

**ОДНОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ФИШЕРА–КОЛМОГорова–ПЕТРОВСКОГО–ПИСКУНОВА
С НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ И АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИЕЙ**

А.А. Прозоров

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Россия, г.Томск, пр. Ленина, 30, 634050
E-mail: prozorov_a_a@mail.ru

**NONLOCAL ONE-DIMENSIONAL FISHER–KOLMOGOROV–PETROVSKII–PISKUNOV
EQUATION WITH ABNORMAL DIFFUSION**

A.A. Prozorov

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
E-mail: prozorov_a_a@mail.ru

Analytical solutions are constructed for the nonlocal space fractional Fisher–Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation with abnormal diffusion. Such solutions allow us to describe quasi-steady state patterns. Special attention is given to the role of fractional derivative. The resulting solutions spread faster than the classical solutions and may exhibit asymmetry, depending on the fractional derivative used. Results of numerical simulations and properties of analytical solutions are presented. Influence of the fractional derivative on patterns ordered in space and time is discussed.

Эволюция популяций микроорганизмов одного вида с эффектами дальнего действия моделируется нелокальными обобщениями классического уравнения Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова (ФКПП) [1, 3], которое для плотности распределения популяции $u(x, t)$ в одномерном случае имеет вид

$$u_t(x, t) = D\Delta u(x, t) + au(x, t) - bu^2(x, t). \quad (13)$$

Здесь D – постоянный коэффициент диффузии, процесс производства популяции происходит с постоянным темпом роста a и квадратичными по плотности конкурентными потерями с коэффициентом b .

В обобщенном уравнении ФКПП локальные квадратичные потери $bu^2(x, t)$ заменяются интегральным выражением $u(x, t) \int_{-1}^1 b_\gamma(x, y)u(y, t)dy$, учитывающим нелокальные взаимодействия в популяции посредством функции влияния $b_\gamma(x, y)$. Параметр γ характеризует эффективную область взаимодействия между особями популяции так, что при $\gamma \rightarrow 0$ справедливо $b_\gamma(x, y) \rightarrow b\delta(x - y)$, а нелокальные потери переходят в локальные $bu^2(x, t)$. Уравнение ФКПП с учетом квадратичных нелокальных потерь на отрезке $[-1, 1]$

$$u_t(x, t) = Du_{xx}(x, t) + au(x, t) - \chi u(x, t) \int_{-1}^1 b_\gamma(x, y)u(y, t)dy. \quad (2)$$

Нелокальное уравнение ФКПП позволяет при соответствующем выборе параметров уравнения описать процесс образования структур, возникающих за счет нелокальных конкурентных потерь и

диффузии.

Рассмотрим уравнение (2) с разностным ядром $b_\gamma(x, y) = b_\gamma(x - y)$, $b_\gamma(x)$ предполагается четной:

$$u_t(x, t) = Du_\alpha(x, t) + au(x, t) - \chi u(x, t) \int_{-1}^1 b_\gamma(x - y) u(y, t) dy, \tag{3}$$

где α – порядок дробной производной. Разложим функцию $b_\gamma(x)$ и $u(x, t)$ в ряд Фурье запишем

$$b_\gamma(x - y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m e^{im\pi(x-y)/l}, \quad b_m = \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 b(\tau) e^{-im\pi\tau/l} d\tau.$$

$$u(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(t) e^{ik\pi x/l}, \quad \beta_k(t) = \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 u(z, t) e^{-ik\pi z/l} dz. \tag{4}$$

Тогда для формулы (4) $u_\alpha(x, t)$, согласно [2], будет определяться как

$$u_\alpha(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{ik\pi}{l} \right)^\alpha \beta_k(t) e^{ik\pi x/l}, \quad i^\alpha = e^{i\pi\alpha/2}.$$

Теперь продифференцируем по времени соотношение (4), выразив $u_t(x, t)$ с учетом уравнения (3), получим

$$D \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(t) \left(\frac{ik\pi}{l} \right)^\alpha e^{ik\pi x/l} \right) + a \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k(t) e^{ik\pi x/l} - \chi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \beta_{k-j} b_{k-j} \beta_j, \quad k = \overline{-\infty, \infty}. \tag{5}$$

Будем искать коэффициенты β_j в виде $\beta_j(t) = \beta_0(t) \delta_{j0}$. Получим

$$D \beta_0(t) + a \beta_0(t) - \chi \beta_0^2(t) b_0. \tag{6}$$

Решение уравнения (6), с учетом начальных условий $\beta_j|_{t=0} = \beta_{00} \delta_{j0}$,

$$\beta_0(t) = \frac{\beta_{00} e^{at}}{1 + \frac{\chi b_0 \beta_{00}}{a} (e^{at} - 1)}. \tag{7}$$

Теперь решения уравнения (5) β_j ищем в виде

$$\beta_j(\theta, \tau, T) = \beta_j^{(0)}(\theta, \tau) + \frac{1}{T} \beta_j^{(1)}(\theta, \tau) + \dots = \phi(\tau) T, \tag{8}$$

где $\beta_j^{(0)}$ определяется (7). Разложение (8) с учетом (4) индуцирует разложение

$$u(x, t) = u^{(0)}(x, t) + \frac{1}{T} u^{(1)}(x, t), \tag{9}$$

С учетом правила дифференцирования сложной функции запишем

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = \varphi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

В результате система (5) примет вид

$$\left[\varphi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \left(\beta_j^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_j^{(1)} + \dots \right) = \bar{a}_j \left(\beta_j^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_j^{(1)} + \dots \right) - \chi \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p \left(\beta_{j-p}^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_{j-p}^{(1)} + \dots \right) \left(\beta_p^{(0)} + \frac{1}{T} \beta_p^{(1)} + \dots \right),$$

$$\bar{a}_j = \left(D \left(\frac{ij\pi}{l} \right)^\alpha + a \right). \text{ Приравняв слагаемые при одинаковых степенях } 1/T, \text{ получим}$$

$$\varphi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_j^{(0)} = \bar{a}_j \beta_j^{(0)} - \chi \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p \beta_{j-p}^{(0)} \beta_p^{(0)}, \quad \text{и} \quad \varphi_\tau \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_j^{(1)} = \bar{a}_j \beta_j^{(1)} - \chi \sum_{p=-\infty}^{\infty} b_p (\beta_{j-p}^{(1)} \beta_p^{(0)} + \beta_{j-p}^{(0)} \beta_p^{(1)}) - \frac{\partial}{\partial \tau} \beta_j^{(0)}. \tag{10}$$

Положим $\varphi(\tau) = a\tau$. Тогда из (10) найдем

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \beta_0^{(1)} = \beta_0^{(1)} - \frac{2\chi b_0}{a} \beta_0^{(0)} \beta_0^{(1)}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \beta_j^{(1)} = \frac{\bar{a}_j}{a} \beta_j^{(1)} - \frac{\chi}{a} \beta_0^{(0)} (b_0 \beta_j^{(1)} + b_j \beta_j^{(1)}). \tag{11}$$

Решая системы (10) и (11) учитывая, что $\frac{\partial}{\partial \tau} \beta_j^{(0)} = 0$, найдем коэффициенты $\beta_j^{(0)}$ и $\beta_j^{(1)}$. Для случая

симметричного начального распределения с точностью до $O(1/T^2)$ получим

$$u(x,t) = \frac{\beta_{00} e^{at}}{1 + \frac{\chi b_0 \beta_{00}}{a} (e^{at} - 1)} + \frac{1}{T} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_{1j} e^{-\gamma^2 (x-y)^2 / 4Dt}}{\left[1 + \frac{\chi \lambda_0 \beta_{00}}{a} (e^{at} - 1)\right]^{(b_j + b_0)/b_0}}$$

Можно заметить, что $\text{Im}(u^{(1)}(x,t)) = 0$. В качестве b_γ выберем $b_\gamma = b_0 \exp\{-(x-y)^2/\gamma^2\}$.

Теперь рассмотрим, как меняется плотность популяции в зависимости от степени диффузии.

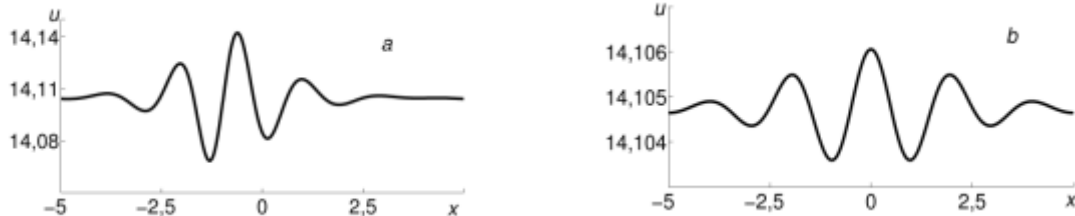


Рис. 1. График функции $u(x,t)$ в моменты времени $t = 50$ при $\alpha = 1.5$ (a), 2 (b), $a = 0.5$, $b_0 = \gamma = 1$, $\chi = 0.2$, $D = 0.01$, $l = 5$, $T = 10$

Первый и второй моменты $u(x,t)$ при $\alpha = 1.5$, вычисленные соответственно по формулам (рис. 2):

$$M(t) = \int_{-l}^l x u(x,t) dx, \quad D(t) = \int_{-l}^l (x - M(t))^2 u(x,t) dx.$$

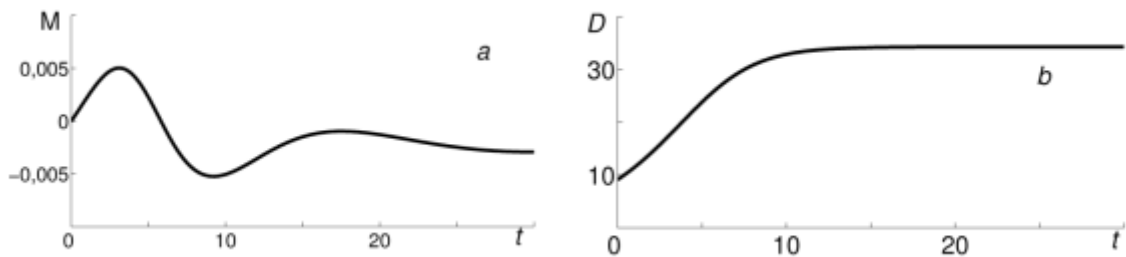


Рис. 2. График первого начального момента $M(t)$ (a) и второго центрального момента $D(t)$ (b).

Как видно из графиков (рис. 1), чем ниже порядок дробной производной, тем больше смещение центра и сильнее отклонение от стационарного состояния.

Работа поддержана Российским научным фондом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колмогоров А.Н., Петровский Н.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной
2. с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. А. Математика и Механика. — 1937. — Т. 1, № 6. — С. 1–16.
3. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. С. 38.
4. Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes // Annual Eugenics, 1937. V.7. P. 255.