Литература.
1. Е.Н. Петров, В.В. Родионов, Э.Н. Кузьмин, Р.Я. Лутфуллин, Р.В. Сафиуллин. Ячеистые конструкции.Снежинск: Изд-во РФЯЦ-ВНИИТФ, 2008. - 176 с.
2. К. И. Томас, Д. П. Ильященко.Технология сварочного производства: учеб. пособие. Томск: Изд - во Томского политехнического университета, 2009. – 244 с.
3. Лутфуллин Р.Я. Сверхпластичность и твердофазное соединение наноструктурированных материалов. Часть 1. Влияние размера зерна на твердофазную свариваемость сверхпластичных сплавов // Письма о материалах. 2011. Т. I. № 1. С. 59-64.
4. Лутфуллин Р.Я. Сверхпластичность и твердофазное соединение наноструктурированных материалов (Обзор). Часть II. Физическая модель формирования твердофазного соединения в титановом сплаве в условиях низкотемпературной сверхпластичности // Письма о материалах. 2011. Т.1. № 2. С. 88-91.
5. Валитова, Э. В. Влияние скорости и температуры деформации на микроструктуру и свойства ультамелкозернистого свариваемого сплава ХН58МБЮД [Текст] / Э. В. Валитова, Р. Я. Лутфуллин, В. А. Валитов // Перспективные материалы. – 2013. – Спец. вып. 15. – С. 30-34.
6. Валитова, Э. В. Формирование ультрамелкозернистой и нанокристаллической структуры методами интенсивной пластической деформации в никелевом сплаве ХН58МБЮД [Текст] / Э. В. Валитова, Р. Я. Лутфуллин, М. Х. Мухаметрахимов, В. А. Валитов // Перспективные материалы. – 2013. – Спец. вып. 15. – С. 35-39.

ЛОКАЛЬНЫЙ *d*-ОПЕРАТОР ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ДРОБНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПОРЯДКОВ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В.А. Чуриков, к. ф.-м. н., доцент
Национальный исследовательский Томский политехнический университет
634050, г. Томск, пр. Ленина, 30, тел. (*3822*) *563-593*
E-mail: vachurikov@list.ru

Дробный анализ является обобщением классического анализа на случай, когда операции дифференцирования и интегрирования классического анализа обобщаются на дифференцирование и интегрирование любых конечных вещественных, или комплексных порядков.

Дробный анализ основывается на операторах дробного дифференцирования и дробного интегрирования (*дробного интегродифференцирования*), которые относятся к *нелокальным операторам* и *локальным операторам*. Нелокальные операторы являются интегральными преобразованиями сформулированными в рамках классического анализа, которыми заменяют операторы интегродифференцирования классического анализа. Нелокальных операторов дробного интегродифференцирования было предложено достаточно много, которые подробно рассматриваются в литературе [1 – 7]. Локальные операторы не являются интегральными преобразованиями и их можно интерпретировать как алгебраические преобразования функций, на которые они действуют. В этом смысле классический анализ является локальной теорией. Поэтому представляется более правильным, чтобы дробный анализ строился как локальная теория, т. е. операции дробного интегродифференцирования не должны быть интегральными преобразованиями. Локальным операторам было посвящено меньше исследований, чем нелокальным операторам.

Недостатком как нелокальных, так и локальных операторов дробного интегродифференцирования, является то, что они в частном случае не дают операторы интегродифференцирования классического анализа, или другими словами, для них не выполняется *принцип соответствия*.

В работах [8 – 9] был введён *d*-оператор – локальный оператор дробного дифференцирования и дробного интегрирования, который действует в пространстве степенных функций вещественных порядков.

Для *d*-оператора выполняется *принцип соответствия*, а именно, в частном случае, для порядка интегродифференцирования равного 1, *d*-оператор переходит в операторы дифференцирования и интегрирования степенных функций классического анализа [11] и абсолютно с ними совпадает.

В работе [12] был введён *d*-оператор для дискретной переменной, где порядки интегродифференцирования и показатели степенных функций являются комплексными.

В работах [8 – 10, 12] *d*-оператор претерпел определённую эволюцию, которая привела к последней версии *d*-оператора, которая формулируется и рассматривается в данной работе.

Рассмотрим более общий случай *d*-оператора одной непрерывной вещественной переменной, у которого порядки интегродифференцирования и показатели степенных функций, на которые он действует, являются комплексными числами. Кроме того, в рассматриваемый *d*-оператор внесены изменения, связанные с логарифмическими случаями. Последние доработки делают *d*-оператор более адекватным для дальнейшего развития локального дробного анализа и для его практических приложений.

Изменения, внесённые в *d*-оператор, соответствуют изменениям внесённым в новый *G*-оператор комплексных порядков, который действует в пространстве вещественных степенных функций с комплексными показателями [13]. *G*-оператор является множеством локальных операторов интегродифференцирования комплексных порядков, которые являются обобщениями *d*-оператора, для которых выполняется принцип соответствия. При этом *d*-оператор, является самым простым оператором дробного интегродифференцирования из множества *G*-оператора комплексных порядков, действующих в пространстве степенных функций с комплексными показателями и, в свою очередь, является минимальным обобщением операторов дробного интегродифференцирования степенных функций классического анализа. Эти свойства *d*-оператора соответствуют *принципу простоты*, по которому локальный дробный анализ строится на основе наиболее простых операторов действующих над пространством степенных функций, которые являются одними из самых простых элементарных функций.

Кроме этого, очень важно, что степенные функции являются универсальными в том смысле, что они являются степенными для любых порядков интегородифференцирования. Другие элементарные функции такой универсальностью не обладают, например экспоненты одного порядка уже не являются экспонентами для других порядков интегродифференцирования.

***d*-оператор комплексного порядка**

Определение. *d-оператором комплексного порядка* $s = \chi + i\gamma$, $\chi, \gamma \in \mathbb{R}; \chi, \gamma = \text{const}; \chi, \gamma \geq 0$, дробного дифференцирования и дробного интегрирования вещественной переменной *x*, действующим в пространстве степенных функций x^q , вещественной переменной *x* с комплексными показателями $q = \mu + i\nu; \mu, \nu \in \mathbb{R}; \mu, \nu = \text{const}$, называется отображение определяемое равенствами.

Знаки, стоящие перед порядками интегродифференцирования *s* определяет тип операции. Если знак положительный, то это операция интегрирования, а если знак минус – операции дифференцирования.

Порядок $s = \chi = \gamma = 0$, в первом, и/или во втором равенстве соответствует *единичному оператору* **1**, который функциям, ставит в соответствие самих себя, что можно записать как $d^0x : f(x) = \mathbf{1} : f(x) = f(x)$.

$$\begin{cases} d^{-s}x : x^q \equiv \dfrac{d^s}{dx^s}x^q = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-s+1)}x^{q-s} + C_{-s}(x); \quad \neg[(q = -1, -2, -3, ...) \vee (q - s \neq -1, -2, -3, ...)]; \\ d^s x : x^q \equiv \displaystyle\int x^q d^s x = \dfrac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+s+1)}x^{q+s} + C_s(x); \quad \begin{cases} \neg[(q = -1, -2, -3, ...) \vee (q + s \neq -1, -2, -3, ...)]; \\ s \neq -q; \end{cases} \\ d^{-s}x : x^{-m} \equiv \dfrac{d^s}{dx^s}x^{-m} = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(-s-m+1)}x^{-m-s} + C_{-s}(x); \quad m \in \mathbb{N}; -s-m \neq -1, -2, -3, ...; \\ d^s x : x^{-m} \equiv \displaystyle\int x^{-m} d^s x = \dfrac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!\Gamma(s-m+1)}x^{-m+s} + C_s(x); \quad \begin{cases} m \in \mathbb{N}; s - m \neq -1, -2, -3, ...; \\ s \neq m; \end{cases} \\ d^s x : x^{-s} = \ln_s(x) + C_s(x); \quad s \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Когда порядок интегродифференцирования вещественный, $s = \text{Re}(s) = \chi > 0$, то если в равенствах (1) перед показателем порядка оператора *s*, стоит знак минус, то это будет соответствовать *оператору дробного дифференцирования вещественного порядка χ*, а если значение порядка оператора со знаком плюс, то это будет соответствовать *оператору дробного интегрирования вещественного порядка χ*.

Когда порядок интегродифференцирования мнимый, $s = i\,\text{Im}(s) = i\gamma$ и $\gamma > 0$, а в равенствах (1) перед показателем порядка оператора *s*, стоит знак минус, то это будет соответствовать *оператору дробного дифференцирования мнимого порядка γ*, а если значение мнимого порядка оператора со знаком плюс, то это будет соответствовать *оператору дробного интегрирования мнимого порядка γ*.

Если порядок интегродифференцирования комплексный, $s = \chi + i\gamma$ и $\chi, \gamma > 0$, а знак у порядка отрицательный, то это будет *дробное дифференцирование комплексного порядка*, а если знак положительный, то *дробное интегрирование комплексного порядка*.

Если знаки у вещественной и мнимой части порядка интегродифференцирования различаются, т. е. $s = -\chi + i\gamma$, или $s = \chi - i\gamma$, то такие порядки формально будем называть *смешанными комплексными порядками дифференцирования* и *смешанными комплексными порядками интегрирования*, соответственно. В этом случае нельзя говорить однозначно только о дифференцировании, или только об интегрировании.

Величины $\Gamma(q+1)/\Gamma(q \mp s+1)$ в первом и втором равенствах (1) называются *коэффициентом дифференцирования* для знака минус перед порядком s и *коэффициентом интегрирования* для знака плюс перед s. В этих коэффициентах в числителе у гамма-функции $\Gamma(q+1)$ исключены значения, попадающие в полюса, которые являются важными частными случаями, но не исключены полюсы у гамма-функций в знаменателях коэффициентов.

Если гамма-функции в числителе попадают в полюса, что случается для целых отрицательных показателей степенных функций, на которых действует оператор, т. е. $q = -m$. Тогда гамма-функция в полюсах заменяются вычетами соответствующими этим полюсам по формуле $\operatorname*{Res}_{\alpha=-m} \Gamma(\alpha) = (-1)^m / m!;\ \ m = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ [14], которой в рассматриваемом d-операторе будет соответствовать равенство $\operatorname*{Res}_{q+1=1-m} \Gamma(q+1) = (-1)^{m-1} / (m-1)!;\ \ m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ В результате при дифференцировании и интегрировании при такой замене будут соответственно четвёртое и пятое равенства с коэффициентами $(-1)^{m-1} / (m-1)!\Gamma(\mp s - m + 1)$.

Теперь рассмотрим отдельно все равенства в операторе (1).

Первое равенство определяет дробное дифференцирование порядка s. Дополнительные условия исключают случаи дифференцирования, когда гамма-функция в числителе обращается в бесконечность, при попадании аргумента в полюса гамма-функции, когда одновременно гамма-функция в знаменателе не равна бесконечности. Полюсы у гамма-функции имеются для отрицательных целочисленных порядков $q = \mathrm{Re}(q) = \chi = -1, -2, -3, \ldots$ Эти условия представлены в виде логического отрицания двух возможных ситуаций, которые не должны выполняться одновременно для гамма-функций в числителе и в знаменателе т. е. $\neg[(q = -1, -2, -3, \ldots) \vee (q - s \neq -1, -2, -3, \ldots)]$.

Второе равенство определяет дробное интегрирование порядка s. Первые дополнительные условия исключают случаи интегрирования, когда гамма-функция в числителе обращается в бесконечность, при попадании аргумента в полюса гамма-функции, когда одновременно в знаменателе гамма-функция не равна бесконечности. Эти условия тоже представлены в виде логического отрицания двух возможных ситуаций, которые не должны выполняться одновременно для гамма-функций в числителе и в знаменателе, т. е. $\neg[(q = -1, -2, -3, \ldots) \vee (q + s \neq -1, -2, -3, \ldots)]$. Второе дополнительное условия исключают интегрирование в логарифмических случаях.

Третье равенство определяют дифференцирование в случаях, которые исключены в первом равенстве. Дополнительное условие исключает случаи, когда значения гамма-функции в знаменателе не должно попадать в полюс. Эти случаи дифференцирования находятся с помощью первого равенства оператора, где гамма-функции в числителе и в знаменателе одновременно обращаются в бесконечность. В этом случае бесконечности в коэффициенте сокращаются.

Четвёртое равенство определяют интегрирование в случаях, исключаемых во втором равенстве. Первое дополнительное условие исключает случаи, когда значения гамма-функции в знаменателе не должно попадать в полюс. Эти случаи интегрирования находятся с помощью второго равенства оператора, где гамма-функции в числителе и в знаменателе одновременно обращаются в бесконечность. В этом случае бесконечности в коэффициенте сокращаются.

Второе дополнительное условие исключает случаи интегрирования в логарифмических случаях.

Пятое равенство определяет интегрирование в логарифмических случаях, когда порядок интегрирования s равен показателю степенных функций с отрицательным знаком $-s$.

Логарифмические случаи возникают, когда при отрицательных показателях степенных функций $-q < 0$, выполняется *условие логарифмичности*, т. е. $s - q = 0$, которое разделяет *область пара-*

боличности $s-q>0$ и *область гиперболичености* $s-q<0$ для показателей степенных функций, которые могут получаться после дробного интегрирования порядка *s*.

Функции $\ln_s(x)$ являются *логарифмами комплексного порядка s*, которые требуют дальнейшего исследования. В частности, в классическом анализе, для *s*=1 логарифм будет $\ln_1(x)\equiv\ln(x)$. Для интегрирования степенной функции x^{-1} в классическом анализе из *d*-оператора будет следовать справедливо по принципу соответствия $d^1x:x^{-1}=\ln(x)+C$, из которого следует более общее равенство: $d^1x:x^{-1}=\ln|x|+C_1$.

Логарифм $\ln_s(x)$ порядка *s* являются обратной функцией для функции $\exp_s(x)$, которая названа *главной экспонентой порядка s* [15] $\ln_s(\exp_s(x))=\exp_s(\ln_s(x))=x$.

Данные соотношения для главной экспоненты обобщают экспоненты вещественной переменой вещественных порядков на случай экспоненты вещественной переменой комплексных порядков *s* с конечным модулем $\|s\|<\infty$, который выражается через дробностепенной ряд [10]

$$\exp_s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{ns-1}}{\Gamma(ns)}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)s-1}}{\Gamma((m+1)s)}=\frac{x^{s-1}}{\Gamma(s)}+\frac{x^{2s-1}}{\Gamma(2s)}+\frac{x^{3s-1}}{\Gamma(3s)}+\frac{x^{4s-1}}{\Gamma(4s)}+\dots$$

Главная экспонента вещественных порядков была получена, в частности, в [14] для локального оператора Адамара [16]

Наличие логарифмических функций, которые не являются степенными, говорит о том, что для *d*-оператора пространство степенных функций не является замкнутым.

Функции $C_s(x)$ в (1) являются *полиномами интегрирования* порядка *s*. Полиномы интегрирования являются обобщениями констант интегрирования классического анализа [8 – 10]; $C_{-s}(x)$ – *полиномы дифференцирования* порядка *s*, которые для комплексных порядков вещественной переменной рассматривались в [12]. Полиномы дифференцирования комплексных порядков являются аналогами полиномов интегрирования комплексных порядков для случая дифференцирования комплексных порядков.

Полиномы интегрирования $C_s(x)$ и полиномы дифференцирования $C_{-s}(x)$ легко объединить в *полиномы интегродифференцирования* и обозначать как $C_{\pm s}(x)$, которые для комплексных порядков вещественной переменной определяются в [17], а здесь даются для непрерывной вещественной переменной с уточнениями.

Определение. *Полиномами интегродифференцирования комплексного порядка s* вещественной переменной *x*, будем называть функцию $C_{\pm s}(x)$ задаваемую равенствами для разных значений порядков *s*

$$C_{\pm s}(x)=\begin{cases}C_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^{-k+\alpha};\quad s=\alpha;a_k\in\mathbb{C};\alpha,a_k=\text{const};\|a_k\|<\infty;\alpha\neq1,2,3,4,\dots;\\ \quad\chi,\gamma\in\mathbb{R};\chi,\gamma=\text{const};\chi,\gamma\geq0;\infty>\|\alpha\|>0;(\alpha=\chi+i\gamma)\wedge(\alpha=\chi-i\gamma);\\ C_m(x)=\sum_{k=0}^{m-1}b_kx^k;\quad s=m;m\in\mathbb{N};b_k\in\mathbb{C};b_k=\text{const};\|b_k\|<\infty;\\ C_0(x)=0;\quad s=0;\\ C_{-\alpha}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}h_kx^{-k-\alpha};\quad -s=-\alpha;h_k\in\mathbb{C};\alpha,h_k=\text{const};\|h_k\|<\infty;\alpha\neq1,2,3,4,\dots;\\ \quad\chi,\gamma\in\mathbb{R};\chi,\gamma=\text{const};\chi,\gamma\geq0;\infty>\|\alpha\|>0;(\alpha=\chi+i\gamma)\wedge(\alpha=\chi-i\gamma);\\ C_{-m}(x)=0;\quad -s=-m;m\in\mathbb{N}.\end{cases}\qquad(2)$$

Полиномом интегродифференцирования порядка *s* соответствует полиномам интегрирования для нецелочисленных комплексных порядков ±*s*=±*α* и для целочисленных вещественных порядков ±*s*=±*m* с положительным знаком (первые два равенства).

Для порядка равного нулю *s*=0, полиномы дифференцирования и полиномы интегрирования совпадают и равны нулю (третье равенство). Для данного тривиального случая справедлива запись: $C_0(x)=C_{-0}(x)=0$.

Полиномам дифференцирования соответствуют нецелочисленные комплексные порядки *-s=-α* и целочисленные вещественные порядки *s=-m* с отрицательным знаком (четвёртое и пятое равенства). В случае целочисленных порядков *s=-m*, включая порядок 1 (классический анализ), полиномы дифференцирования отсутствуют, поэтому они в этих случаях формально были приравнены к нулю.

Для полиномов интегродифференцирования можно ввести обозначения, в котором полиномы интегрирования и полиномы дифференцирования входят в другом порядке $C_{\mp s}(x)=0$.

Для полиномов интегродифференцирования можно ввести обозначения, в котором полиномы интегрирования и полиномы дифференцирования входят в другом порядке $C_{\mp s}(x)=0$.

Коэффициенты a_k, и b_k в полиномах интегродифференцирования являются произвольными комплексными *константами интегрирования*, а h_k - произвольными комплексными *константами дифференцирования*.

Произвольность констант a_k, b_k и h_k приводят к соответствующей произвольности полиномов интегродифференцирования. Все константы a_k, b_k и h_k имеют конечные модули $|a_k|,|b_k|,|h_k|<\infty$.

В ряде случаев, например при решении дифференциальных уравнений, при задании начальных и краевых условий, константы a_k и b_k могут оказаться взаимосвязанными между собой. В частных случаях взаимосвязанными могут оказаться и константы дифференцирования h_k.

Ряды полиномов интегрирования $C_{+s}(x)$ и полиномов дифференцирования $C_{-\alpha}(x)$ нецелочисленных порядков, в зависимости от значений констант a_k и h_k, могут быть как сходящимися, так и расходящимися.

Полиномы интегродифференцирования можно отнести к элементарным функциям локального дробного анализа, которые в частном случае классического анализа переходят в константы интегрирования при интегрировании и в ноль для случая дифференцирования.

d-оператор является линейным, т. е. для него справедливо равенство

$$d^{\pm s}x:(\mu f(x)+\nu g(x))=\mu d^{\pm s}x:f(x)+\nu d^{\pm s}x:g(x);\quad \mu,\nu\in\mathbb{C};\mu,\nu=\text{const}.$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ некоторые интегродифференцируемые *d*-оператором функции, если перед *s* стоит знак плюс и интегрируемые *d*-оператором функции, если перед *s* стоит знак минус.

Для полиномов интегродифференцирования справедлива теорема, которая обобщает утверждение о равенстве нулю производной константы классического анализа.

Теорема. Если $C_{\pm s}(x)$ и $\tilde{C}_{\mp s}(x)$ произвольные полиномы интегродифференцирования порядка *s*, то при их дробном интегродифференцировании порядка *s*, будут выполняться уравнения [17]

$$d^{\pm s}x:C_{\mp s}(x)=\tilde{C}_{\pm s}(x).$$

Доказательство. Выполнение первого и четвёртого равенств легко показать

$$d^{\pm s}x:C_{\mp s}(x)=d^{s}x:\sum_{k=1}^{\infty}b_k x^{-k\mp s}=C_{\mp s}^{(\mp s)}(x)+\tilde{C}_{\pm s}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\,\frac{\Gamma(-k-s+1)}{\Gamma(-k+1)}x^{-k}+\tilde{C}_{\pm s}(x)=\tilde{C}_{\pm s}(x).$$

Здесь $F^{(\mp s)}(x)$ - первообразная порядка *s* при положительном знаке, а при отрицательном знаке производной порядка *s* функции $f(x)$, а в другом обозначении будет $F^{(\mp s)}(x)\equiv f^{(\pm s)}(x)$.

Для второго равенства

$$d^{-m}x:C_m(x)=d^{-m}x:\sum_{k=0}^{m-1}a_k x^k=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\,\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-m)}x^{k-m}=\sum_{k=0}^{m-1}a_k\,\frac{\Gamma(k+1)}{\infty}x^{k-m}=0.$$

Для третьего равенства будет: $d^0x:C_0(x)=d^0x:0=0$.

Для пятого равенства эти уравнения дают: $d^m x:C_{-m}(x)=d^m x:0=C_m(x)$ ■

Очевидно, что если порядки интегродифференцирования *s* и порядки полиномов интегродифференцирования *v* в общем случае не совпадают, то будет справедлива более общая формула

$$d^{\pm s}x:C_{\mp v}(x)=C_{\mp v}^{(\mp s)}(x)+\tilde{C}_{\pm s}(x).$$

Здесь $C_{\mp v}^{(\mp s)}(x)\neq 0$, если *s≠v*, или $C_{\mp v}^{(\mp s)}(x)=0$, если *s=v*.

Если в силу произвольности полиномов интегродифференцирования принять равными нулю $\tilde{C}_{\pm s}(x)=0$, тогда уравнения будут: $d^{\pm s}x:C_{\mp s}(x)=0$. Данное утверждение теоремы будет равносильно тому, что базовая первообразная дробного порядка s от полинома дифференцирования $C_{\mp s}(x)$ порядка s равна нулю.

Если к нулю приравнять полиномы $C_{\pm s}(x)=0$, то уравнения будут: $d^{\pm s}x:0=\tilde{C}_{\pm s}(x)$.

Данное равенство обобщает на случай комплексных порядков интеграл от нуля в классическом анализе, в соответствии с которым $\int 0\,dx=\text{const}$.

Полиномы интегродифференцирования делают операции интегрирования и дифференцирования неоднозначными для всех порядков за исключением интегродифференцирования нулевого порядка и дифференцирования целочисленных порядков, включая порядок 1, соответствующий классическому анализу.

В локальном дробном анализе на основе *d*-оператора производная комплексного порядка s от функции $f(x)$ определяется равенством

$$d^{-s}x:f(x)=f^{(s)}(x)+C_{-s}(x)=F^{(-s)}(x)+C_{-s}(x).$$

Функцию $f^{(s)}(x)\equiv F^{(-s)}(x)$ будем называть *базовой производной прядка s* функции $f(x)$.

Определение. *Базовая производная*, это такая производная, у которой полином дифференцирования равен нулю.

Определение. *Неопределённой производной порядка s* функции $f(x)$ будем называть множество всех производных порядка s функции $f(x)$.

Первообразной комплексного порядка s функции $f(x)$ в локальном дробном анализе на основе *d*-оператора будем называть сумму

$$d^{s}x:f(x)=F^{(s)}(x)+C_{s}(x)=f^{(-s)}(x)+C_{s}(x).$$

Здесь функция $F^{(s)}(x)\equiv f^{(-s)}(x)$ является *базовой первообразной* прядка s функции $f(x)$.

Определение. *Базовая первообразная прядка s* функции $f(x)$, это такая первообразная, у которой полином интегрирования равен нулю.

Определение. *Неопределённым интегралом порядка s* функции $f(x)$ будем называть множество всех первообразных порядка s функции $f(x)$.

Объединённая формула дробного интегродифференцирования комплексного прядка s будет

$$d^{\pm s}x:f(x)=f^{(\mp s)}(x)+C_{\pm s}(x)=F^{(\pm s)}(x)+C_{\pm s}(x).$$

Наличие полиномов интегродифференцирования, в частности, приводит к ряду алгебраических особенностей *d*-оператора.

Теорема. *d*-оператор не является коммутативным.

Доказательство. Рассмотрим воздействие операторов $d^{\pm\nu}x$ и $d^{\pm s}x$ на функцию $f(x)$ в разных порядках

$$d^{\pm\nu}x:d^{\pm s}x:f(x)=d^{\pm\nu}x:(f^{(\pm s)}(x)+C_{\pm s}(x))=f^{(\pm(\nu+s))}(x)+C_{\pm s}^{(\mp\nu)}(x)+C_{\pm\nu}(x).$$

Если подействовать на функцию операторами в обратном порядке, получим

$$d^{\pm s}x:d^{\pm\nu}x:f(x)=d^{\pm s}x:(f^{(\pm\nu)}(x)+C_{\pm\nu}(x))=f^{(\pm(\nu+s))}(x)+C_{\pm\nu}^{(\mp s)}(x)+C_{\pm s}(x).$$

Результаты отличаются, что доказывает теорему ■

Теорема. При воздействии *d*-оператора на функцию, $f(x)$ *композиция* $d^{\pm\nu}x:d^{\pm s}x:f(x)\to d^{\pm(\nu+s)}x:f(x)$ и *декомпозиция* $d^{\pm(\nu+s)}x:f(x)\to d^{\pm\nu}x:d^{\pm s}x:f(x)$ приводят в общем случае к разным результатам.

Доказательство. Покажем это на примере интегродифференцирования полиномов $C_{\mp s}(x)$

$$d^{\pm\nu}x:d^{\pm s}x:C_{\mp s}(x)=d^{\pm\nu}x:(\tilde{C}_{\mp s}(x))=\tilde{C}_{\mp s}^{(\mp\nu)}(x)+C_{\pm\nu}(x).$$

Если подействовать оператором порядка $\pm(\nu+s)$, то получим

$$d^{\pm(\nu+s)}x:C_{\pm s}(x)=\tilde{C}_{\mp s}^{(\mp(\nu+s))}(x)+C_{\pm(\nu+s)}(x).$$

Результаты интегродифференцирования в обоих случаях не равны

$\tilde{C}^{(\mp\nu)}_{\mp s}(x)+C_{\mp\nu}(x)\neq\tilde{C}^{(\mp(\nu+s))}_{\mp s}(x)+C_{\mp(\nu+s)}(x)$ ■

Если в *d*-операторе оставить только первое равенство, отбросив остальные равенства вместе с дополнительными условиями и сохранить только вещественные порядки, то такой оператор будет соответствовать локальному оператору дробного дифференцирования Адамара [1, 15].

Заключение

Рассмотренный *d*-оператор является минимальным обобщением формул интегродифференцирования степенных функций классического анализа, для которого выполняется принцип соответствия. Это предполагает, что при его применении для описания процессов в пространствах нецелочисленной размерностью, получаемые решения в частном случае, для порядков интегродифференцирования равного 1, должны совпадать с решениями, получаемыми в классическом анализе.

С другой стороны, принцип простоты должен приводить к тому, что в рамках дробного анализа на основе *d*-оператора не должны появляться «не физические» решения и другие математические следствия, не имеющие отношения к рассматриваемому объекту, или их должно быть как можно меньше.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013, проект № 14.B37.21.0861.

Литература.

1. Oldham K.B., Spanier J. The fractional calculus. – New York; London: Academic Press, 1974. – 234 p.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с. (S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications. New York: Gordon and Breach 1993).
3. Kilbas A.A., Srivastava H.S., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. North-HollandMathematicsStudies. Vol. 204. – Amsterdam – Boston – Heidelberg – London – New York – Oxford – Paris – San-Diego – San-Francisco – Singapore – Sydney – Tokyo: Elsevier, 2006. – 520 p.
4. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
5. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. – 512 с.
6. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Университетская книга, 2005. – 848 с.
7. Летников А.В., Черных В.А. Основы дробного исчисления (с приложениями в теории разработки нефтяных и газовых залежей, подземной гидродинамике и динамике биологических систем. – М.: Нефтегаз, 2011. – 431 с.
8. Чуриков В.А. Локальный d-оператор дифференцирования и интегрирования конечных вещественных порядков для дробного анализа // Известия Томского политехнического университета. – 2011. – Т. 318, – № 2. – С. 5–10.
9. Чуриков В.А. Краткое введение в дробный анализ целочисленных порядков. – Томск: Изд-во ТПУ, – 2011. – 72 с.
10. Чуриков В.А. Дополнительные главы анализа. Дробное интегрирование и дробное дифференцирование на основе d-оператора: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 118 с.
11. Чуриков В.А. Доказательство принципа соответствия в дробном анализе на основе d-оператора // Математическое моделирование фрактальных процессов, родственные проблемы анализа и информатики: Материалы международной конференции молодых ученых г. Нальчик, 5 – 8 декабря, 2011 г. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, – 2011, – С. 237–239.
12. Чуриков В.А. Производные и интегралы дробных комплексных порядков функций дискретной переменной // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 322. – № 5. – С. 11–13.
13. Чуриков В.А. Обобщённый G-оператор комплексных порядков вещественной переменной // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 42 – 44.
14. Евграфов М.А. Аналитические функции. - М.: Наука, 1991. – 448 с.
15. Чуриков В.А. Дробный анализ на основе оператора Адамара // Известия Томского политехнического университета. – 2008. – Т. 312, – № 2. – С. 16–20.
16. Hadamard J. Essai sur l'étude des fonctions données par leur dévelopment de Taylor. – J. math. pures et appl. Ser. 4. 1892. V. VIII, – p. 101 – 186.
17. Чуриков В.А. Полиномы дифференцирования в локальном дробном анализе на основе d-оператора // Известия Томского политехнического университета. – 2013. – Т. 323. – № 2. – С. 32 – 36.