

При сильной неэквипотенциальности (более 70 %) величина электромагнитных возмущений превышает нормируемое значение в 13 и более раз.

Заключение

Предложены итерационные методы расчёта параметров электробезопасности эквипотенциальных

и неэквипотенциальных заземляющих устройств. Выявлено, что значения потенциалов на металле, в грунте и напряжения «до прикосновения» могут в значительной степени зависеть от схемы измерения, магнитного влияния токовой линии, нелинейности внутреннего продольного сопротивления, а также от частоты тока в заземляющих устройствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Садовская Л.В., Палагушкин Б.В., Хромов Е.Г., Кислицын Е.Ю. Наводимые напряжения на кабельных линиях и электронном оборудовании АСУ ТП подстанций и рекомендуемые меры защиты // Электроснабжение железных дорог: Межвуз. темат. сб. науч. тр. Омского гос. ун-та путей сообщения. – Омск, 2007. – С. 27–32.
2. Kostin M.K., Matveyev M.V., Ovsyannikov A.G., Verbin V.S., Zhivodernikov S. Some results of EMS investigation in Russian substations // Conseil International des Grands Reseaux Electriques, Session, 2002. – P. 36–103.
3. Кислицын Е.Ю., Иванов Г.В., Мозилов А.И., Садовская Л.В. Влияние электромагнитных помех на параметры электробезопасности заземляющих устройств, электроустановок и на электромагнитную обстановку // Под общ. ред. Ю.В. Демина. – Новосибирск: ФГОУ ВПО «Новосибирская государственная академия водного транспорта», 2007. – 22 с.

Поступила 11.02.2008 г.

УДК 621.372.4:537.52

МЕТОД РАСЧЕТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ СПЛОШНЫХ ПЛАСТИН И ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЕМ В ФОРМЕ КРУГА И ФОРМЕ СФЕРИЧЕСКИХ СЕГМЕНТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Ю.Н. Исаев, Е.О. Кулешова, О.В. Васильева, Д.А. Русол*

Томский политехнический университет

E-mail: kuleshova@elti.tpu.ru

*ОАО «НИПИ», г. Томск

Решается задача определения распределения зарядов на поверхности плоских и сферических пластин с отверстием и без него через потенциал пластины при отсутствии и наличии внешнего поля. Уравнение, описывающее связь между распределением зарядов и потенциалом пластины, является интегральным. Получены полиномы, позволяющие свести сложное интегральное уравнение к алгебраическим уравнениям. Приводятся примеры расчета распределения зарядов на поверхности сплошного диска и диска с отверстием, пластины в виде сплошного сферического сегмента.

В общем случае, для точного расчета распределения зарядов проводников требуется строгое решение соответствующей электростатической задачи. Сложность аналитического решения большинства электростатических задач обусловила появление и развитие ряда приближенных методов расчета. Один из наиболее существенных недостатков этих методов заключается в том, что их можно применить при решении узкого круга задач. Предлагаемый метод позволяет найти распределение зарядов на поверхности проводника при любом осесимметричном внешнем поле.

Если поместить проводящую пластину во внешнее электростатическое поле [1, 2], то на поверхности проводника происходит перераспределение зарядов. Возникшее распределение зарядов компенсирует (гасит) влияние внешнего поля. Для тонкой пластины соотношение между распределением зарядов на пластине, потенциалом пластины и потенциалом внешнего электростатического поля запишутся следующим образом [3, 4]:

$$-U^0(\mathbf{r}_0) + U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_D \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\},$$

$$\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in D, \quad (1)$$

где $U^0(\mathbf{r}_0)$ – потенциал внешнего поля, U_0 – потенциал проводника, $\sigma(\mathbf{r})$ – распределение зарядов на проводнике, ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость окружающей среды, x, y, z – система декартовых координат, x_0, y_0, z_0 – координаты расположения заряда, \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 – радиус-вектора, D – область определения потенциала электростатического поля.

Интегральное уравнение (1) позволяет найти распределение потенциалов при известном распределении зарядов на проводнике – это прямая задача. Гораздо сложнее и интереснее обратная задача. Чаще известен потенциал результирующего поля $-U^0(\mathbf{r}_0) + U_0$, и для того, что бы найти распределение зарядов нужно решить интегральное уравнение Фредгольма первого рода (1) относительно $\sigma(\mathbf{r})$.

Цель работы заключается в том, что бы заменить сложное интегральное уравнение (1) алгебраическим, т. е. получить аналитические соотношения, связывающие потенциал результирующего поля и распределения зарядов на проводнике.

Будем предполагать, что внешнее поле обладает симметрией вращения относительно оси симметрии диска. Тогда уравнение (1) может быть переписано в виде:

$$U(\rho) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\sigma(\rho') \rho' d\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}}. \quad (2)$$

Здесь $U(\rho) = -U^0(\rho) + U_0$ – результирующий потенциал, ρ – расстояние переменной точки на диске от оси диска, ρ' – расстояние фиксированной точки, в которой определен внешний потенциал, до оси диска.

Последнее выражение можно переписать с использованием эллиптического интеграла

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k \cos(\theta - \theta')}},$$

тогда соотношение (2) преобразуется:

$$\begin{aligned} U(\rho) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \rho' d\rho' \sigma(\rho') \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}} = \\ &= \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho' \sigma(\rho')}{\rho' + \rho} K\left(\frac{2\sqrt{\rho'\rho}}{\rho' + \rho}\right) d\rho'. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая преобразование Ландена [3], можно получить следующее свойство эллиптического интеграла:

$$\frac{1}{x} K\left(\frac{y}{x}\right) = \int_0^y \frac{ds}{\sqrt{(x^2 - s^2)(y^2 - s^2)}},$$

где $s = y \sin(\theta - \theta')$.

Полученное свойство позволяет записать неизвестную подынтегральную функцию $\sigma(\rho)$ через известный потенциал $U(\rho)$:

$$\sigma(\rho) = -\frac{4\epsilon_0}{\pi\rho} \frac{d}{d\rho} \int_\rho^R \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - \rho^2}} \frac{d}{ds} \int_0^s \frac{U(t) dt}{\sqrt{s^2 - t^2}}. \quad (4)$$

Определим распределение зарядов, порожденное потенциалом вида

$$U(\rho) \sim \rho^m. \quad (5)$$

После подстановки (5) в (4) получаем выражения для распределения зарядов в виде полиномов при нечетных (6) и четных (7) m соответственно.

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) &= -N(m, 1) \sum_{k=0}^{m/2} c\left(\frac{m}{2}, k\right) \times \\ &\times \frac{(R^2 - \rho^2)^{k - \frac{1}{2}} (\rho^{-2} m R^2 - m - 2\rho^{-2} k R^2 - 1) \rho^{-2k+m}}{2k+1}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sigma(\rho) &= -\frac{M(m, 1)}{m+1} \times \\ &\times \left(\frac{-R^m}{S} + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{F1\left(\frac{m+1}{2}, k\right) \left(2k\rho^{2k-2} S - \frac{\rho^{2k}}{S}\right) R^{m-2k}}{2^k} \right) \right) - \\ &- \frac{F(m)M(m, 1)}{2^{\frac{m+1}{2}} \left(\frac{m+1}{2}\right)!} \left[L\rho^{m-1}(m+1) - \left(\frac{1}{S} \cdot \frac{\rho^{(m+1)}}{R+S} + \rho^{(m+1)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F(m) &= \prod_{k=0}^{\frac{m-1}{2}} 2k+1, \quad F1(m, k) = \prod_{s=1}^k \frac{2m-2s+1}{m-s}, \\ c(m, k) &= \frac{m}{(k-m)!k!}, \quad M(m, s) = \frac{F(m)s^m \pi(m+1)}{2^{\frac{m+3}{2}} \left(\frac{m+1}{2}\right)!}, \end{aligned}$$

$$N(m, s) = (m+1)s^m \sum_{k=0}^{\frac{m}{2}} \frac{(-1)^k}{2k+1} c\left(\frac{m}{2}, k\right),$$

$$S = \sqrt{R^2 - \rho^2}, \quad L = \ln\left(\frac{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho}\right).$$

Сведем в табл. 1 выражения для $U(\rho) \sim \rho^m$ и $\sigma(\rho)$ различных значений m с точностью до мультипликативной постоянной, равной $4\epsilon_0/\pi$.

Используя табличные соотношения, можно определить любое интересующее нас распределение зарядов при известном распределении потенциала. Для этого необходимо представить распределение потенциалов поля в виде разложения по многочленам

$$U(\rho) = \sum_{m=0}^N A_m \rho^m. \quad (6)$$

Коэффициенты разложения ряда (6) легко определить, используя метод наименьших квадратов. Распределение зарядов при этом определяется соотношением:

$$\sigma(\rho) = \frac{4\epsilon_0}{\pi} \sum_{m=0}^N A_m \psi_m(\rho). \quad (7)$$

Вид полиномов ряда (7) определяется выражениями из табл. 1.

Рассмотрим несколько примеров использования алгоритма.

Пример 1. Определим свободное распределение зарядов на диске, радиусом $R=10^{-3}$ м, если потенциал диска равен $U(\rho)=1$ В. В соответствии с табличными данными получаем распределение зарядов:

$$\sigma(\rho) = \frac{4\epsilon_0}{\pi} \frac{U(\rho)}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \frac{5,634 \cdot 10^{-12}}{\sqrt{10^{-6} - \rho^2}} \text{ Кл/м}^2.$$

Пример 2. Определим распределение зарядов на диске радиуса $R=10^{-3}$ м, если диск помещен во вне-

Таблица 1. Полиномы при разных степенях m

ρ^m	$\sigma(\rho)$
Для четных степеней m	
1	$\frac{1}{S}$
ρ^2	$-\frac{2R^2 - 2\rho^2}{S}$
ρ^4	$-\frac{8}{9} \cdot \frac{4\rho^2 R^2 - 8\rho^4 + R^4}{S}$
ρ^6	$-\frac{16}{25} \cdot \frac{8\rho^4 R^2 - 16\rho^6 + 2\rho^2 R^4 + R^6}{S}$
ρ^8	$-\frac{128}{1225} \cdot \frac{16\rho^4 R^4 + 8R^6 \rho^2 + 64\rho^6 R^2 - 128\rho^8 + 5R^8}{S}$
ρ^{10}	$-\frac{256}{3969} \cdot \frac{10R^8 \rho^2 + 16\rho^4 R^6 + 32\rho^6 R^4 + 128\rho^8 R^2 - 256\rho^{10} + 7R^{10}}{S}$
Для нечетных степеней m	
ρ	$\frac{1}{2} \pi \left(\frac{R}{S} - L \right)$
ρ^3	$-\frac{3}{8} \pi \left(\frac{(R^2 - 3\rho^2)R}{S} + 3\rho^2 L \right)$
ρ^5	$-\frac{15}{128} \pi \left(\frac{(2R^4 + 5R^2 \rho^2 - 15\rho^4)R}{S} + 15\rho^4 L \right)$
ρ^7	$-\frac{35}{1536} \pi \left(\frac{(8R^6 + 14\rho^2 R^4 + 35\rho^4 R^2 - 105\rho^6)R}{S} + 105\rho^6 L \right)$
ρ^9	$-\frac{315}{32768} \pi \left(\frac{(42\rho^4 R^4 + 16R^8 + 24R^6 \rho^2 + 105\rho^6 R^2 - 315\rho^8)R}{S} + 315\rho^8 L \right)$
ρ^{11}	$-\frac{693\pi}{655360} \left(\frac{128R^{11} + 1155\rho^3 R^9 - 3465\rho^5 R^7 + 264\rho^7 R^5 + 176R^9 \rho^2 + 462\rho^6 R^5 + 3465\rho^{10} L}{S} \right)$

шнее поле точечного заряда, расположенного на оси диска на расстоянии $h=4 \cdot 10^{-3}$ м от поверхности диска (см. рис. 1, а). В соответствии с законом Кулона получаем распределение потенциала

$$U(\rho) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}.$$

Представим потенциал поля $U(\rho)$ в виде ряда

$$U(\rho) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=0}^N A_m \rho^m.$$

Коэффициенты разложения ряда $\mathbf{A}=\{A_1 A_2 A_3 \dots A_N\}^T$ определим, используя метод наименьших квадратов. В нашем случае они определяются с помощью выражения

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}, \tag{8}$$

где $\mathbf{C}=\{C_1 C_2 C_3 \dots C_N\}^T$ – матрица-столбец размерностью $1 \times N$; \mathbf{B} – квадратная матрица размерностью $N \times N$; элементы матриц определяются выражениями:

$$C_m = \int_0^R U(\rho) \rho^{m+1} d\rho, \tag{9}$$

$$B_{m,n} = \int_0^R \rho^{m+n+1} d\rho = \frac{R^{n+m+2}}{n+m+2}.$$

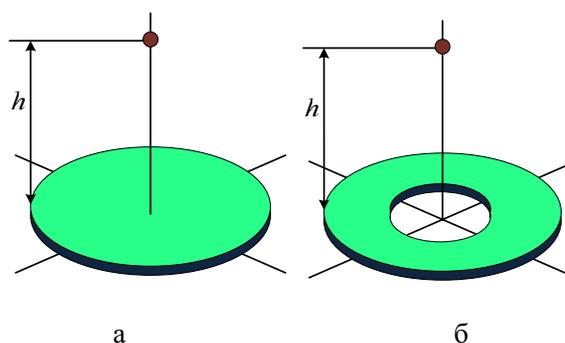


Рис. 1. Конфигурация электродов. Заряд над поверхностью диска: а) сплошного; б) с отверстием

Задача восстановления распределения зарядов по поверхности проводника является обратной некорректной задачей [5, 6]. Матрица является плохо обусловленной матрицей. Ошибка появляется при вычислении коэффициентов разложения за счет проявления ложной высокочастотной составляющей, для подавления которой необходимо осуществить слабый спектральный сдвиг в выражении (8):

$$\mathbf{A} = (\mathbf{B} + \lambda \cdot \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{C}, \tag{10}$$

где \mathbf{E} – единичная матрица; λ – параметр регуляризации, сглаживающее решение и его величина опреде-

Таблица 2. Коэффициенты разложения A ряда $U(\rho)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0,199	0,013	-0,803	1,028	0,783	-2,615	1,017	1,656	-0,898	-1,277	1,305	-0,335

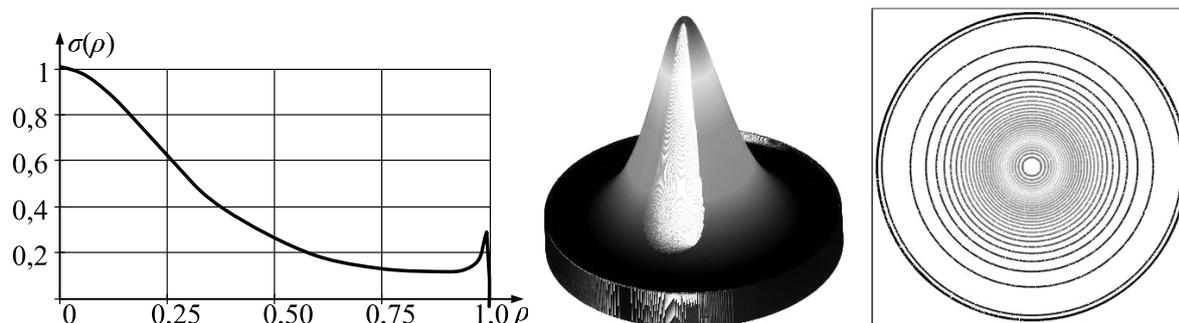


Рис. 2. Профиль и пространственное распределение зарядов пластины $\sigma(\rho)$

ляются уровнем ошибки в исходных данных. В нашем случае параметр регуляризации был выбран $\lambda=10^{-9}$. Коэффициенты A , рассчитанные по выражению (10) (в относительных единицах), сведены в табл. 2.

Графическое представление результатов приведено на рис. 2.

Пример 3. Определим распределение зарядов на плоскости с круговым отверстием $r=0,25 \cdot 10^{-3}$ м, если диск помещен во внешнее поле точечного заряда, расположенного на оси диска на расстоянии $h=4 \cdot 10^{-3}$ м от поверхности диска (рис. 1, б). Примем внешний радиус диска $R=4 \cdot 10^{-3}$ м.

В соответствии с законом Кулона получаем распределение потенциала:

$$U(\rho) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + h^2}}, & \rho \geq r \\ 0, & \rho < r \end{cases}$$

Перепишем выражение для определения потенциала (3):

$$U(\rho) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{\rho' \sigma(\rho')}{\rho' + \rho} K\left(\frac{2\sqrt{\rho\rho'}}{\rho' + \rho}\right) d\rho'$$

В этом случае нет необходимости рассчитывать новые полиномы разложения. Достаточно осуществить необходимое преобразование системы координат, заключающееся в проецировании внешней области круга на внутреннюю. Для этого необходимо свести внешнюю задачу к внутренней, используя понятие о сопряженных точках, рис. 2. (Точка A' внешнего круга заменяется точкой A внутреннего круга).

Выполним замену: $\rho' = \frac{r^2}{t'}$, $\rho = \frac{r^2}{t}$.

В результате получим интегральное выражение с новыми пределами интегрирования:

$$U\left(\frac{r^2}{t}\right) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^r \left(\frac{r^2}{t'} \sigma\left(\frac{r^2}{t'}\right) \right) / \left(\frac{r^2}{t'} + \frac{r^2}{t} \right) \times \\ \times K\left(2\sqrt{\frac{r^2}{t'} \cdot \frac{r^2}{t}} / \left(\frac{r^2}{t'} + \frac{r^2}{t} \right) \right) d\frac{r^2}{t'}. \quad (11)$$

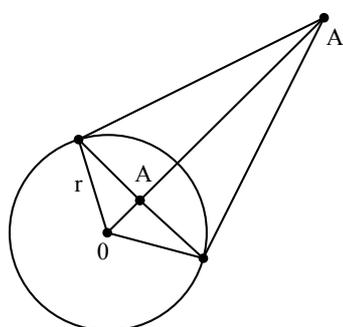


Рис. 3. Проекция внешней области круга на внутреннюю

Упрощая выражение (11), получаем

$$U\left(\frac{r^2}{t}\right) \cdot \frac{1}{t} = \\ = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^r \left(r^2 \sigma\left(\frac{r^2}{t'}\right) t' / (t'+t)t'^3 \right) \cdot K\left(\frac{2\sqrt{t \cdot t'}}{t+t'}\right) dt' \quad (12)$$

или

$$U1(t) = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \int_0^r \frac{\sigma1(t') t'}{(t'+t)} K\left(\frac{2\sqrt{t \cdot t'}}{t+t'}\right) dt',$$

где $\sigma1(t') = \frac{r^2}{t'^3} \sigma\left(\frac{r^2}{t'}\right)$, $U1(t) = U\left(\frac{r^2}{t}\right) \cdot \frac{1}{t}$.

Представим потенциал поля $U1(t)$ в виде ряда

$$U1(t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{m=0}^N A_m t^m.$$

Определяем коэффициенты разложения $A = \{A_1 A_2 A_3 \dots A_N\}^T$, матрицу и $C = \{C_1 C_2 C_3 \dots C_N\}^T$, используя вышеописанную технологию с параметром регуляризации $\lambda=10^{-6}$. Используя выражение (7), получаем распределение зарядов $\sigma1(t)$ по поверхности проводника, рис. 4.

Выражая из (12) распределение зарядов $\sigma\left(\frac{r^2}{t}\right)$,

получаем: $\sigma\left(\frac{r^2}{t}\right) = \sigma1(t) \cdot \frac{t^3}{r^2}$. Используя замену

переменной в виде $t = \frac{r^2}{\rho}$, перепишем выражение

для распределения заряда: $\sigma(\rho) = \sigma_1\left(\frac{r^2}{\rho}\right) \cdot \frac{r^4}{\rho^3}$.

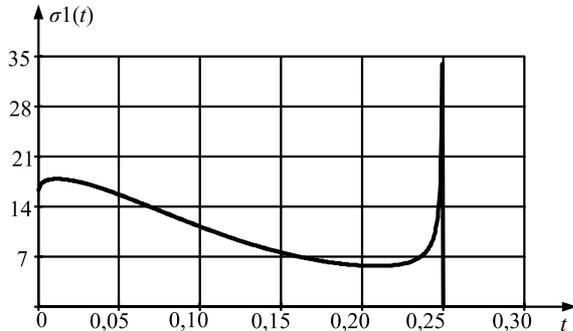


Рис. 4. Восстановленное распределение зарядов $\sigma_1(t)$

Полученное распределение зарядов $\sigma(\rho)$ по поверхности проводника приведено на рис. 5.

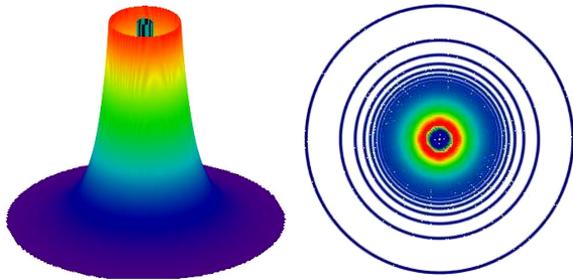


Рис. 5. Пространственное распределение зарядов пластины $\sigma(\rho)$

Пример 4. Для пластины в виде сферического сегмента (рис. 6) решением интегрального уравнения (2), при известном потенциале сегмента $U(s)$, будет выражение:

$$\sigma(\alpha, \theta) = -\frac{2}{\pi R \sin(\theta)} \frac{d}{d\theta} \times \int_0^\alpha \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \frac{d}{dt} \int_0^t U(s) \operatorname{tg}\left(\frac{s}{2}\right) ds}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \operatorname{tg}\left(\frac{s}{2}\right)^2} \cdot \cos\left(\frac{s}{2}\right)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}}. \quad (13)$$

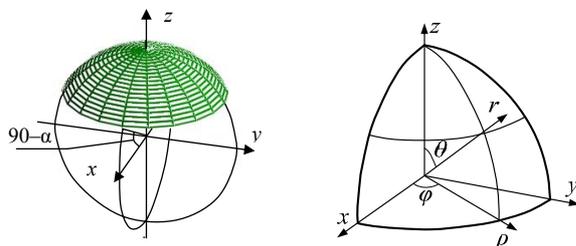


Рис. 6. Геометрические параметры сферического сегмента

После замены переменных в (13)

$$x = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad \rho = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

можно получить выражение:

$$\sigma(\alpha, \rho) = -\frac{(1 + \rho^2)}{2R\pi} \times$$

$$\times \frac{d}{\rho d\rho} \int_\rho^R \left(\frac{t^2 + 1}{2}\right) \frac{dt \int_0^t U(2 \arctan(x)) 2x dx}{\sqrt{t^2 - \rho^2} (t^2 + 1)} dt.$$

После необходимых сокращений получаем окончательное выражение для определения распределения зарядов на поверхности пластины при наличии внешнего поля

$$\tilde{\sigma}(R, \rho) = -\frac{(1 + \rho^2)}{2R_0\pi} \frac{d}{\rho d\rho} \int_\rho^R \frac{dt \int_0^t \tilde{U}(x) x dx}{\sqrt{t^2 - \rho^2}},$$

$$\tilde{U}(x) = \frac{2U(2 \arctan(x))}{\sqrt{1 + x^2}},$$

где

$$\tilde{\sigma}(R, \rho) = \sigma\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Таким образом, задача сведена к известному интегральному соотношению (5), которое решается с помощью полиномиального разложения, полученного авторами.

Определим распределение заряда и емкость пластины в виде сферического сегмента, находящегося в пределах телесного угла $\alpha = \pi/3$, $\theta = \{0, \pi\}$. Потенциал пластины $U(x) = U_0 = 1$ В, радиус сферы $R = 1$ мм.

Для решения задачи разложим потенциал сферического сегмента по степеням:

$$\tilde{U}(x) = \frac{2U_0}{\sqrt{1 + x^2}} = \sum_k^N A_k \rho^k.$$

Коэффициенты разложения ряда $A = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_N\}^T$ вычислим, используя метод наименьших квадратов.

Число коэффициентов разложения определяется точностью разложения раскладываемой функции. Технология определения коэффициентов такая же, как и прежде (9), (10).

В нашем случае достаточно пяти членов разложения. Результаты вычислений приведены в табл. 3.

Таблица 3. Коэффициенты разложения C, A

C	0,67703	0,40674	0,22045	0,22045	0,17870
A	2,50086	0,14001	-10,84046	20,46702	-16,118931

После определения коэффициентов разложения находим распределения зарядов, используя табл. 1:

$$\tilde{\sigma}(R, \rho) = \frac{(1 + \rho^2)^2}{2R_0\pi} \sum_{m=0}^4 A_m \psi_m(\rho),$$

$$\sigma(\alpha, \theta) = \tilde{\sigma}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Результат восстановления приведен на рис. 7.

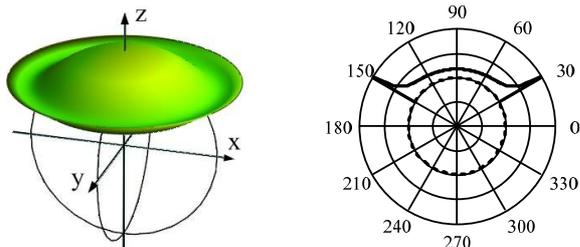


Рис. 7. Пространственное распределение зарядов и профиль функции

В данной работе описан аналитический способ расчета распределения зарядов плоских круговых дисков и дисков в виде сферических сегментов, расположенных во внешнем электростатическом поле. Получены две группы взаимно сопряженных

полиномов, позволяющих сводить интегральное уравнение обратного проецирования в алгебраическое уравнение. Распределение потенциалов на поверхности пластины представляется в виде разложения по одной группе полиномов, тогда как сопряженная группа представляет распределения зарядов на поверхности электродов с теми же коэффициентами разложения. С помощью полученных полиномов решаются как прямая, так и обратная задача уравнения обратного проецирования. Важным моментом данной работы является то, что полученные полиномы позволяют представлять прямое и обратное решение в аналитическом виде.

В качестве подтверждения правильности работы алгоритма приведены решения модельных задач восстановления зарядов по распределению потенциалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарновский А.С. Об определении понятий «потенциал» и «потенциальное поле» // Электричество. – 2000. – № 1. – С. 63–64.
2. Шишигин С.Л. Построение двумерной картины электростатического поля // Электричество. – 2004. – № 3. – С. 53–58.
3. Миролюбов Н.Н., Костенко М.В., Левинштейн М.Л., Тиходев Н.Н. Методы расчета электростатических полей. – М.: Высшая школа, 1963. – 415 с.
4. Исаев Ю.Н., Кулешова Е.О. Расчет распределения зарядов электрического поля на поверхности плоской системы электродов, помещенной во внешнее электростатическое поле // Энергетика: экология, надежность, безопасность: Матер. XII Всеросс. научно-техн. конф. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – С. 69–72.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А. Математические методы компьютерной томографии. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
6. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректно поставленных задач. – М.: Наука, 1986. – 286 с.

Поступила 05.05.2008 г.

УДК 621.372.4:537.52

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДОВ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО НЕСИММЕТРИЧНОГО ПОЛЯ

Е.О. Кулешова, Ю.Н. Исаев, О.В. Васильева, Д.А. Русол*

Томский политехнический университет

E-mail: kuleshova@el.ti.tpu.ru

*ОАО «НИПИ», г. Томск

Предлагается алгоритм расчета распределения зарядов по поверхности проводника неканонической формы при наличии произвольного внешнего поля. Алгоритм позволяет находить решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода в виде разложения по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма, что существенно упрощает решение сложной некорректной задачи. Алгоритм включает синтез собственного базиса физической системы с учетом того, что эта система может находиться лишь в состояниях, формируемых линейной комбинацией ее собственных функций. В этом случае уравнения, описывающие состояние системы, упрощаются, и от интегральных уравнений можно перейти к системе алгебраических уравнений.

Расчет распределения зарядов на поверхности плоскости при отсутствии симметрии требует привлечения методов, учитывающих кроме радиальной зависимости еще и угловую (азимутальную) зависимость. Одним из возможных методов решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма является метод, позволяющий находить решение в виде разложения по собственным функциям интегрального оператора Фредгольма.

При воздействии внешнего поля возникает перераспределение зарядов, результирующее поле является суперпозицией полей создаваемого заря-

дами на поверхности электродов и внешним источником. Этот факт выражается в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода [1, 2].

$$-U^0(\mathbf{r}_0) + U_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 D} \int \frac{\sigma(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \{x, y, z\},$$

$$\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}, \quad \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in D. \quad (1)$$

Принятые обозначения соответствуют [1].

Перепишем уравнение (1) в цилиндрических координатах и учтем, что уравнение должно быть записано для поверхности электрода $z=0$ (2) из [1].