

**ДВУМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА ХАРТРИ:
 КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ И НЕВЯЗКА**

А.Е. Кулагин

Научный руководитель: профессор, д.ф.-м.н. А.Ю. Трифонов
 Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
 Россия, г. Томск, пр. Ленина, 30, 634050
 E-mail: aek8@tpu.ru

2D HARTREE TYPE EQUATION: SEMICLASSICAL ASYMPTOTICS AND ERROR

A.E. Kulagin

Scientific Supervisor: Prof., Dr. A.Yu. Trifonov
 Tomsk Polytechnic University, Russia, Tomsk, Lenin str., 30, 634050
 E-mail: aek8@tpu.ru

The object of the article is solving of 2D Hartree type equation. We have used semiclassical approximation to pass from the nonlinear equation to analytically solvable equation. For Hartree type equation exact linear Hamilton equations and approximate equations for the second moments, based on semiclassical asymptotics, have been obtained. The exact expression for Green function has been obtained for approximate equation. So we have obtained analytical expression for the vast class of wave functions which are the approximate solution of nonlinear Hartree type equation. Computed function has specific behavior which reflects behavior of exact solution. Also we have obtained the error of the asymptotic solution to estimate its accuracy.

Двумерное уравнение типа Хартри

$$\left\{ -i\hbar\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{ky^2}{2} + \lambda V_0 \int_{\mathbb{R}^2} W(\mathbf{x}, \mathbf{x}') |\Psi(\mathbf{x}', t)|^2 d\mathbf{x}' \right\} \Psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1)$$

где $W(\vec{x}, \vec{x}') = \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{r_1^2} - \frac{(y-y')^2}{r_2^2}\right]$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\lambda V_0 < 0$, используется для описания бозе-эйнштейновского конденсата в поле магнитной ловушки. Слагаемое $ky^2/2$ описывает потенциал магнитной ловушки, а $W(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ – потенциал взаимодействия.

Обозначим $\alpha^{k,l,m,n}$ центральные моменты волновой функции

$$\alpha^{k,l,m,n}(t)[\Psi] = \frac{1}{\|\Psi\|^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Psi^*(x, y, t) \{(\Delta x)^k (\Delta y)^l (\Delta \hat{p}_x)^m (\Delta \hat{p}_y)^n\} \Psi(x, y, t) dx \quad (2)$$

где $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{X}(t)$, $\Delta \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{P}(t)$, $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$, а $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{P}(t)$ – первые начальные моменты волновой функции. Фигурными скобки обозначают упорядочивание по Вейлю (см. [2]). В работе [1] было показано, что на классе траекторно сосредоточенных функций справедливы оценки

$$\alpha^{k,l,m,n} = O(\hbar^{(k+l+m+n)/2}), \quad (\Delta \mathbf{x})^v = \hat{O}(\hbar^{|v|/2}) \quad (2a)$$

Первые начальные моменты определяются стандартным образом:

$$\mathbf{X}(t)[\Psi] = \begin{pmatrix} X_x(t) \\ X_y(t) \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi^* \mathbf{x} \Psi dx, \quad \mathbf{P}(t)[\Psi] = \begin{pmatrix} P_x(t) \\ P_y(t) \end{pmatrix} = \int_{\mathbb{R}^2} \Psi^* \hat{\mathbf{p}} \Psi dx. \quad (3)$$

Продифференцировав выражения (3) с учетом уравнения (1) и коммутационного соотношения

$[\Delta x_j, \Delta \hat{p}_k] = i\hbar \delta_{jk}$ получим систему уравнений на первые начальные моменты

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}(t) = -H_x(t), \\ \dot{\mathbf{X}}(t) = H_p(t). \end{cases} \quad (4)$$

Здесь обозначено $H_x(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ kX_y(t) \end{pmatrix}$, $H_p(t) = \frac{P(t)}{m}$. Аналогично с точностью до моментов второго порядка получим уравнения на центральные моменты волновой функции

$$\begin{cases} \dot{\alpha}^{2,0} = 2H_{pp}\alpha^{1,1}, \\ \dot{\alpha}^{0,2} = -2H_{xx}\alpha^{1,1}, \\ \dot{\alpha}^{1,1} = H_{pp}\alpha^{0,2} - H_{xx}\alpha^{2,0}. \end{cases} \quad (5)$$

где обозначено $H_{pp}(t) = \text{diag}\left(\frac{1}{m}; \frac{1}{m}\right)$, $H_{xx}(t) = \text{diag}\left(-2\|\Psi\|^2\lambda V_0 \frac{1}{\gamma_1^2}; k - 2\|\Psi\|^2\lambda V_0 \frac{1}{\gamma_2^2}\right)$,

$$\alpha^{1,1} = \begin{pmatrix} \alpha^{1,0,1,0} \\ \alpha^{0,1,0,1} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{2,0} = \begin{pmatrix} \alpha^{2,0,0,0} \\ \alpha^{0,2,0,0} \end{pmatrix}, \quad \alpha^{0,2} = \begin{pmatrix} \alpha^{0,0,2,0} \\ \alpha^{0,0,0,2} \end{pmatrix}.$$

Систему (4), (5) будем называть системой Гамильтона-Эренфеста 2-ого порядка.

С учетом оценок (2а) запишем

$$\begin{aligned} \{-i\hbar\partial_t + \hat{H}_0(t, \zeta)\}\Psi(x, t) &= O(\hbar^{3/2}), \\ \hat{H}_0(t, \zeta) &= \frac{\langle \Delta \mathbf{p}, \Delta \hat{\mathbf{p}} \rangle + 2\langle \mathbf{P}(t), \Delta \hat{\mathbf{p}} \rangle + \langle \mathbf{P}(t), \mathbf{P}(t) \rangle}{2m} + \frac{k}{2}(\Delta y^2 + 2X_y(t)\Delta y + X_y^2(t)) \\ &\quad + \|\Psi\|^2\lambda V_0 \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2}\Delta x^2 - \frac{\alpha^{2,0,0,0}(t)}{\gamma_1^2} - \frac{1}{\gamma_2^2}\Delta y^2 - \frac{\alpha^{0,2,0,0}(t)}{\gamma_2^2}\right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\zeta = (\vec{P}(0), \vec{X}(0), \alpha^{2,0}(0), \alpha^{1,1}(0), \alpha^{0,2}(0))$.

Здесь моменты волновой функции заменены на решения уравнений (4) и (5) с начальными условиями, определяемыми начальным условием для волновой функции и соотношениями (2), (3). Квазиклассическая функция Грина уравнения (6) находится стандартным способом (см. например [1]) и имеет вид

$$\begin{aligned} G(x, x', t, s, \zeta) &= \frac{1}{2\pi i\hbar} \frac{1}{\sqrt{\det M_3(t, s)}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_s^t (\langle \mathbf{P}(\tau), \dot{\mathbf{X}}(\tau) \rangle - H(\tau)) d\tau + \langle \mathbf{P}(t), \Delta x \rangle - \langle \mathbf{P}(s), \Delta x' \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \langle \Delta x, M_3^{-1}(t, s) M_1(t, s) \Delta x \rangle - \langle \Delta x, M_3^{-1}(t, s) \Delta x' \rangle + \frac{1}{2} \langle \Delta x', M_4(t, s) M_3^{-1}(t, s) \Delta x' \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Пусть $\Psi_0(x, t)|_{t=s} = \varphi(x)$. Тогда

$$\Psi_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x') G(x, x', t, s, \zeta) dx'. \quad (7)$$

Для начального условия вида

$$\varphi(x) = A \sum_{k=1}^n N_k \exp \left\{ -\frac{(x - x_k\sqrt{\hbar})^2}{\gamma'_{k1}\hbar} - \frac{y^2}{\gamma'_{k2}\hbar} \right\}, \quad (8)$$

где $N_k, n, x_k, \gamma'_{k1}, \gamma'_{k2}$ – некоторые константы, A – нормировочный коэффициент, интеграл (7) находится аналитически. На рис. 1 приведены графики $|\Psi_0(x, t)|^2$ для начального условия (8) в моменты времени $t_1 = 0, t_2 = 1.57, t_3 = 3$.

Таким образом, функция $|\Psi_0(x, t)|^2$ дупериодична по времени (колебания вдоль оси x и y) и представляет собой меняющиеся местами относительно центра масс пики.

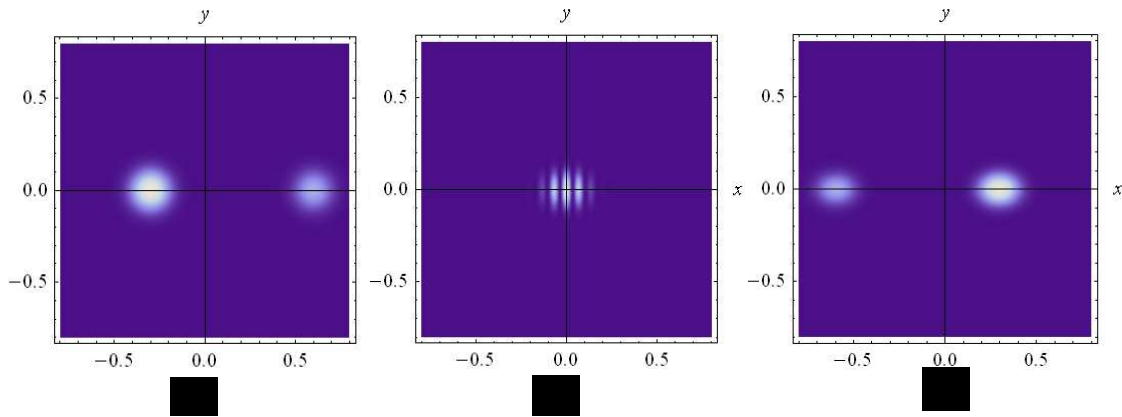


Рис. 1. Графики функций а) $|\Psi_0(\mathbf{x}, t_1)|^2$ б) $|\Psi_0(\mathbf{x}, t_2)|^2$ в) $|\Psi_0(\mathbf{x}, t_3)|^2$

Подставим (8) в уравнение (1) и получим

$$\left\{ -i\hbar\partial_t - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta + \frac{ky^2}{2} + \lambda V_0 \int_{\mathbb{R}^2} W(\mathbf{x}, \mathbf{x}') |\Psi_0(\mathbf{x}', t, \hbar)|^2 d\mathbf{x}' \right\} \Psi_0(\mathbf{x}, t, \hbar) = g(\mathbf{x}, t, \hbar). \quad (9)$$

Функция $g(\mathbf{x}, t, \hbar)$ называется невязкой уравнения (1). Невязка (9) периодична по времени, поэтому для характеристики точности решения уравнения (1) в зависимости от \hbar будем использовать функцию

$\theta(\hbar) = \sqrt{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |g(\mathbf{x}, t, \hbar)|^2 dx dt}$, где T – период невязки. На рис. 2 приведен график зависимости $\theta(\hbar)$ и $\theta^*(\hbar) = M\hbar^{3/2}$, где M – постоянный коэффициент, выбираемый таким образом, чтобы графики функций $\theta(\hbar)$ и $\theta^*(\hbar)$ касались.

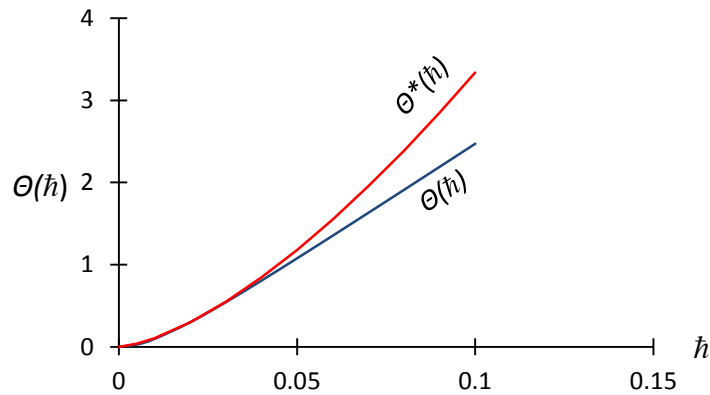


Рис. 2. График $\theta(\hbar)$ и $\theta^*(\hbar)$

Таким образом, функция $\theta^*(\hbar)$ ограничивает сверху функцию $\theta(\hbar)$, что свидетельствует о верности оценки $\theta(\hbar) = O(\hbar^{3/2})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багров В.Г., Белов В.В., Трифонов А.Ю. Методы математической физики. Асимптотические методы: Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 166 с.
2. Карасев М.В. О вейлевском и упорядоченном исчислении некоммутирующих операторов. – Матем. заметки, 1979, т. 26, вып. 6, с. 885-907.