

СИНТЕЗ ПИ-РЕГУЛЯТОРА ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ НИЗКОГО ПОРЯДКА

О.А. Ченкова, М.И. Пушкарёв
Томский Политехнический Университет
ox1992@bk.ru

Введение

В настоящее время существует множество методов синтеза систем автоматического управления (САУ). Известно, что при их проектировании инженерными методами стараются упростить их математические модели, пренебрегая малыми параметрами системы [1]. При этом основываются на том положении, что динамика любой САУ сколь угодно высокого порядка с допустимой степенью точности может быть описана динамикой системы второго-третьего порядка [2].

Существует большой класс САУ, в которых переходные процессы не допускают колебаний, т.е. должны быть аperiodическими. Таким образом, тематикой данной статьи является разработка методики синтеза линейного регулятора для систем низкого порядка, обеспечивающего в системе гарантированную динамику.

Постановка задачи

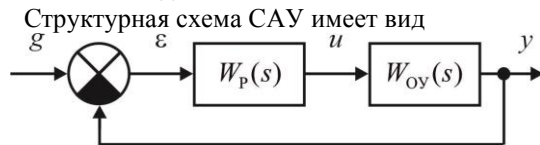


Рис. 1. Структурная схема САУ
где передаточная функция (ПФ) объекта управления $W_{oy}(s) = \frac{k}{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}$, а в качестве регулятора используется ПИ-регулятор $W_p(s) = \frac{k_1 s + k_0}{s}$,

где k_0 и k_1 – настраиваемые параметры регулятора.

Условием аperiodических переходных процессов является такое расположение полюсов, при котором ближайшим к мнимой оси является вещественный полюс, а область локализации свободных полюсов удалена на достаточное расстояние $\gamma = [\eta, \alpha]$, как показано на рис. 2.

Необходимо расположить вещественный полюс α замкнутой САУ в заданной точке комплексной плоскости, а оставшиеся свободные полюса левее границы η .

Разделение характеристического полинома на доминирующий и свободный

На основании ПФ объекта управления и регулятора характеристический полином замкнутой САУ может быть представлен в виде:

$$A(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0, \quad a_i > 0. \quad (1)$$

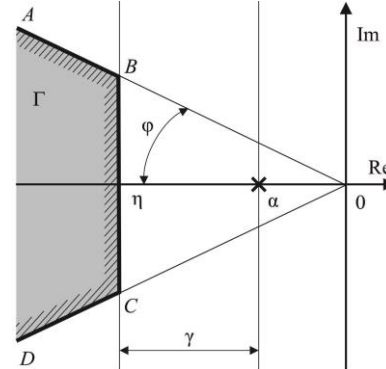


Рис. 2. Расположение доминирующего и свободных полюсов стационарной системы

Пусть минимальная степень устойчивости задается корнем $s = -\alpha$, который является решением полинома

$$Q(s) = s + \alpha. \quad (2)$$

Полином $Q(s)$ будем называть доминирующим полиномом.

Необходимо выделить полином $Q(s)$ из полинома (1), путем деления полинома (1) на полином (4) столбиком. При этом получается свободный полином вида:

$$P(s) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i s^i = p_2 s^2 + p_1 s + p_0, \quad p_i > 0, \quad (3)$$

корни которого будут являться свободными полюсами системы.

Также при делении столбиком получится остаток от деления

$$R = a_0 - \alpha p_0, \quad (4)$$

На основании приведенных выше выражений, характеристический полином САУ может быть представлен в виде $A(s) = Q(s)P(s) + R$.

Рассмотрим случай, когда характеристический полином замкнутой системы имеет порядок $n = 3$, тогда свободный полином имеет второй порядок. На основании решения квадратного уравнения получены аналитические выражения для двух типов расположения свободных полюсов САУ:

–свободные полюса системы вещественные

$$\begin{cases} p_1^2 - 4p_0 p_2 > 0; \\ p_0 \geq \eta p_1 - \eta^2 p_2, \end{cases} \quad (5)$$

–свободные полюса системы комплексно-сопряженные

$$\begin{cases} p_1^2 - 4p_0 p_2 < 0; \\ p_1 > 2\eta^2 p_2. \end{cases} \quad (6)$$

На основании полученных выражений были определены условия, связывающие параметры

ПИ-регулятора с параметрами объекта управления и параметром η (таблица 1).

Таблица 1. Условия расположения свободных полюсов

Вид полюсов	Условия для параметров регулятора
Вещественные	$k_1 < \frac{(c_1 - ac_2)^2 - 4c_2c_0 + 4ac_2(c_1 - ac_2)}{4c_2}$
	$k_1 > \alpha(c_1 - ac_2) + \eta(c_1 - ac_2) - \eta c_2 - c_0$
	$k_0(k_1) = \alpha(k_1 + c_0 - \alpha(c_1 - ac_2))$
Комплексно-сопряженные	$k_1 > \frac{(c_1 - ac_2)^2 - 4c_2c_0 + 4ac_2(c_1 - ac_2)}{4c_2}$
	$k_0(k_1) = \alpha(k_1 + c_0 - \alpha(c_1 - ac_2))$

Пример

Рассмотрим объект управления с ПФ $W_{\text{об}}(s) = \frac{1}{0,07s^2 + 4s + 1}$. Необходимо определить параметры ПИ-регулятора, обеспечивающие в системе доминирующий вещественный полюс $\alpha = 1$ и расположение свободных полюсов левее $\eta = 15$.

На основании условий из таблицы 1, а также ПФ объекта управления и значений α и η получим область допустимых значений параметра регулятора $k_1 \in [46,13; 58,090)$ для случая, когда свободные полюса системы – вещественные:

- при $k_1 = 46,13$ находим $k_0 = 43,2$, $s_1 = -1$, $s_2 = -15$, $s_3 = -41,143$;
- при $k_1 = 58,08$ находим $k_0 = 55,15$, $s_1 = -1$, $s_2 = -27,687$, $s_3 = -28,456$.

На рисунке 3 изображены переходные характеристики системы при различных значениях параметров регулятора. Так кривая 1 соответствует $k_0 = 43,2$, $k_1 = 46,13$, а кривая 2 – $k_0 = 55,15$, $k_1 = 55,15$. Кривая 1 определяет следующие прямые показатели качества системы $t_p = 1,31, c$, $\sigma = 4,58\%$; кривая 2 соответствует $t_p = 1,05, c$, $\sigma = 4\%$.

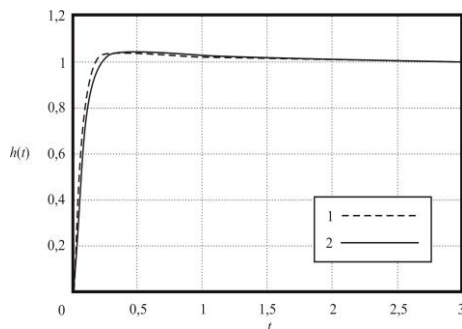


Рис. 3. Переходные характеристики системы (корни вещественные)

Заметим, что при выборе правой границы диапазона изменения параметра k_1 обеспечивается максимальная степень доминирования γ .

Теперь зададимся требованием, что корни свободного полинома должны быть комплексно-сопряженными. На основании условий из таблицы 1 получена область допустимых значений параметра регулятора $k_1 \in (58,090; \infty)$, причем

- при $k_1 = 58,1$ определяем $k_0 = 55,17$, $s_1 = -1$, $s_2 = -28,071 + 0,371j$, $s_3 = -28,071 - 0,371j$;
- при $k_1 = 100$ определяем $k_0 = 97,07$, $s_1 = -1$, $s_2 = -28,071 + 24,469j$, $s_3 = -28,071 - 24,469j$.

Видно, что при выборе значения параметра k_1 на левой границе его допустимого интервала выполняется условие комплексно-сопряженности свободных корней, а при увеличении k_1 степень доминирования γ остается прежней, но увеличивается степень колебательности системы.

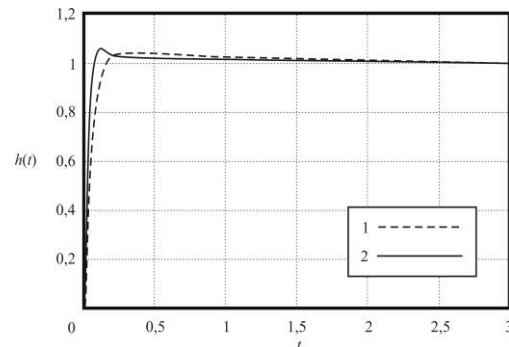


Рис. 4. Переходные характеристики системы (корни комплексно-сопряженные)

Прямые показатели качества: для случая 1 – $t_p = 1,05, c$, $\sigma = 4\%$; для случая 2 – $t_p = 0,452, c$, $\sigma = 5,57\%$.

Заключение

Значимость данной работы заключается в том, что её можно использовать в качестве примера к решению задач подобного типа, а полученные условия синтеза параметров ПИ-регулятора достаточно просты для создания на их основе программного обеспечения и применения в инженерной практике.

Литература

- Абдуллин, А.А. Анализ робастности неадаптивной системы управления электропривода с вариациями структуры и параметров / А.А. Абдуллин, В.Н. Дроздов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2012. – № 6. – С. 40-44.

Райцын, Т.М. Синтез систем автоматического управления методом направленных графов. / Т.М. Райцын – Л.: Энергия, 1970. – 96 с