канонизация репера с учетом (19), (16) и (9) геометрически характеризуется тем, что

$$\begin{aligned} L_2^1 &= (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2) \Rightarrow L_{m-2}^1 = (\bar{A}, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m), \\ P_2^1 &= (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}) \Rightarrow P_{n-m-2}^1 = (\bar{A}, \bar{e}_{m+3}, \dots, \bar{e}_n). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь плоскости L_2^1 и P_2^1 в точке $A \in E_n$ геометрически определены в Теореме 2.1. В случае $B=0$ эти плоскости определяются бесчисленным количеством способов. Естественно, этот случай из рассмотрения исключается при указанной канонизации ортонормального репера R .

3. Распределение $\Delta_{n,m}^{1n}$

Определение 3.1. Распределение

$$\Delta_{n,m}^1: A \rightarrow L_m \quad (25)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. – М.: ВИНТИ АН СССР, 1979. – С. 7–246.
2. Ивлев Е.Т., Пшеничникова А.С., Барышева В.К. О распределении многомерных плоскостей в евклидовом пространстве //

называется распределением $\Delta_{n,m}^{1n}$, если

$$F_t \rightarrow F_{ta}: L_2^1 \rightarrow P_2^1, \quad \forall t \in E_n. \quad (26)$$

Теорема 3.1. Распределение $\Delta_{n,m}^{1n}$ существует.

Доказательство. Из (14) в силу (3), (5), (13), (20), (25) и (26) получаем, что распределение $\Delta_{n,m}^{1n}$ характеризуется следующими дифференциальными уравнениями:

$$\omega_1^{m+1} - \omega_2^{m+2} = 0, \quad \omega_1^{m+2} + \omega_2^{m+1} = 0. \quad (27)$$

Рассмотрим распределение $\Delta_{n,m}^{0,1n}$, определяемое дифференциальными уравнениями (см. ур. (22), (23)):

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_1} &= 0, & \omega_{\hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_2} &= 0, & \omega_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_1} &= 0, & \omega_{\hat{\alpha}_2}^{\hat{\alpha}_2} &= 0, \\ \left(\begin{array}{l} \alpha_1 = 1, 2; \quad \hat{\alpha}_1 = \overline{3, m}; \quad \alpha_2 = m+1, m+2; \\ \hat{\alpha}_2 = \overline{m+3, n} \end{array} \right). \end{aligned} \quad (28)$$

Из (1) заключаем, что дифференциальные уравнения (28) замкнуты относительно операции внешнего дифференцирования. Поэтому распределение $\Delta_{n,m}^{0,1n}$ существует. Из (27) и (28) следует, что распределение $\Delta_{n,m}^{0,1n}$ является частным случаем распределения $\Delta_{n,m}^{1n}$. Следовательно, распределение $\Delta_{n,m}^{1n}$ существует.

Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. В случае распределения $\Delta_{n,m}^{0,1n}$ и только в этом случае ортогональные линейные подпространства (см. ур. (24)):

$$\begin{aligned} \Gamma_m^1 &= (\bar{A}, \bar{e}_{m+1}, \bar{e}_{m+2}, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m) = P_2^1 \cup L_{m-2}^{*2}, \\ \Gamma_{n-m}^2 &= (\bar{A}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_{m+3}, \dots, \bar{e}_n) = L_2^1 \cup P_{n-m-2}^{*2} \end{aligned} \quad (29)$$

изменяются параллельно самим себе.

Доказательство этой теоремы вытекает из (1), (24) и (29) с учетом (22) и (23).

Из теоремы 3.2 следует, что каждое из распределений

$$\tilde{\Delta}_{n,m}^1: A \rightarrow \Gamma_m^1; \quad \tilde{\Delta}_{n,n-m}^2: A \rightarrow \Gamma_{n-m}^2$$

в случае распределения является голономным в смысле [1].

Замечание 3.1. Из (28) с учетом (22) и (23) заключаем, что определитель (21) сохраняет свое значение как для общего распределения $\Delta_{n,m}^1$ в E_n , так и для распределений $\Delta_{n,m}^{1n}$ и $\Delta_{n,m}^{0,1n}$.

Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 310. – № 3. – С. 31–35.

3. Остиану Н.М. О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RNR) – 1962. – № 2. – P. 231–240.

Поступила 25.10.2007 г.