УДК 519.2

РЕКУРРЕНТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ПУАССОНОВСКОГО ПРОЦЕССА

А.В. Китаева

Томский политехнический университет
E-mail: kit1157@yandex.ru

Рассматриваются рекуррентные оценки интенсивности пуассоновского процесса, построенные по единственной реализации, аналогичные рекуррентным ядерным оценкам плотности. Показана асимптотическая несмещенность и сходимость в среднеквадратическом предложенных оценок. Асимптотические результаты получены на интервале фиксированной длины в схеме серий, когда интенсивность процесса неограниченно возрастает.

Введение

Пуассоновский процесс с современной точки зрения относится к классу точечных случайных процессов (см., например, [1] или, с общих позиций, [2]). Точечные процессы применяются в статистике для моделирования пространственных (*spatial*) данных в таких разных областях, как лесное хозяйство, сейсмология, эпидемиология, астрономия, материаловедение и т. д. Многочисленные примеры можно найти, например, в [3–5].

Процессы, заданные на вещественной прямой R, представляют удобный для исследования важный частный случай, поскольку данные естественно упорядочены и полностью характеризуются интервалами между случайными точками, которые обычно интерпретируются как события, а вещественная полупрямая R^+ – как время. Такие процессы были изучены первыми, в связи с потребностями исследования телекоммуникационных систем. В настоящее время с их помощью моделируются, к примеру, поступление сообщений в сетях связи, потоки задач в сетях ЭВМ, приход клиентов в страховых компаниях или банках, поступление нервных импульсов на нейроны в нейрофизиологии, потоки частиц в физических экспериментах и т. п. В одномерном случае условная интенсивность процесса $\lambda(t)$ определяется следующим образом: $\lambda(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{m(t,\Delta t/H_t)}{\Delta t}$, где $\mathrm{m}(t,\Delta t/H_t)$ – условное среднее число событий, произошедших на интервале $[t,t+\Delta t]$, H_t – история процесса до момента времени t. Для пуассоновского процесса этот предел всегда существует, не зависит от H_t и является исчерпывающей характеристикой. Отсутствие последействия и ординарность являются характеристическими свойствами пуассоновского процесса, названного так по имени французского математика С. Пуассона (1781–1840). Этот процесс принадлежит к семейству марковских процессов с непрерывным временем и является простейшим примером процессов размножения-гибели (процесс чистого размножения). Отметим также, что пуассоновский процесс является одним из наиболее известных процессов Леви, столь популярных в финансовом анализе. В случае $\lambda(t)\equiv\lambda$, процесс является стационарным и называется обычно простейшим потоком событий.

Множество работ посвящено параметрическому оцениванию функции интенсивности пуассоновских потоков. В [6] рассмотрены байесовский, наименьшего расстояния, максимального правдоподобия критерии, в обзоре [7], делающем ударение на оценках максимального правдоподобия, подчеркиваются недостатки этих оценок, связанные со сложностью их структуры и неустойчивостью вычислительных процедур. В работах [6, 8–10] предложены различные непараметрические методы. Сходимость в среднеквадратическом не рекуррентной ядерной оценки показана в [11].

1. Постановка задачи

Итак, пусть $\{t_i,\ i=\overline{1,N},\ 0\le t_i\le T\}$ – реализация пуассоновского потока событий с переменной интенсивностью $\lambda(t)$ на временном интервале $[0,T]$, здесь

N – случайная величина, равная количеству событий, наступивших на интервале $[0,T]$. Распределение величины N задается выражением

$$p_n = P(N=n) = \frac{\Lambda(0,T)^n}{n!} e^{-\Lambda(0,T)},$$
$$n \ge 0, \quad \Lambda(0,T) = \int_0^T \lambda(t)dt.$$

В качестве оценки нормированной интенсивности возьмем статистику

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{h_i}K\left(\frac{t-t_i}{h_i}\right) = S_{N-1} + \frac{1}{h_N}K\left(\frac{t-t_N}{h_N}\right), \quad (1)$$

где последовательность чисел $\{h_i>0\}\downarrow 0$, причем $ih_i\to\infty$, ядро $K(\cdot)$ – финитная на отрезке $[-T,T]$ функция. В случае $N=0$ положим $S_N=0$. Здесь в отличие от статистики (1) в [11] параметр размытости h_i подбирается для каждого наблюдения, что и позволяет находить оценку рекуррентно. Рекуррентная форма оценки дает возможность производить вычисления в режиме реального времени, что особенно важно при необходимости обрабатывать большие массивы быстро поступающей информации и выдавать результат в любой требуемый момент. Такая ситуация часто возникает, например, при текущем анализе финансового рынка. Подчеркнем, что оценивание интенсивности производится по единственной реализации процесса (в отличие от, к примеру, [5]).

Покажем сходимость в среднеквадратическом статистики (1) к значению $\lambda(t)/\Lambda(0,T)$. Особенностью статистики (1), существенно усложняющей исследование свойств оценки по сравнению с классическими ядерными оценками плотности, является то, что объем выборки в данном случае является случайной величиной, и усреднение приходится вести по совместному распределению моментов наступления событий $\{t_i\}$ и количества событий N на интервале $[0,T]$. Поскольку среднее число событий на $[0,T]$ равно $\Lambda(0,T)$, асимптотика понимается либо в смысле $T\to+\infty$ [9], либо $\lambda\to+\infty$ [12], причем в последнем случае используется модель схемы серий. Использование схемы серий в такой ситуации является классическим приемом (см., например, [13. С. 98]).

Будем рассматривать асимптотическое поведение статистики (1) в следующей схеме серий. Пусть на интервале $[0,T]$ производятся серии измерений, причем в n-ой серии интенсивность потока $\lambda_n(t)=n\lambda(t)$ и значение нашей статистики

$$S_n = \frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\frac{1}{h_{in}}K\left(\frac{t-t_{in}}{h_{in}}\right), \quad (2)$$

где N_n – количество наблюдений в n-ой серии, t_{in} – моменты наступления событий в n-ой серии, последовательность $(h_{in})\to 0$ при $n\to\infty$, т. к. интенсивность потока и, следовательно, среднее число наблюдений на интервале $[0,T]$ неограниченно возрастают с ростом номера серии.

2. Сходимость в среднеквадратическом ядерной рекуррентной оценки функции интенсивности

Исследуем поведение (2) при $n\to\infty$.

Теорема 1. Если ядро $K(u)$ ограничено на $[-T,T]$, причем $\left|\int_{-T}^{T} K(u)u^m du\right| \le M \quad \forall m=1,2,...;$ функция $\lambda(\cdot)$ непрерывна в точке $t\in(0,T)$ и $\Lambda(t,T)\ne 0$; последовательность (h_{in}) монотонна по i и удовлетворяет условию $\left|\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i h_{(i+N)n}^m\right| \le Ch_{Nn}^m \quad \forall m$, где C – некоторая константа, то

$$\lim_{n\to\infty} M(S_n) - \lambda(t)/\Lambda(0,T) = 0.$$

Доказательство. Обозначим $p_i(x/n)$ – условную плотность распределения t_i при условии, что $N=n\ge 1;\ \Lambda(a,b)=\int_a^b \lambda(t)dt.$ Тогда среднее значение

$$M(S_N) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i}\int_0^T K\left(\frac{t-x}{h_i}\right)p_i(x/n)dx =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_i}\int_0^T K\left(\frac{t-x}{h_i}\right)\frac{\Lambda(0,x)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\Lambda(x,T)^{n-i}}{(n-i)!}\times$$
$$\times\lambda(x)dx\frac{e^{-\Lambda(0,T)}}{1-e^{-\Lambda(0,T)}}. \quad (3)$$

Множитель $\frac{1}{1-e^{-\Lambda(0,T)}}$ появляется, потому что мы предполагаем, что на отрезке произошло, по крайней мере, одно событие ($1-e^{-\Lambda(0,T)}$ – соответствующая вероятность). Учитывая равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Lambda(0,x)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\Lambda(x,T)^{n-i}}{(n-i)!} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(0,T)^{n-1}}{n!} = \frac{e^{\Lambda(0,T)}-1}{\Lambda(0,T)}$$

и ограниченность ядра, нетрудно видеть, что ряд в (3) абсолютно сходится.

Поскольку последовательность $\{h_i>0\}\downarrow 0$, без ограничения общности можно считать $h_i<\min(t/T, 1-t/T)\ \forall i$. Сделаем в интегралах (3) замену переменной, учитывая $K(u)=0\ \forall u\notin[-T,T]$, получим

$$\frac{1}{h_i}\int_0^T K\left(\frac{t-x}{h_i}\right)\frac{\Lambda(0,x)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\Lambda(x,T)^{n-i}}{(n-i)!}\lambda(x)dx =$$
$$= \int_{-T}^{T} K(x)\frac{\Lambda(0,t-h_i x)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\Lambda(t-h_i x,T)^{n-i}}{(n-i)!}\lambda(t-h_i x)dx.$$

В силу непрерывности функции $\lambda(\cdot)$ в точке t при достаточно малых h_{in} (или, что эквивалентно, при достаточно больших n или i) справедливо равенство $\lambda(t-h_{in}x)=\lambda(t)+\tilde{C}h_{in}x$, где $\tilde{C}$ – некоторая константа, поэтому

$$M(S_n) =$$
$$= \frac{e^{-n\Lambda(0,T)}}{1-e^{-n\Lambda(0,T)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} n^k \int_{-T}^{T} K(x) \frac{\Lambda(0,t-h_{in}x)^{i-1}}{(i-1)!} \times$$
$$\times \frac{\Lambda(t-h_{in}x,T)^{k-i}}{(k-i)!} \lambda(t-h_{in}x)dx =$$
$$= \frac{e^{-n\Lambda(0,T)}}{1-e^{-n\Lambda(0,T)}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} n^k \int_{-T}^{T} K(x) \frac{\Lambda(0,t-h_{in}x)^{i-1}}{(i-1)!} \times$$
$$\times \frac{\Lambda(t-h_{in}x,T)^{k-i}}{(k-i)!} (\lambda(t)+\tilde{C}h_{in}x)dx = \lambda(t)L_n + L_n^0.$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = \frac{1}{\Lambda(0,T)}$, тогда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} L_n^0=0$, и теорема будет доказана.

Воспользуемся биномиальным разложением

$$\Lambda(0,t-h_{in}x)^{i-1} = (\Lambda(0,t)-\Lambda(t-h_{in}x,t))^{i-1} =$$
$$= \sum_{l=0}^{i-1} (-1)^{i-1-l} \frac{\Lambda(0,t)^l}{l!} \frac{\Lambda(t-h_{in}x,t)^{i-1-l}}{(i-1-l)!} (i-1)!,$$
$$\Lambda(t-h_{in}x,T)^{k-i} = (\Lambda(t,T)+\Lambda(t-h_{in}x,t))^{k-i} =$$
$$= \sum_{m=0}^{k-i} \frac{\Lambda(t,T)^m}{m!} \frac{\Lambda(t-h_{in}x,t)^{k-i-m}}{(k-i-m)!} (k-i)!.$$

По теореме о среднем значении

$$\Lambda(t-h_{in}x,t) = \int_{t-h_{in}x}^{t} \lambda(t)dt = rh_{in}x,$$

где r – некоторая константа. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} n^k \int_{-T}^{T} K(x) \frac{\Lambda(0,t-h_{in}x)^{i-1}}{(i-1)!} \frac{\Lambda(t-h_{in}x,T)^{k-i}}{(k-i)!} dx =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} n^k \int_{-T}^{T} K(x) \sum_{l=0}^{i-1} (-1)^{i-1-l} \frac{\Lambda(0,t)^l}{l!} \frac{(rh_{in}x)^{i-1-l}}{(i-1-l)!} \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{k-i} \frac{\Lambda(t,T)^m}{m!} \frac{(rh_{in}x)^{k-i-m}}{(k-i-m)!} dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \frac{\Lambda(0,t)^l}{l!} n^k \sum_{i=0}^{k-l} (-1)^i \int_{-T}^{T} K(x) \frac{(rh_{in}x)^i}{i!} \times$$
$$\times \sum_{m=0}^{k-i-l} \frac{\Lambda(t,T)^m}{m!} \frac{(rh_{in}x)^{k-i-l-m}}{(k-i-l-m)!} dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \sum_{m=0}^{k-l} \frac{\Lambda(t,T)^m n^m}{m!} n^{k-l-m} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{k-l-m} (-1)^i \int_{-T}^{T} K(x) \frac{(rh_{in}x)^{k-l-m}}{i!(k-i-l-m)!} dx =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} + \Delta_n, \qquad (4)$$

где

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \sum_{m=0}^{k-l-1} \frac{\Lambda(t,T)^m n^m}{m!} n^{k-l-m} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{k-l-m} (-1)^i \int_{-T}^{T} K(x) \frac{(rh_{in}x)^{k-l-m}}{i!(k-i-l-m)!} dx +$$
$$+n + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n}{k+1} \frac{\Lambda(0,t)^k n^k}{k!}. \qquad (5)$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)}\Delta_n=0$. Рассмотрим поведение нетривиального первого слагаемого в этом пределе в соответствии с (5). Сделав элементарные преобразования и замену индексов, получим

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{m=1}^{k-l} \frac{C_{k-l}^m r^m}{\Lambda(t,T)^m} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C_m^i h_{(i+l+1)n}^m \int_{-T}^{T} K(x)x^m dx \right| \le$$
$$\le MC \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \times$$
$$\times \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} \sum_{m=1}^{k-l} \frac{C_{k-l}^m r^m h_{(l+1)n}^m}{\Lambda(t,T)^m} =$$
$$= MC \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \times$$
$$\times \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} \left(\left(1 + \frac{rh_{(l+1)n}}{\Lambda(t,T)} \right)^{k-l} - 1 \right) = 0, \qquad (6)$$

поскольку

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k+1}}{k+1} \frac{\Lambda(0,T)^k}{k!} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \frac{(e^{n\Lambda(0,T)} - 1 - n\Lambda(0,T))}{\Lambda(0,T)} = \frac{1}{\Lambda(0,T)},$$
$$\frac{1}{\Lambda(0,T)} = \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \times$$
$$\times \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} \left(1 + \frac{rh_{(l+1)n}}{\Lambda(t,T)} \right)^{k-l} \le$$
$$\le \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k+1} \sum_{l=0}^{k-1} \frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!} \times$$
$$\times \frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!} \left(1 + \frac{rh_{2n}}{\Lambda(t,T)} \right)^{k-l} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} e^{-n\Lambda(0,T)} \frac{\exp n \left(\Lambda(0,t) + \Lambda(t,T) \left(1 + \frac{rh_{2n}}{\Lambda(t,T)} \right) \right)}{\Lambda(0,t) + \Lambda(t,T) \left(1 + \frac{rh_{2n}}{\Lambda(t,T)} \right)} =$$
$$= \frac{1}{\Lambda(0,T)}. \qquad (7)$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n\Lambda(0,T)}}{1-e^{-n\Lambda(0,T)}} \times$$
$$\times\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n}{k+1}\sum_{l=0}^{k}\frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!}\frac{\Lambda(t,T)^{k-l} n^{k-l}}{(k-l)!}+\Delta_n\right)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n\Lambda(0,T)}}{1-e^{-n\Lambda(0,T)}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{k+1}\frac{\Lambda(0,T)^k}{k!}=\frac{1}{\Lambda(0,T)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. В условиях теоремы 1, если

$$\int_{-T}^{T} K^2(x)x^m dx < \tilde{M} \quad \forall m = 1,2,...,$$

статистика S_n сходится в среднеквадратическом (в предложенной схеме серий) к $\lambda(t)/\Lambda(T)$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} M(S_n - \lambda(t)/\Lambda(T))^2 = 0.$$

Доказательство. Совместное распределение случайных величин t_i, t_j, N [12]:

$$p_{ijn}(x,y)=$$
$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(t_i<x+\Delta x, t_j<y+\Delta y, N=n)-P(t_i<x,t_j<y,N=n)}{\Delta x\Delta y}=$$
$$=\frac{\Lambda(0,x)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\Lambda(x,y)^{j-i-1}}{(j-i-1)!}\frac{\Lambda(y,T)^{n-j}}{(n-j)!}e^{-\Lambda(0,T)}\lambda(x)\lambda(y),$$
$$0<x<T,\, x<y<T,\, n\ge 2,\, i=\overline{1,n-1},\, j=\overline{i+1,n}.$$

Среднеквадратическое отклонение оценки S_n

$$\mathrm{MSE}(S_n) = M(S_n - \lambda(t)/\Lambda(T))^2 =$$
$$= M(S_n - M(S_n))^2 + (M(S_n) - \lambda(t)/\Lambda(T))^2 =$$
$$= D(S_n) + b(S_n)^2,$$

где $D(S_n)$ и $b(S_n)$ – дисперсия и смещение оценки S_n соответственно. В теореме 1 показано, что $b(S_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Пусть $C_i(n)\to 1$ при $n\to\infty$, i=1,2,3, учитывая, что $P(N_n\ge 2)\to 1$ при $n\to\infty$, дисперсию оценки S_n можно записать следующим образом:

$$D(S_n) = M(S_n^{\,2}) - (M(S_n))^2 =$$
$$= M\left\{\frac{1}{(N_n)^2}\left[\sum_{i=1}^{N_n}\frac{1}{h_{in}^2}K^2\left(\frac{t-t_{in}}{h_{in}}\right)+\right.\right.$$
$$+\sum_{i>j}\frac{1}{h_{in}h_{jn}}K\left(\frac{t-t_{in}}{h_{in}}\right)K\left(\frac{t-t_{jn}}{h_{jn}}\right)+$$
$$\left.\left.+\sum_{i<j}\frac{1}{h_{in}h_{jn}}K\left(\frac{t-t_{in}}{h_{in}}\right)K\left(\frac{t-t_{jn}}{h_{jn}}\right)\right]\right\}-$$
$$-\left\{M\left[\frac{1}{N_n}\sum_{i=1}^{N_n}\frac{1}{h_{in}}K\left(\frac{t-t_{in}}{h_{in}}\right)\right]\right\}^2=$$
$$=C_1(n)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{h_{in}}\int_{-T}^{T}K^2(x)\lambda(t-h_{in}x)\frac{\Lambda(0,t-h_{in}x)^i}{(i-1)!}\times$$
$$\times\frac{\Lambda(t-h_{in}x,T)^{k-i}}{(k-i)!}n^k dx e^{-n\Lambda(0,T)}+$$
$$+2C_2(n)\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}\frac{1}{h_{in}h_{jn}}\times$$
$$\times\int_0^T\int_x^T K\left(\frac{t-x}{h_{in}}\right)\lambda(x)K\left(\frac{t-y}{h_{jn}}\right)\lambda(y)\times$$
$$\times\frac{\Lambda(0,x)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\Lambda(x,y)^{j-i-1}}{(j-i-1)!}\frac{\Lambda(y,T)^{k-j}}{(k-j)!}n^k dydx e^{-n\Lambda(0,T)}-$$
$$-C_3(n)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{h_{in}}\int_0^T K\left(\frac{t-x}{h_{in}}\right)\frac{\Lambda(0,x)^{i-1}}{(i-1)!}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\Lambda(x,T)^{n-i}}{(n-i)!}\lambda(x)dx e^{-n\Lambda(0,T)}\right)^2. \qquad (8)$$

Выделяя во втором слагаемом главную часть тем же методом, как и в (4), получим, что при $n\to\infty$ оно сходится к $\left(\dfrac{\lambda(t)}{\Lambda(0,T)}\right)^2$, учитывая, что, согласно полиному Ньютона,

$$\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}\frac{\Lambda(0,x)^{i-1}}{(i-1)!}\frac{\Lambda(x,y)^{j-i-1}}{(j-i-1)!}\frac{\Lambda(y,T)^{k-j}}{(k-j)!}=\frac{\Lambda(0,T)^{k-2}}{(k-2)!}.$$

Итак, асимптотическое поведение $D(S_n)$ определяется первым слагаемым в (8), и для доказательства теоремы необходимо показать, что

$$e^{n\Lambda(0,T)}=O(Q_n),$$

где

$$Q_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{k^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{h_{in}}\int_{-T}^{T}K^2(x)\lambda(t-h_{in}x)\times$$
$$\times\frac{\Lambda(0,t-h_{in}x)^i}{(i-1)!}\frac{\Lambda(t-h_{in}x,T)^{k-i}}{(k-i)!}n^k dx$$

при $n\to\infty$. Нетрудно видеть, аналогично (4), что

$$Q_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n}{(k+1)^2}\sum_{l=0}^{k}\frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!}\frac{\Lambda(t,T)^{k-l}n^{k-l}}{(k-l)!}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(k+1)^2}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!}\sum_{m=0}^{k-l-1}\frac{\Lambda(t,T)^m n^m}{m!}n^{k-l-m}\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{k-l-m}\frac{(-1)^i}{h_{in}}\int_{-T}^{T}K^2(x)\frac{(rh_{in}x)^{k-l-m}}{i!(k-i-l-m)!}dx=$$
$$=Q_n^{(1)}+Q_n^{(2)}.$$

Далее, $$Q_n^{(1)}=\frac{1}{\Lambda(0,T)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Lambda(0,T)^k n^k}{kk!}=$$
$$=\frac{1}{\Lambda(0,T)}(\mathrm{Ei}(n\Lambda(0,T))-\ln(n\Lambda(0,T))-\gamma),$$

где Ei(n) – интегральная экспонента, γ – постоянная Эйлера, $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Ei}(n)e^{-n}=0$ [14].

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n^{(1)}e^{-n\Lambda(0,T)}=0$. Аналогично преобразованиям (6) получаем, что модуль главной части $Q_n^{(2)}$ не превосходит

$$\tilde{M}C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(k+1)^2}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!}\times$$
$$\times\frac{\Lambda(t,T)^{k-l}n^{k-l}}{(k-l)!h_{(l+1)n}}\left(\left(1+\frac{rh_{(l+1)n}}{\Lambda(t,T)}\right)^{k-l}-1\right)\le$$

$$\le \tilde{M}C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(k+1)}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!}\frac{\Lambda(t,T)^{k-l}n^{k-l}}{(k-l)!(l+1)h_{(l+1)n}}\times$$
$$\times\left(\left(1+\frac{rh_{(l+1)n}}{\Lambda(t,T)}\right)^{k-l}-1\right).$$

Так как $(l+1)h_{(l+1)n}\to\infty$ при $l\to\infty$ $\forall n$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(k+1)}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!}\times$$
$$\times\frac{\Lambda(t,T)^{k-l}n^{k-l}}{(k-l)!(l+1)h_{(l+1)n}}\left(\left(1+\frac{rh_{(l+1)n}}{\Lambda(t,T)}\right)^{k-l}-1\right)\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n}{(k+1)}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{\Lambda(0,t)^l n^l}{l!}\frac{\Lambda(t,T)^{k-l}n^{k-l}}{(k-l)!}\left(\left(1+\frac{rh_{(l+1)n}}{\Lambda(t,T)}\right)^{k-l}-1\right).$$

Учитывая (7), получаем, $\lim_{n\to\infty}|Q_n^{(2)}|e^{-n\Lambda(0,T)}\le 0$. Теорема доказана.

Поскольку, ввиду сложности получаемых выражений, главная часть асимптотической среднеквадратической ошибки не найдена, нельзя дать теоретических рекомендаций по выбору параметров размытости (h_i) в (1). Из доказательства следует, что скорость стремления смещения и дисперсии оценки к нулю зависит, как обычно, от скорости стремления соответственно (h_i) к нулю и (ih_i) к бесконечности. Подробный список литературы по выбору сглаживающего параметра при ядерном оценивании плотности распределения можно найти, например, в [15]. В [16] приведены результаты моделирования, в том числе и для пуассоновского потока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Daley D.J., Vere-Jones D. An Introduction to the Theory of Point Processes. – N.Y.: Springer, 2003. – 464 p.
2. Kallenberg O. Random Measures. – Berlin: Akademie-Verlag, 1983. – 187 p.
3. Diggle P.J. Statistical Analysis of Spatial Point Processes. – London: Academic Press, 1983.
4. Karr A.F. Point Processes and their Statistical Inference. – N.Y.: Dekker, 1991. – 490 p.
5. Snyder D.L., Miller M.I. Random Point Processes in Time and Space. – N.Y.: Springer, 1995. – 495 p.
6. Kutoyants Yu.A. Statistical Inference for Spatial Poisson Processes. Lecture Notes in Statistics. V. 134. – N.Y.: Springer, 1998. – 276 p.
7. Ogata Y. Seismicity analysis through point-process modeling: a review // Pure Appl. Geophys. – 1999. – V. 155. – P. 471–507.
8. Helmers R., Mangku I.W., Zitikis R. Statistical properties of a kernel type estimator of the intensity function of a cyclic Poisson process // J. Multivariate Anal. – 2005. – V. 92. – P. 1–23.
9. Helmers R., Zitikis R. On estimation of Poisson intensity functions // Ann. Inst. Statist. Math. – 1999. – V. 51(2). – P. 265–280.
10. Reynaud-Bouret P. Adaptive estimation of the intensity of inhomogeneous Poisson processes via concentration inequalities // Probab. Theory Relat. Fields. – 2003. – V. 126. – P. 103–153.
11. Китаева А.В., Терпугов А.Ф. Непараметрическое оценивание нормированной интенсивности пуассоновского процесса по наблюдениям на заданном интервале // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. – 2006. – № 19. – С. 169–172.
12. Идрисов Ф.Ф. Рандомизированные временные ряды. – Томск: Изд-во ТГПУ, 2004. – 325 с.
13. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1988. – 447 с.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
15. Деврой Л., Дьерфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. – М.: Мир, 1988. – 408 с.
16. Rudemo M. Empirical choice of histograms and kernel density estimators // Scand. J. Stat. Theory Appl. – 1982. – V. 9. – P. 65–78.

Поступила 21.02.2008 г.

Ключевые слова:

Пуассоновский процесс, функция интенсивности, ядерные оценки, рекуррентные оценки.