УДК 517.3

ДРОБНЫЙ АНАЛИЗ ПОРЯДКА 1/2 НА ОСНОВЕ ПОДХОДА АДАМАРА

В.А. Чуриков

Томский политехнический университет
E-mail: vachurikov@list.ru

Рассмотрены экспоненты, тригонометрические и гиперболические функции в дробном анализе порядка 1/2. Даны графики рассматриваемых функций.

В качестве модели дробного анализа рассмотрим ветвь рационального дробного анализа, в котором порядки дифференцирования и интегрирования принимают значения равные 1/2. Данный анализ представляет одну из рациональных ветвей дробного анализа, рассматриваемого в работе [1].

Ряд частной экспоненты $\exp_{1/2}x$ можно получить как частный случай из дробной экспоненты $\exp_s x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-1+ns}}{\Gamma(ns)}$, для порядка $s=1/2$.

Значения гамма-функций можно преобразовать, используя формулы $\Gamma(m+1)=m!$, $\Gamma(m+1/2)=\sqrt{\pi}(1.3.5...(2m-1))/2^m$, тогда для экспоненты $\exp_{1/2}x$ получим ряд

$$\exp_{1/2}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{-1+n/2}}{\Gamma(n/2)}=\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{x}{1!}+$$
$$+\frac{2^2x^{3/2}}{1\cdot3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot3\cdot5\sqrt{\pi}}+\frac{x^3}{3!}+\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\sqrt{\pi}}+$$
$$+\frac{x^4}{4!}+\frac{2^5x^{9/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\sqrt{\pi}}+...$$

Далее, перемножив числа в коэффициентах ряда, получим разложение в ряд

$$\exp_{1/2}x=\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{x}{1!}+\frac{4x^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+$$
$$+\frac{8x^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}+\frac{x^3}{3!}+\frac{16x^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{32x^{9/2}}{945\sqrt{\pi}}+...$$

Переписав вместе члены ряда с целыми и с дробными порядками, получим

$$\exp_{1/2}x=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}...\right)+$$
$$+\left(\begin{array}{l}\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^2x^{3/2}}{1\cdot3\sqrt{\pi}}+\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot3\cdot5\sqrt{\pi}}+\\+\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\sqrt{\pi}}+\frac{2^5x^{9/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\sqrt{\pi}}+...\end{array}\right).$$

В первой части получается экспонента $\exp x$, а во второй части стоит ряд, который обозначим как функцию $\xi_{1/2}x$.

Функцию $\xi_{1/2}x$ перепишем, выделив общий сомножитель $\pi^{-1/2}x^{1/2}$

$$\xi_{1/2}x=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{2^nx^{n-1}}{(2n+1)!!}=$$
$$=\sqrt{\frac{x}{\pi}}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x}+2+\frac{2^2x}{1\cdot3}+\frac{2^3x^2}{1\cdot3\cdot5}+\frac{2^4x^3}{1\cdot3\cdot5\cdot7}+\\+\frac{2^5x^4}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}+...+\frac{2^nx^{n-1}}{(2n+1)!!}+...\end{array}\right\}.$$

Тогда экспоненту $\exp_{1/2}x$, кратко можно записать как $\exp_{1/2}x=\exp x+\xi_{1/2}x$.

Легко убедиться, что функцию $\xi_{1/2}x$ можно получить из экспоненты $\exp x$, действуя на неё оператором дифференцирования $d^{-1/2}x$:

$$d^{-1/2}x\colon \exp x=\xi_{1/2}x.$$

Тогда будет справедлива формула $\exp_{1/2}x=\exp x+d^{-1/2}x\colon \exp x=(1+d^{-1/2}x)\exp x$.

Производная порядка 1/2 от функции $\xi_{1/2}x$ будет равна $d^{-1/2}x\colon\xi_{1/2}x=\exp x$.

Оператор дифференцирования $d^{-1/2}x$ должен переводить экспоненту $\exp_{1/2}x$ саму в себя. В этом можно легко убедиться почленным дифференцированием ряда:

$$d^{-1/2}x\colon \exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x.$$

Производную порядка 1/2 от экспоненты $\exp_{1/2}x$ можно найти, используя форму $\exp_{1/2}x=\exp x+\xi_{1/2}x$:

$$d^{-1/2}x\colon \exp_{1/2}x=d^{-1/2}x\colon(\exp x+\xi_{1/2}x)=\xi_{1/2}x+\exp x=\exp_{1/2}x.$$

Подействовав дважды оператором $d^{-1/2}x$ на экспоненту, $\exp_{1/2}x$, получим опять экспоненту $\exp_{1/2}x$:

$$d^{-1/2}x\colon d^{-1/2}x\colon \exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x.$$

Легко проверить, что производная первого порядка от экспоненты $\exp_{1/2}x$ не переводит её в саму себя, т. е., $d^{-1}x\colon\exp_{1/2}x\neq\exp_{1/2}x$.

Найдём производную $d^{-1}x\colon \exp_{1/2}x$. Вначале рассмотрим производную первого порядка $d^{-1}x\colon\xi_{1/2}x$

$$d^{-1}x:\xi_{1/2}(x)=-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot3\cdot5\sqrt{\pi}}+$$
$$+\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\sqrt{\pi}}+\frac{2^5x^{9/2}}{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\sqrt{\pi}}+...$$

Или окончательно получаем

$$d^{-1}x:\xi_{1/2}(x)=\xi_{1/2}(x)-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Это значит, что производная первого порядка $d^{-1}x\colon \exp_{1/2}x$ будет

$$d^{-1}x:\exp_{1/2}x=e^x+\xi_{1/2}(x)-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}=\exp_{1/2}x-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}.$$

Аналогично можно получить формулы для высших производных целочисленного порядка

$$d^{-2}x:\exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}},$$

$$d^{-3}x:\exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}}-\frac{3\cdot 5x^{-7/2}}{2^3\sqrt{\pi}},$$

$$\ldots$$

$$d^{-n}x:\exp_{1/2}x=\exp_{1/2}x+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i(2i-1)!!}{\sqrt{\pi}\,2^i}x^{-i-1/2}=$$

$$\exp_{1/2}x-\frac{x^{-3/2}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{3x^{-5/2}}{2^2\sqrt{\pi}}-\frac{3\cdot 5x^{-7/2}}{2^3\sqrt{\pi}}+\frac{3\cdot 5\cdot 7x^{-9/2}}{2^4\sqrt{\pi}}-$$

$$-\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9x^{-11/2}}{2^5\sqrt{\pi}}+\ldots$$

Расписав более подробно, получим

$$d^{-1}x:\exp_{1/2}x=d^{-1}x:\left(\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}\right)=$$

$$d^{-1}x:\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}\ldots\right)+$$

$$d^{-1}x:\left(\begin{array}{l}\frac{x^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2^2x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}+\frac{2^3x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}+\\ +\frac{2^4x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\frac{2^5x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}}+\ldots\end{array}\right).$$

Рассмотрим далее экспоненту с отрицательным аргументом $\exp_{1/2}(-x)$

$$\exp_{1/2}(-x)=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-x)^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(-1)^{n/2}x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=$$

$$=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{i^n x^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=$$

$$=\frac{(-x)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2(-x)^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}+\frac{4(-x)^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+$$

$$+\frac{8(-x)^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}-\frac{x^3}{3!}+\frac{16(-x)^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{32(-x)^{9/2}}{945\sqrt{\pi}}+\ldots=$$

$$-\frac{ix^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2ix^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}-\frac{4ix^{3/2}}{3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+\frac{8ix^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}-$$

$$-\frac{x^3}{3!}-\frac{16ix^{7/2}}{105\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{32ix^{9/2}}{945\sqrt{\pi}}+\ldots=$$

$$-\frac{i}{\sqrt{x\pi}}+1+\frac{2ix^{1/2}}{\sqrt{\pi}}-\frac{x}{1!}-\frac{4ix^{1/2}x}{3\sqrt{\pi}}+\frac{x^2}{2!}+\frac{8ix^{1/2}x^2}{15\sqrt{\pi}}-$$

$$-\frac{x^3}{3!}-\frac{16ix^{1/2}x^3}{105\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{32ix^{1/2}x^4}{945\sqrt{\pi}}+\ldots$$

Ряд для экспоненты с мнимой переменной $\exp_{1/2}ix$ будет

$$\exp_{1/2}ix=\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(ix)^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}=\frac{(ix)^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}+1+\frac{2(ix)^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{ix}{1!}+\frac{2^2(ix)^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}-\frac{x^2}{2!}+\frac{2^3(ix)^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{2^4(ix)^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{x^4}{4!}+\frac{2^5(ix)^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}}+\ldots=\frac{x^{-1/2}}{i^{1/2}\sqrt{\pi}}+1+\frac{2i^{1/2}x^{1/2}}{\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{ix}{1!}+\frac{2^2ii^{1/2}x^{3/2}}{1\cdot 3\sqrt{\pi}}-\frac{x^2}{2!}-\frac{2^3i^{1/2}x^{5/2}}{1\cdot 3\cdot 5\sqrt{\pi}}-\frac{ix^3}{3!}-$$

$$-\frac{2^4ii^{1/2}x^{7/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{\pi}}+\frac{x^4}{4!}+\frac{2^5ii^{1/2}x^{9/2}}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\sqrt{\pi}}+\ldots$$

На основе дробной экспоненты можно легко получить некоторые элементарные функции для ветви дробного анализа порядка s=1/2, в частности гиперболические и тригонометрические функции на основе формул, введённых в [1].

Для гиперболических синуса $\mathrm{sh}_{1/2}x$ и косинуса $\mathrm{ch}_{1/2}x$ порядка s=1/2 легко получить формулы

$$\mathrm{ch}_{1/2}x=\mathrm{ch}x+\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(x)+\xi_{1/2}(-x)),$$

$$\mathrm{sh}_{1/2}x=\mathrm{sh}x+\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(x)-\xi_{1/2}(-x)).$$

Для тригонометрических синуса $\sin_{1/2}x$ и косинуса $\cos_{1/2}x$ порядка s=1/2 будут следующие соотношения

$$\cos_{1/2}x=\cos x+\frac{1}{2}(\xi_{1/2}(ix)+\xi_{1/2}(-ix)),$$

$$\sin_{1/2}x=\sin x+\frac{1}{2i}(\xi_{1/2}(ix)-\xi_{1/2}(-ix)).$$

Другие гиперболические и тригонометрические функции, обозначения которых соответствуют общепринятым, только с нижним индексов s=1/2, указывающих на порядок ветви дробного анализа

$$\mathrm{th}_{1/2}x=\frac{\mathrm{sh}_{1/2}x}{\mathrm{ch}_{1/2}x},\ \mathrm{cth}_{1/2}x=\frac{\mathrm{ch}_{1/2}x}{\mathrm{sh}_{1/2}x},$$

$$\mathrm{sch}_{1/2}x=\frac{1}{\mathrm{ch}_{1/2}x},\ \mathrm{csch}_{1/2}x=\frac{1}{\mathrm{sh}_{1/2}x},$$

$$\mathrm{tg}_{1/2}x=\frac{\sin_{1/2}x}{\cos_{1/2}x},\ \mathrm{ctg}_{1/2}x=\frac{\cos_{1/2}x}{\sin_{1/2}x},$$

$$\sec_{1/2}x=\frac{1}{\cos_{1/2}x},\ \mathrm{cosec}_{1/2}x=\frac{1}{\sin_{1/2}x}.$$

Графики некоторых рассмотренных функций представлены на рис. 1–5, где для сравнения приведены графики функций традиционного анализа. Графики функций $\exp_{1/2}x$, $\exp x$, $\xi_{1/2}x$, $\exp_{1/2}(-x)$, $\exp(-x)$, $\xi_{1/2}(-x)$ даны на рис. 1. Графики функций $\sin_{1/2}x$, $\cos_{1/2}x$, $\sin x$, $\cos x$ изображены на рис. 2. Графики функций $\sec_{1/2}x$, $\mathrm{cosec}_{1/2}x$, $\sec x$, $\mathrm{cosec}x$ показаны на рис. 3. Графики функций $\mathrm{tg}_{1/2}x$, $\mathrm{tg}x$ представлены на рис. 4, *а* функций $\mathrm{ctg}_{1/2}x$, $\mathrm{ctg}x$ – на рис. 5.

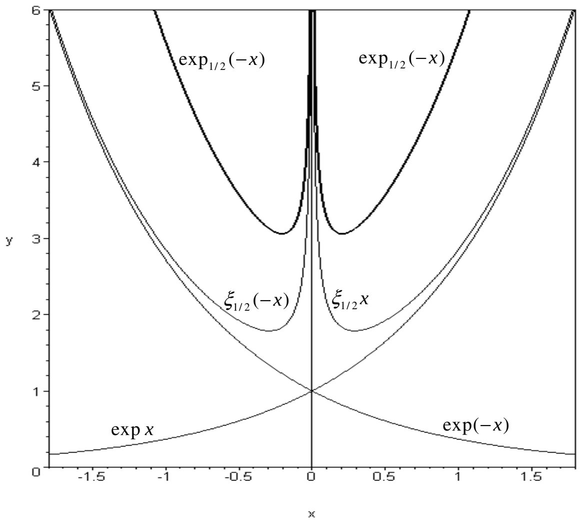

Рис. 1. *Графики функций* $exp_{1/2}x$, $exp_{1/2}(-x)$, $\xi_{1/2x}$, $\xi_{1/2}(-x)$, *exp x, exp(–x)*

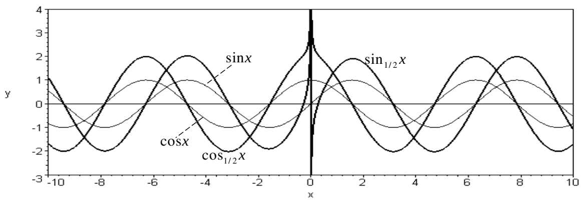

Рис. 2. *Графики функций* $sin_{1/2}x$, $cos_{1/2}x$, *sinx, cosx*

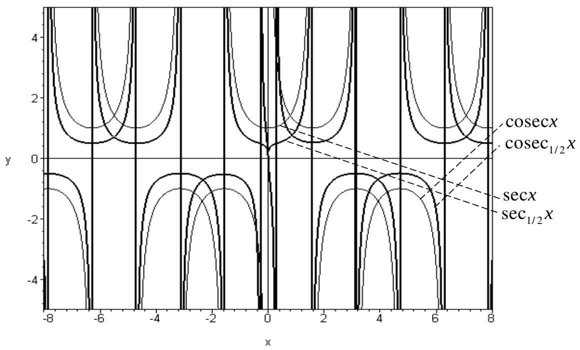

Рис. 3. *Графики функций* $sec_{1/2}x$, $cosec_{1/2}x$, *secx, cosecx*

Рассмотрим полиномы интегрирования порядка 1/2 $C_{1/2}(x)$, которые появляются при интегрировании функций оператором $d^{1/2}x$, а при дифференцировании дают ноль

$$C_{1/2}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{-n+1/2}=a_1x^{-1/2}+a_2x^{-3/2}+$$
$$+a_3x^{-5/2}+a_4x^{-7/2}+...+a_nx^{-n+1/2}+...$$

$$d^{-1/2}x{:}C_{1/2}(x)=0.$$

Неопределённый интеграл порядка 1/2 от некоторой функции $f(x)$ можно в общем виде записать

$$d^{1/2}x{:}f(x)=F^{(1/2)}(x)+C_{1/2}(x).$$

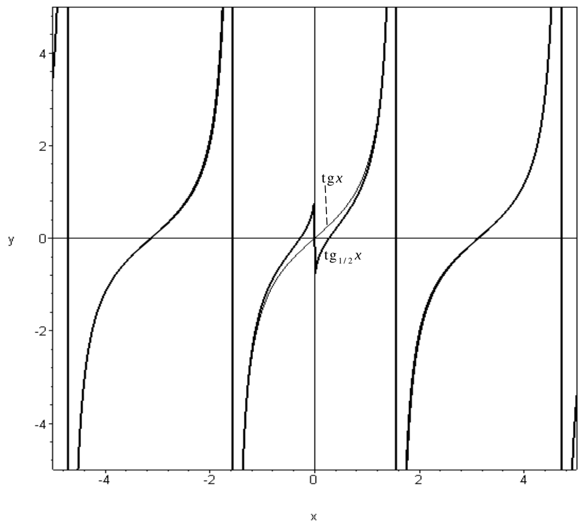

Рис. 4. *Графики функций* $tg_{1/2}x$, *tgx*

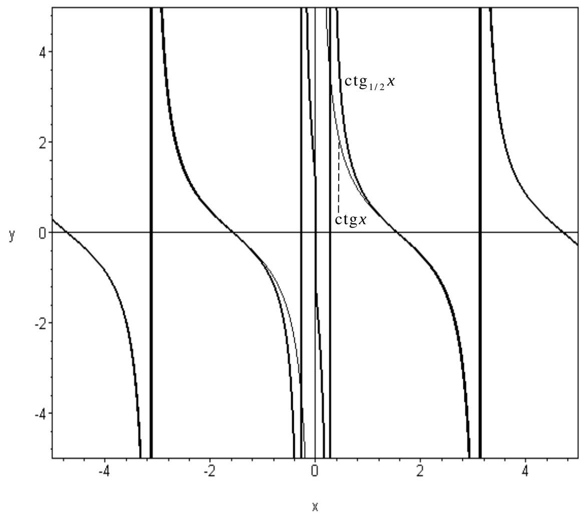

Рис. 5. *Графики функций* $ctg_{1/2}x$, *ctgx*

Здесь $F^{(1/2)}(x)$ – первообразная порядка 1/2 функции $f(x)$.

Подводя итоги, отметим, что элементарные функции в дробном анализе порядка 1/2 требуют более углубленных исследований, итоги которых будут приведены в последующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312. – № 2. – С. 16–20.

Поступила 07.11.2007 г.