

## ПРИМЕНЕНИЕ КОГЕРЕНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ИНФОРМАТИВНОСТИ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

В.А. Фаерман

Научный руководитель: Аврамчук В.С.  
Томский Политехнический Университет

[fcsevladfaerman@gmail.com](mailto:fcsevladfaerman@gmail.com)

Одной из важнейших проблем цифровой обработки сигналов (ЦОС) является установление степени линейной взаимосвязи между двумя выборками отсчетов дискретизированных сигналов. Определения степени взаимосвязи требуют такие задачи (ЦОС) как прием зашумленного сигнала, оценка эффективности цифровой фильтрации, идентификация технических объектов и другие [1].

В частности, для выявления характера схожести сигналов во временной области находят применение корреляционный анализ. На практике [2], корреляционная функция двух оцифрованных сигналов, представленных последовательностями  $s_A(i)$ ,  $s_B(i)$   $i = 0, 1, 2, \dots, N - 1$  вычисляется согласно

$$r_{AB}(j) = \frac{1}{N_0} \cdot F_D^{-1} [F_D^*(s_A(i)) \cdot F_D(s_B(i))], \quad (1)$$

где  $F_D(\cdot)$  - оконное дискретное преобразование Фурье (ДПФ);  $F_D^*(\cdot)$  - комплексно-сопряженное представление результатов оконного дискретного преобразования Фурье;  $N_0$  - ширина окна преобразования [1].

Для ускорения производимых согласно (1) вычислений, для ДПФ используют алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), что накладывает ограничение на  $N_0$  [3]. Другим фактором ограничивающим ширину окна является объём памяти ЭВМ производящей вычисления. В связи с этим, как правило, приемлемая ширина окна ( $N_0$ ) оказывается значительно меньшей по сравнению с объёмом имеющейся выборки сигналов ( $N$ ), то есть имеет место соотношение  $N_0 \ll N$ . В таком случае, для того, чтобы задействовать при анализе как можно больший объём имеющихся данных, всю выборку разбивают на  $Q$  последовательных интервалов шириной  $N_0$ , в соответствии с соотношением  $Q = \text{floor}\left(\frac{N}{N_0}\right)$ .

где  $\text{floor}(\cdot)$  - обозначение целочисленного деления с округлением в меньшую сторону. Далее для каждого из  $Q$  интервалов производится вычисление корреляционной функции согласно (1), а результирующая функция получается усреднением:

$$r_{AB}(j) = \frac{1}{Q \cdot N_0} \sum_{q=0}^{Q-1} F_D^{-1} [F_D^*(s_A(i)) \cdot F_D(s_B(i))]. \quad (2)$$

Стоит отметить, что для применения (2), частотные характеристики сигналов не должны значительно изменяться [2], в течение всего времени

наблюдения  $T = \Delta \cdot N$ , где  $\Delta$  - интервал дискретизации.

Известным недостатком корреляционного анализа осуществляемого с помощью (1) или (2) является невозможность извлечения из результирующей функции информации о частотной локализации взаимозависимых составляющих исследуемых сигналов. Для установления взаимосвязанности сигналов в частотной области находят применение когерентный анализ.

Функция когерентности получила распространение в 20-ом веке как аналог функции корреляции Пирсона в частотной области [1]. Для получения функции когерентности находили применение различные выражения, различающиеся способом усреднения спектров в числителе и знаменателе, наиболее распространенным из которых [4] в настоящее время является

$$\gamma^2(k) = \frac{\left| \sum_{q=0}^{Q-1} P_{ABq}(k) \right|^2}{\sum_{q=0}^{Q-1} P_{AAq}(k) \sum_{q=0}^{Q-1} P_{BBq}(k)}, \quad (3)$$

где  $\gamma^2(k)$  - квадрат функции когерентности;  $P_{AB}(k)$ ,  $P_{AA}(k)$ ,  $P_{BB}(k)$  - соответственно взаимный мгновенный спектр и собственные мгновенные спектры сигналов, которые могут быть получены по формулам приведенным далее:

$$P_{AB}(k) = F_D^*(s_B(i)) \cdot F_D(s_A(i))$$

$$P_{AA, BB}(k) = \left| F_D(s_{A, B}(i)) \right|^2.$$

Квадрат функции когерентности принимает значения в диапазоне  $[0, 1]$  и отражает степень линейной взаимосвязи гармонических компонент анализируемых сигналов. Таким образом, корреляционный и когерентный анализ взаимодополняют друг друга и часто применяются совместно при решении практических задач [4].

В [5] был предложен альтернативный способ корреляционного анализа, позволяющий не только обнаруживать взаимную связь сигналов во временной области, но и определять диапазон частот, в котором она наблюдается. Данный метод получил название частотно-временного корреляционного анализа.

Получение частотно-временной корреляционной функции, сводится к вычислению корреляционных функций для  $M$  различных частотных интервалов сигналов, что может быть упрощенно представлено в виде последовательности действий [5]:

$$I: P_{AB}(k) = X_B^*(k) \cdot X_A(k);$$

II:  $B_k^m = P_{AB}(k) \cdot w_k^m$ , где  $w_k^m$  - оконная функция, определенная следующим образом

$$w_k^m = \begin{cases} 1, & \frac{m}{M} < \frac{k}{K} \leq \frac{m+1}{M} \\ 0, & \frac{m}{M} \geq \frac{k}{K} > \frac{m+1}{M} \end{cases}$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ,  $K$  - количество отсчетов в дискретном спектре сигнала, определяющееся шириной окна ДПФ (при использовании стандартных алгоритмов БПФ  $K = 2^{n-1} + 1$ ); III:  $Z^m(j) = \frac{1}{N_0} \cdot F^{-1}[B^m]$ ; IV:  $r^{tf}(m, j) = \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} Z^m(j)$ .

Примерный вид графика частотно-временной корреляционной функции представлен на рисунке 1. Видно, что частотно-временная корреляционная функция представляет собой поверхность простирающуюся над плоскостью, образованной осями частоты ( $f$ , кГц) и задержки ( $\tau$ , мс) [5]. Несмотря на то, что по виду поверхности может быть определено не только наличие взаимосвязи между сигналами, но и частотный диапазон локализации коррелирующих компонент, метод частотно-временного корреляционного анализа не учитывает информацию о когерентности сигналов.

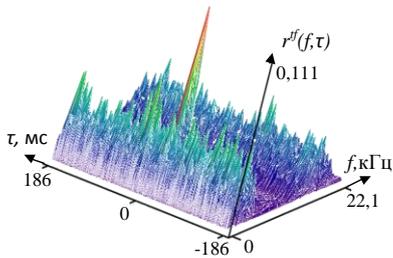


Рис. 1. График частотно-временной корреляционной функции

Для устранения последнего недостатка предлагается осуществлять домножение частотно-временной корреляционной функции на функцию когерентности, тем самым дополнительно выделяя на поверхности частотный интервал, содержащий взаимосвязанные гармонические компоненты сигналов. Для этого удобно представлять значения частотно-временной корреляционной функции в виде матрицы

$$r^{tf}(m, k) = R = \begin{pmatrix} r_{0,0} & \dots & r_{0,k} & \dots & r_{0,K-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m,0} & \dots & r_{m,k} & \dots & r_{m,K-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{M-1,0} & \dots & r_{M-1,k} & \dots & r_{M-1,K-1} \end{pmatrix},$$

а значения функции когерентности в виде вектора

$$\Gamma = (\gamma_0 \quad \dots \quad \gamma_m \quad \dots \quad \gamma_{M-1}).$$

Однако функция когерентности, вычисляемая по (3), содержит  $K$  отсчетов, в то время как вектор  $\Gamma$  должен содержать  $M$  отсчетов. Причем значение  $M$  соответствует количеству различаемых частотных интервалов частотно-временной корреляционной функции и во многом определяет объем производимых при ее вычислении операций. В

связи с этим, можно считать справедливым соотношение  $K \gg M$ . В связи с этим, элементы вектора  $\Gamma$  нуждаются в вычислениях, которые могут быть произведены согласно выражению

$$\gamma_m = \left[ \sum_{k=\underline{k}_m}^{\bar{k}_m} P_{AB}(k) \cdot \sqrt{\gamma^2(k)} \right] / \left[ \sum_{k=\underline{k}_m}^{\bar{k}_m} P_{AB}(k) \right],$$

где границы интервала  $[\underline{k}_m, \bar{k}_m]$  определяются как  $\underline{k}_m = \text{floor}(\frac{m \cdot (K-1)}{M})$  и  $\bar{k}_m = \text{floor}(\frac{[m+1] \cdot (K-1)}{M})$ .

С учетом обозначений введенных ранее, выражение для вычисления частотно-временной корреляционной функции учитывающей степень когерентности исследуемых сигналов, примет вид

$$\hat{r}^{tf}(m, k) = \gamma_m \cdot r_{m,k}. \quad (4)$$

График функции полученной с помощью (4) представлен на рисунке 2. При вычислениях использовались те же данные, на основании которых был получен рисунок 1. Сравнивая рисунки можно сделать вывод о том, что функция  $\hat{r}^{tf}(m, k)$  более информативна, так как имеет ярче выраженный корреляционный пик и отчетливо выделяющийся участок спектра, содержащий коррелирующие гармонические компоненты сигналов.

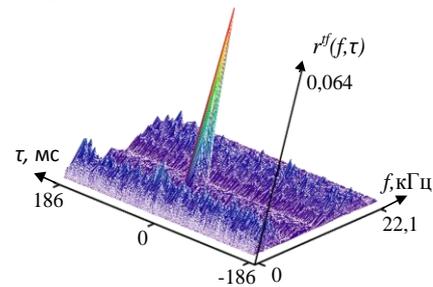


Рис. 2. График частотно-временной корреляционной функции с учетом когерентности

#### Список использованных источников

1. Марпл мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. - М.: "Мир", - 1990. - 584 с.
2. Аврамчук В. С., Гончаров В. И., Чан Вьет Тъяу. Привлечение информации о частотных свойствах сигналов при корреляционном анализе // Наука и технологии, Миасс, 15-17 июня. - 2010. - С. 69-71.
3. Аврамчук В. С., Лунева Е. Е., Черемнов А. Г. Способы повышения эффективности вычисления быстрого преобразования Фурье // Интернет-журнал «Наукоедение» [Электронный ресурс] - 2013. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/16tvn313.pdf> (последнее обращение 14.04.2014)
4. Аврамчук В.С., Чан В. Т., Гончаров В. И. Частотно-временной корреляционный анализ в задачах определения координат утечек в трубопроводах // Известия ТПУ. - 2010. - Т. 317 - С. 70-73.
5. Аврамчук В. С., Чан В. Т. Частотно-временной корреляционный анализ цифровых сигналов // Известия ТПУ - 2009. - № 5. - Т. 315 - С. 112-115.