

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕРВАЛОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА, ГАРАНТИРУЮЩИХ ЗАДАННУЮ РОБАСТНУЮ СТЕПЕНЬ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ

Т.А. Езангина

Томский политехнический университет

eza-tanya@yandex.ru

Введение

В теории робастного управления большое значение имеет теорема Харитонова, позволяющая оценивать устойчивость полиномов с коэффициентами, изменяющимися в известных интервалах. Для анализа робастной устойчивости необходимо вместо проверки бесконечного числа полиномов, проверить на устойчивость только четыре полинома Харитонова, составленных из крайних значений коэффициентов, чередующихся парами (два минимальных значения – два максимальных) [1]:

$$P_1(s) = \underline{p}_0 + \underline{p}_1 s + \overline{p}_2 s^2 + \overline{p}_3 s^3 + \dots,$$

$$P_2(s) = \underline{p}_0 + \underline{p}_1 s + \underline{p}_2 s^2 + \overline{p}_3 s^3 + \dots,$$

$$P_3(s) = \underline{p}_0 + \overline{p}_1 s + \underline{p}_2 s^2 + \underline{p}_3 s^3 + \dots,$$

$$P_4(s) = \underline{p}_0 + \overline{p}_1 s + \overline{p}_2 s^2 + \underline{p}_3 s^3 + \dots,$$

Очевидно, что для проектировщика систем управления важно получить не просто устойчивую систему, а систему с желаемым качеством функционирования. При этом заметим, что система может быть устойчивой, но время затухания ее переходных процессов может быть настолько велико, что практически данная система не может быть использована. Известно, что быстродействие системы определяется ее степенью устойчивости. Поэтому для разработки систем автоматического управления с интервальными параметрами представляет интерес задача определения интервалов коэффициентов характеристического полинома системы, при которых степень робастной устойчивости больше заданной, т.е. корни полинома лежат левее заданной вертикальной прямой при любых изменениях коэффициентов полинома. На рис. 1 показано отображение области изменения коэффициентов характеристического полинома на корневую плоскость для случая полинома с робастной степенью устойчивостью, большей η .

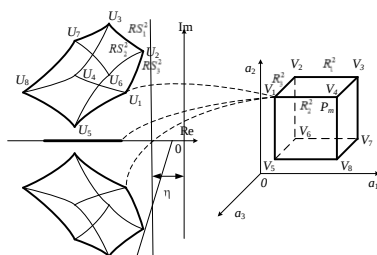


Рис. 1. Отображение многогранника коэффициентов

Определение допустимых диапазонов изменения коэффициентов характеристического полино-

ма позволяет решать задачу интервально-параметрического синтеза робастных регуляторов, чьи настраиваемые параметры линейно входят в коэффициенты характеристического полинома. Таким образом, задачей данной работы является разработка методики определения интервальных коэффициентов характеристического полинома, при которых их корни лежат левее вертикальной прямой, задающей робастную степень устойчивости.

Алгоритм определения интервалов коэффициентов полинома

Пусть задан интервальный полином:

$$P(s) = [p_n]s^n + [p_{n-1}]s^{n-1} + \dots + [p_0], \quad (1)$$

где $\underline{p}_i \leq p_i \leq \overline{p}_i$ ($\underline{p}_i$ - нижний предел, $\overline{p}_i$ - верхний предел). На основе коэффициентов p_i получены достаточные условия робастной устойчивости и робастной колебательности [1,2]. Эти условия используют показатели устойчивости λ_i и показатели колебательности δ_z [3]. Пусть в характеристическом полиноме (1) известны пределы не менее двух старших коэффициентов полинома (1). Используя достаточные условия робастной устойчивости и робастной колебательности, составим систему неравенств для определения неизвестных интервалов коэффициентов полинома

$$\begin{cases} \lambda_{i-1}^{**}(\eta) = \frac{\overline{p}_{i-1} \overline{p}_{i+2}}{(\underline{p}_i - \overline{p}_{i+1})(n-i-1)\eta)(\underline{p}_{i+1} - \overline{p}_{i+2})(n-i-2)\eta)} \leq \lambda^* \\ F_m(\eta) = \underline{p}_m - \overline{p}_{m+1}(n-m-1)\eta \geq 0, m=1, n-1 \\ F_0(\eta) = \underline{p}_0 - \overline{p}_1\eta + 2\underline{p}_2\frac{\eta^2}{3} \geq 0 \\ \delta_z = \frac{\underline{p}_z^2}{\overline{p}_{z-1}\overline{p}_{z+1}} \geq \delta_d, z=1, n-1, \end{cases}$$

(2)

В результате алгебраических преобразований, проведенных на основе системы (2), получим выражения для пределов коэффициентов p_i

$$\underline{p}_i^* = \frac{\lambda^* (\underline{p}_{i+1} - (n-i-1)\eta \underline{p}_{i+2})(\underline{p}_{i+2} - (n-i-2)\eta \underline{p}_{i+3})}{\overline{p}_{i+3}}, i=g, \dots, 0, g=n-k \quad (3)$$

$$\overline{p}_z = \frac{\underline{p}_{z+1}^2}{\delta_d \overline{p}_{z+2}}, z=g, g-1, \dots, 0, g=n-k \quad (4)$$

$$\underline{p}_i = \pm \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, i = g, g-1, \dots, 1, g = n-k$$

$$\alpha = 1; \beta = -\lambda^* \frac{\delta_d}{p_{i+2}} (\overline{p_{i+1}} (\underline{p_{i+1}} - (n-i-2)\overline{p_{i+1}})),$$

$$\gamma = -\lambda^* \frac{\delta_d}{p_{i+2}} ((n-i-1)\eta \overline{p_{i+1}}^2 (\underline{p_{i+1}} - (n-i-2)\eta \overline{p_{i+2}}))$$

$$(5)$$

$$\underline{p}_i = \overline{p_{i+1}}(n-i-1)\eta \geq 0, i = g, g-1; \dots, 0 \quad (6)$$

$$\underline{p}_0 = \overline{p_1}\eta - 2\underline{p_2} \frac{\eta^2}{3}, \quad (7)$$

На основе выражений (3) – (7) составлен алгоритм определения интервальных коэффициентов, гарантирующих робастную устойчивость интервального полинома. Блок-схема данного алгоритма приведена на рис. 3.

Алгоритм содержит следующие этапы:

1. Задание постоянных коэффициентов полинома, допустимого показателя робастной колебательности, робастной степени устойчивости.
2. Проверка выполнения условий (3), (4) при известных коэффициентах интервального полинома.
3. Решение (3), (4), нахождение максимальных значений p_i и выбор из них минимального значения p_i .
4. Решение (5), (6) и определение из них максимального значения p_i .

Применение алгоритма для интервально - параметрического синтеза робастного регулятора

■ Пусть система автоматического управления имеет объект управления

$$W_{oy} = \frac{b}{[a_5]s^5 + [a_4]s^4 + [a_3]s^3 + [a_2]s^2 + [a_1]s^1 + [a_0]},$$

где $[a_5] = [0.5; 1], [a_4] = [11.5; 12], [a_3] = [46.5; 47], [a_2] = [107.5; 108], [a_1] = [121; 122], [a_0] = [25; 50],$
 $b = 3.2$ и ПИД-регулятор $W_c(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s^1 + k_0}{s}$.

■ Требуется определить интервалы настроек ПИД-регулятора k_2, k_1, k_0 , при которых робастная степень устойчивости системы больше $\eta = 0.04$ и робастная колебательность ограничена значением $\delta_d = 1.3$.

■ Запишем интервальный характеристический полином данной системы

$$P(s) = [p_6]s^6 + [p_5]s^5 + [p_4]s^4 + [p_3]s^3 + [p_2(k_2)]s^2 + [p_1(k_1)]s^1 + [p_0(k_0)]$$

где $[p_6] = [a_5], [p_5] = [a_4], [p_4] = [a_3], [p_3] = [a_2], [p_2(k_2)] = [a_1] + b[k_2], [p_1(k_1)] = [a_0] + b[k_1], [p_0(k_0)] = b[k_0].$

■ Следуя разработанному алгоритму, определены пределы неизвестных коэффициентов полинома (1) $[p_0(k_0)], [p_1(k_1)] [p_2(k_2)]$. Из выражений коэффициентов $p_0(k_0), p_1(k_1) p_2(k_2)$ с помощью правил интервальной арифметики найдены пределы настроек ПИД-регулятора $k_0 = [1.4; 6.03]; k_1 = [5.33; 29.36]; k_2 = [2.4; 18.35].$

■ Таким образом, в рассматриваемой системе будет гарантироваться заданная робастная степень устойчивости при любых значениях параметров ПИД-регулятора из найденных диапазонов. Полученный результат проверен путем построения областей локализации корней интервального полинома (рис. 2).

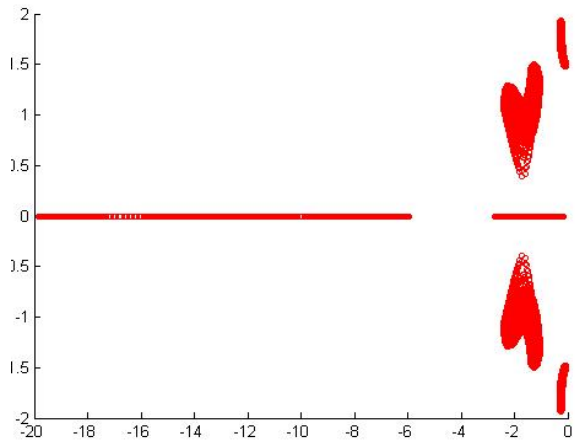


Рис. 2. Области локализации корней

Заключение

В работе на основе робастного расширения коэффициентного метода разработан алгоритм определения интервалов коэффициентов характеристического полинома, гарантирующих заданную робастную степень устойчивости. Данный алгоритм может быть использован для определения интервалов настроек робастных регуляторов. Эффективность алгоритма проверена на примере интервально-параметрического синтеза робастного ПИД - регулятора.

Литература

1. Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.– 303с.
2. S.A. Gayvoronskiy, T.A Ezangina. Bundled Software for the Desing of Interval Dynamic Systems. Applied Mechanics and Materials .Vols. 446 – 447 (2013), pp. 1217-1221.
3. S.A. Gayvoronskiy, T.A Ezangina. Robust control of complex dynamic units with interval parameters. Systems and Computer Science (ICSCS), 2013 2nd International Conference on 26-27 Aug. 2013, Villeneuve d'Ascq, France, PP.201-204.