

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ АВТОРЕГУЛИРОВАНИЕМ ТИПА БАРБАШИНА

Р. Табышов, М.Ж. Нарматова

Институт социального развития и предпринимательства, г. Бишкек, Кыргызстан

E-mail: mashabat71@mail.ru

Приближенное решение интегро-дифференциального уравнения в частных производных с авторегулированием типа Барбашина строится методом осциллирующих функций, доказывается сходимость построенного процесса.

Введение

Многие задачи механики приводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных с авторегулированием. Этот раздел остается пока малоизученным. Доказаны только теоремы существования и единственности таких уравнений. В предлагаемой работе построено приближенное решение интегро-дифференциального уравнения в частных производных с авторегулированием типа Барбашина сочетанием методов последовательного приближения и осциллирующих функций, доказана сходимость построенного процесса к точному решению исходной задачи.

Основные результаты

В ряде работ Е.А. Барбашина и его учеников [1] обстоятельно изучались интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, когда операции дифференцирования и интегрирования проводились по различным аргументам. Такие уравнения называются уравнениями типа Барбашина. В упомянутых работах изучались разрешимость некоторых задач для уравнений типа Барбашина, устойчивость относительно постоянно действующих возмущений, существование решений с наперед заданными свойствами.

Вопросы приближенного решения дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Барбашина почти не разработаны.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение в частных производных с авторегулированием типа Барбашина вида

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = F[x,t,u(x,t),u(x,t-\tau(x,t,u(x,t))), \int_a^x K(x,t,s,u(s,t-\tau(s,t,u(s,t))))ds] \quad (1)$$

с условиями:

$$\begin{cases} u(x,t) = \phi(x,t), u(x,t) \in E_0 = [a,b] \times (-\infty, 0], \\ u(a,t) = u(b,t) = 0, \phi(a,0) = \phi(b,0) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где функции $F(x,t,u,v,w)$, $K(x,t,s,u)$, $\tau(x,t,u) \geq 0$ определены и имеют ограниченные частные производные по всем своим аргументам в области

$$D = \{a \leq x, s \leq b, 0 \leq t \leq T, |u| \leq r, |v| \leq r_1, |w| \leq r_2\},$$

а начальная функция $\phi(x,t)$ определена и имеет ограниченные частные производные в области $E_0 = [a,b] \times (-\infty, 0]$.

Вопросы существования и единственности решения подобных задач рассматривались Б. Шабыевым. Поэтому предположим, что решение задачи (1), (2) существует и единственно в области $E_0 \times D$.

Теорема.

1. Если функции $F(x,t,u,v,w)$, $K(x,t,s,u)$, $\tau(x,t,u) \geq 0$ определены и имеют ограниченные производные по всем аргументам в области D ;

2. Если начальная функция $\phi(x,t)$ определена и имеет ограниченные частные производные в области E_0 , тогда задача (1), (2) имеет единственное решение, которое можно построить сочетанием методов последовательных приближений и осциллирующих функций.

Приближенное решение будем строить сочетанием методов последовательных приближений и осциллирующих функций. Полагаем, что

$$u_0(x,t) = \phi(x,t) \text{ при } (x,t) \in [a,b] \times [0,T],$$

$$u_n(x,t), (n=1,2,\dots),$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = F \left[x,t,u_n(x,t),u_n(x,t-\tau(x,t,u_{n-1}(x,t))), \int_a^x K(x,t,s,u_n(s,t-\tau(s,t,u_{n-1}(s,t))))ds \right]$$

и условиям (2).

Каждое последовательное приближение $u_n(x,t)$ строим методом осциллирующих функций. Для этого отрезок $[0,T]$ разделим на N частей, причем в число точек деления включаем точки метода шагов, определяемые запаздыванием $\tau(s,t,u_{n-1}(s,t))$.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T, h = \max_k (t_{k+1} - t_k)$.

При $n=1$ из ур. (3) имеем:

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = F \left[x,t,u_1(x,t),u_1(x,t-\tau(x,t,u_0(x,t))), \int_a^x K(x,t,s,u_1(s,t-\tau(s,t,u_0(s,t))))ds \right], \quad (4)$$

с начальным условием $u_0(x, t) = \phi(x, t), (x, t) \in [a, b] \times [0, T]$.

В области $D_0 = [a, b] \times [0, t_1]$ приближенное решение (4) строим в виде осциллирующей функции, то есть

$$u_{n_0}(x, t) = a_0(x)t + b_0(x), (x, t) \in D_0. \quad (5)$$

Имеем $u_{n_0}(x, 0) = b_0(x) = \phi(x, 0)$. Функцию $a_0(x)$ найдем из условия осциллируемости по t невязки $\psi_0(x, t)$, которая получается при подстановке в уравнение (4) приближенного решения (5), т. е. из уравнения:

$$\int_0^{t_1} \psi_0(x, t) dt = 0.$$

Для нахождения $a_0(x)$ (5) подставляем в (4), тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} & a_0(x) - a_0''(x)t - b_0''(x) = \\ & = F \left[x, t, a_0(x)t + b_0(x), u_1(x, t - \tau(x, t, a_0(x)t + b_0(x))), \right. \\ & \left. \int_a^x K(x, t, s, u_1(s - \tau(s, t, a_0(t)s + b_0(t)))) ds \right] \end{aligned}$$

после некоторых выкладок получаем дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a_0''(x) = f(x, a_0(x), a_0'(x)) + R(x) \quad (6)$$

с условиями

$$a_0(a) = a_0(b) = 0, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} & f(x, a_0(x), a_0'(x)) = \\ & a_0(x) \left[1 - \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u} \right) \frac{\partial F}{\partial u} + \int_a^x \frac{\partial K}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u} \cdot \frac{\partial F}{\partial u} ds \right], \\ & R(x) = F \left[x, t, b_0(x), \phi(x, t - \tau(x, t, b_0(x))), \right. \\ & \left. \int_a^x K(x, t, s, \phi(s, t - \tau(s, t, b_0(s)))) ds \right]. \end{aligned}$$

Если краевая задача (6), (7) разрешима, и решение может быть построено точно, то в области D_0 : $u_{n_0}(x, t) = a_0(x)t + \phi(x, 0)$.

Если же краевая задача (6), (7) разрешима, но точное решение задачи затруднительно, то его можно решить одним из приближенных методов. Мы его строим приближенно методом осциллирующих функций и стрельбы, разбивая отрезок $[a, b]$ на L_0 частей и строя решение в виде:

$$\begin{aligned} & \tilde{a}_0(x) = \frac{A_0}{2}(x - x_0)^2 + B_0(x - x_0) + C_0, x_0 \leq x \leq x_1, \\ & \begin{cases} \tilde{a}_0(a) = 0, \\ \tilde{a}_0'(a) = \text{tg} \lambda. \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

При этом получается оценка погрешности:

$$|a_0(x) - \tilde{a}_0(x)| \leq k_0 h_0^2, h_0 = \max_i (x_{i+1} - x_i), k_0 = \text{const}.$$

В этом случае решением уравнения (4) в области D_0 будет:

$$\tilde{u}_{1n_0}(x) = \tilde{a}_0(x)t + \phi(x, 0). \quad (9)$$

Аналогично в области $D_k = [a, b] \times [t_k, t_{k+1}]$ приближенное решение строим в виде:

$$u_{1n_k}(x, t) = a_k(x)(t - t_k) + b_k(t), (x, t) \in D_k, \quad (10)$$

где $b_k = u_{1n_k}(x, t_k) = u_{1n_{k-1}}(x, t_k)$ в силу непрерывности приближенного решения. Функцию $a_k(x)$ найдем из условия осциллируемости по t невязки $\psi_k(x, t)$, которая получается при подстановке в уравнение (4) приближенного решения (13), то есть из уравнения:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(x, t) dt = 0.$$

Для нахождения $a_k(x)$ получим дифференциальное уравнение второго порядка вида:

$$a_k''(x) = f(x, a_k(x), a_k'(x)) \quad (11)$$

с краевыми условиями:

$$a_k(a) = a_k(b) = 0. \quad (12)$$

Если решение краевой задачи (11), (12) существует, но его построение затруднительно, то решение строим методом осциллирующих функций, сочетанием метода шагов. Для разности $|a_k(x) - \tilde{a}_k(x)|$ имеем:

$$\begin{aligned} & |a_k(x) - \tilde{a}_k(x)| \leq k_k h^2, h_k = \\ & = \max_i (x_{i+1} - x_i), i = 0, 1, \dots, L_k - 1. \end{aligned}$$

Итак, в области D_k , если краевая задача (11), (12) допускает точное решение, то

$$u_{kn_k}(x, t) = a_k(x)(t - t_k) + u_{k-1}(x, t),$$

если краевая задача (11), (12) решается методом осциллирующих функций, то

$$\tilde{u}_{kn_k}(x, t) = \tilde{a}_k(x)(t - t_k) + \tilde{u}_{kn_{k-1}}(x, t).$$

В предположении, что уравнение вида (11), (12) допускает точное решение, оценим погрешность приближенного решения. Обозначим через $w_n(x, t) = n_n(x, t) - n_{n_N}(x, t)$, где

$$u_{n_N}(x, t) = \begin{cases} u_{n_0}(x, t), x, t \in D_0, \\ u_{n_1}(x, t), x, t \in D_1, \\ \dots \\ u_{n_k}(x, t), x, t \in D_k, \\ \dots \\ u_{n_{N-1}}(x, t), x, t \in D_{N-1}. \end{cases}$$

Вычитая из уравнения (4) результат подстановки в него приближенного решения будем иметь:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} = \\ & = F_u w_n + F_v \left[w_n(x, t - \tau(x, t, w_{n-1})) + \frac{\partial w_{n_N}}{\partial t} \tau_n w_{n-1} \right] + \\ & + F_w \int_a^x \left[w_n + \frac{\partial w_n}{\partial t} \tau_u w_{n-1} \right] ds - \psi_{n_N}(x, t). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$P(x, t) = F_u w_n + F_v \left[w_n(x, t - \tau(x, t, w_{n-1})) + \frac{\partial w_{n-1}}{\partial t} \tau_n w_{n-1} \right] + F_w \int_a^x \left[w_n + \frac{\partial w_n}{\partial t} \tau_u w_{n-1} \right] ds.$$

Имеем:

$$w_n(x, t) = \int_a^x d\eta \int_a^b G(x, t, \xi, \eta) P(\xi, \eta) d\xi,$$

где $G(x, t, \xi, \eta)$ – функция Грина для уравнения

$$\frac{\partial w_n(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 w_n(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

с краевыми условиями: $w_n(a, t) = w_n(b, t) = 0$.

Оценивая, как обычно, невязку $\psi_{n_N}(x, t)$ получим, что $|\psi_{n_N}| \leq o(h^2)$.

Пусть теперь уравнение вида (14), (15) решается приближенно методом осциллирующих функций, то есть приближенное решение задачи будет иметь вид:

$$\tilde{u}_n(x, t) = \begin{cases} \tilde{u}_{n_0}(x, t), (x, t) \in D_0, \\ \tilde{u}_{n_1}(x, t), (x, t) \in D_1, \\ \text{-----} \\ \tilde{u}_{n_N}(x, t), (x, t) \in D_{N-1}. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронина Н.В., Маланин В.В., Рекка Р.А. Осциллирующие функции и некоторые их приложения. – Свердловск: Изд-во Уральского политехн. ин-та, 1990. – 111 с.
2. Шабыкеев Б. О применении метода замораживания для интегро-дифференциальных уравнений типа Барбашина с авторегулированием // В сб.: Исследование по интегро-дифферен-

В этом случае для разности $|u_n(x, t) - \tilde{u}_n(x, t)|$ имеем неравенства:

$$|u_{n_k} - \tilde{u}_{n_k}| \leq |a_k(x) - \tilde{a}_k(x)| \cdot |t - t_k| + |u_{n_{k-1}} - \tilde{u}_{n_{k-1}}| \leq (k_k h_k^2 + k_{k-1} h_{k-1}^2) \neq h, k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Всегда можно выбрать так, чтобы $h_k \leq h$, поэтому: $|u_{n_N}(x, t) - \tilde{u}_{n_N}(x, t)| \leq o(h^3)$.

Оценим теперь $|u(x, t) - u_n(x, t)|$. Вычитая из уравнения (1) почленно уравнение (3) и интегрируя от 0 до t , получаем оценку:

$$|u(x, t) - u_{n_N}(x, t)| \leq o(h^2) + o(h^3) + o\left(\frac{\Delta^n}{(1 - \Delta_1)^{n+1}}\right).$$

Из полученной оценки видно, что приближенное решение сходится к точному решению задачи (1), (2) при $h \rightarrow 0$.

Заключение

Применение предлагаемого метода сводится к определению коэффициента осциллирующей функции с помощью обыкновенного дифференциального уравнения с краевым условием, которое обобщает ранее известные результаты Н.В. Ворониной.

Предлагаемый метод применим и для решения различных классов уравнений в частных производных с авторегулированием.

циальным уравнениям / Под ред. А.И. Боташева. – Фрунзе: Илим, 1981. – С. 171–175.

3. Барбашин Е.А., Бисярина Л.П. Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений // Известия вузов. Математика. – 1963. – № 3. – С. 112–115.

Поступила 06.08.2007 г.