

УДК 535.3+519.61

## АППРОКСИМАЦИЯ ПРОФИЛЯ АСФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В.И. Рейзлин, С.М. Марчук, А.Ю. Демин

Институт «Кибернетический центр» ТПУ

E-mail: vir@tpu.ru

Предложена методика аппроксимации профиля асферической оптической поверхности, содержащей ошибки изготовления. Для аппроксимации используются измеренные отклонения реального профиля поверхности от расчетных значений. Результатами аппроксимации являются новые значения коэффициентов в уравнении профиля асферической поверхности. Аппроксимация выполняется с целью анализа влияния ошибок изготовления на качество изображения оптической системы, элементом которой является контролируемая асферическая поверхность. Предложенная методика реализована в автоматизированном приложении PROFILE.

### 1. Постановка задачи

Технологический процесс производства полимерной асферической оптики для систем отображения информации, в частности, для проекционных оптических систем на основе DMD- и LCD-модуляторов изображения [1] предусматривает контроль профиля асферической поверхности. Контроль профиля поверхности в условиях массового производства, как правило, сводится к измерению в двух взаимно перпендикулярных направлениях величин  $D\chi(Y) = REALX(Y) - \chi(Y)$  отклонения реального  $REALX(Y)$  профиля поверхности (стрелки поверхности) от расчетной функции  $\chi(Y)$ . Расчетный профиль асферической поверхности описывается выражением вида [2]

$$X(Y) = \frac{Y^2}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - (1 + K) \cdot \left(\frac{Y}{R}\right)^2}} + A \cdot Y^4 + B \cdot Y^6 + C \cdot Y^8 + D \cdot Y^{10} + E \cdot Y^{12}, \quad (1)$$

где значения коэффициентов  $R, K, A, B, C, D, E$  определяются в процессе автоматизированного проектирования оптической системы требуемыми фокусным расстоянием и абберационными свойствами асферической поверхности. На рис. 1 представлены результаты измерения величин  $D\chi(Y)$  отклонения профиля асферической поверхности диаметром

92 мм, полученные в графической форме на контактном профилометре Taylor-Hobson Form Talysurf.

Графическая и табличная формы представления функции  $D\chi(Y)$  малоприспособны для непосредственного анализа влияния измеренных отклонений профиля на качество изображения оптической системы, элементом которой является контролируемая асферическая поверхность. В связи с этим представляется целесообразным аппроксимировать функцию  $REALX(Y)$  выражением вида (1). В этом случае анализ влияния измеренных отклонений может быть выполнен посредством замены расчетной поверхности реальной асферической поверхностью, содержащей ошибки изготовления, непосредственно в математической модели оптической системы, реализованной с помощью одной из программ автоматизированного проектирования оптических систем (CODE V, ZEMAX).

Аппроксимация функции  $REALX(Y)$  выражением вида (1) позволяет существенно сократить время, необходимое для принятия решения о допустимости измеренных отклонений реального профиля от расчетного, что в условиях массового производства является весьма важным фактором.

### 2. Описание метода

Аппроксимация функции  $REALX(Y)$  выражением вида (1) может быть выполнена следующим образом.

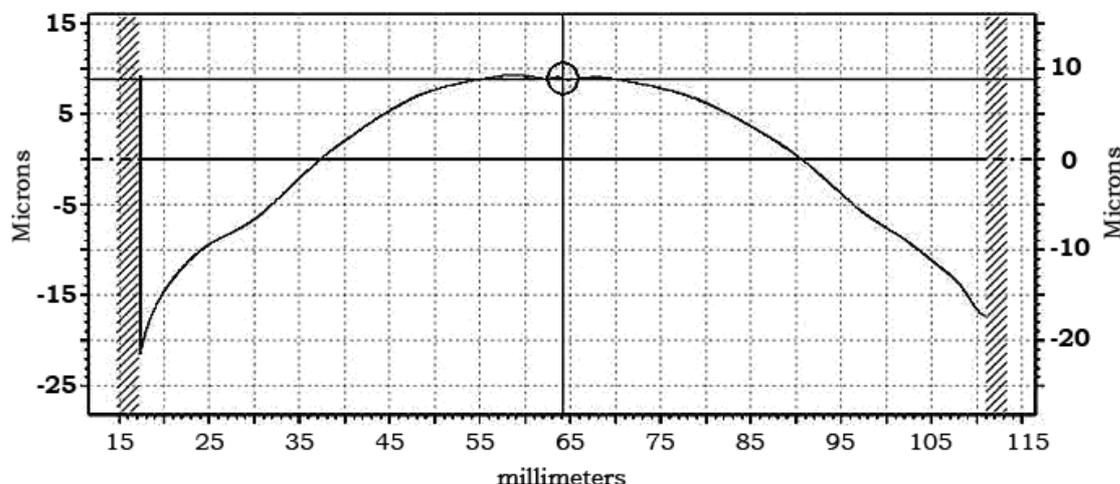


Рис. 1. График функции  $D\chi(Y)$

Известна табличная функция  $DY(Y)$ , по которой нетрудно восстановить  $REALX(Y)=DY(Y)-X(Y)$ , т. е. получить таблицу  $(Y_i, REALX(Y_i))$ ,  $i=1, \dots, m$ , где  $m$  – число точек,  $REALX(Y_i)$  – измеренные данные.

Теперь восстановим модель вида (1), аппроксимирующую реальную кривую  $REALX(Y)$ . Для этого применим метод наименьших квадратов:

$$F(c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (X(c, Y_i) - REALX(Y_i))^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i(c)^2 \Rightarrow \min, \quad (2)$$

откуда должны быть найдены коэффициенты модели (1).

Здесь  $c=(R, K, A, B, C, D, E)^T$ ,  $X(c, Y_i)$  – теоретическая модель (1) в точках  $Y_i$ ,  $f(c)=(f_1(c), \dots, f_m(c))^T$ .

Для отыскания минимума функции (2) применим квазиньютоновский метод [3, 4], согласно которому система уравнений для расчета направления поиска минимума на  $k$ -ой итерации выглядит так:

$$(J(c_k)^T J(c_k) + S(c_k)) p_k = -\nabla F(c_k), \quad (3)$$

где  $k$  – номер итерации,  $J(c)$  есть матрица Якоби функции  $f(c)$ ,  $\nabla F(c_k)=J(c_k)^T f(c_k)$  и  $S(c)$  есть аппроксимация по секущим матрицы  $\sum_{i=1}^m f_i(c) \nabla^2 f_i(c)$ , которая пересчитывается по формуле

$$S_{k+1} = \begin{cases} 0, & k=0, \\ S_k - \frac{1}{p_k^T W_k p_k} W_k p_k p_k^T W_k + \frac{1}{y_k^T y_k} y_k y_k^T. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь

$$W_k = J(c_{k+1})^T J(c_k) + S(c_k), \\ y_k = J(c_{k+1})^T f(c_{k+1}) - J(c_k)^T f(c_k).$$

Если матрица  $H(c_k)=J(c_{k+1})^T f(c_{k+1})+S(c_k)$  положительно определена, то при вычислении  $S(c_{k+1})$  по формуле (4) матрица  $J(c_{k+1})^T f(c_{k+1})+S(c_k)$  тоже будет положительно определена. Это означает, что на поздних итерациях метода, когда  $J(c_{k+1})$  и  $J(c_k)$  мало отличаются друг от друга, сохранность положительной определенности матрицы системы для расчета направления поиска обеспечена. Однако в начале счета матрица  $H(c_k)$  может получиться не положительно определенной, и направление  $p_k$  не будет направлением спуска. Чтобы избежать этого, модифицируем метод следующим образом.

1. На каждой итерации в матрицу  $H(c_k)$  вносим возмущение и делаем ее положительно определенной, т. е. полагаем  $H(c_k)=H(c_k)+q_k I$ , где  $q_k=0$ , если  $H(c_k)$  уже положительно определена и хорошо обусловлена и  $q_k>0$  в противном случае. Величина  $q_k>0$  выбирается так, чтобы она ненамного превышала то наименьшее  $q$ , которое делает  $H(c_k)+qI$  положительно определенной и хорошо обусловленной. Это сделает  $p_k$  направлением спуска.

2. В результате возмущения матрицы  $H(c_k)$  шаг вдоль направления  $p_k$ , найденного при решении системы (3), может оказаться слишком большим, и уменьшения функции может не произойти. В этом случае применяем следующую стратегию с дроблением шага.

Зададим  $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,  $0 < l < u < 1$ . Выберем ко-

эффициент дробления  $g_k=1$  и будем уменьшать его, если необходимо, следующим образом.

Пока  $F(c_k+g_k p_k) > F(c_k) + a g_k \nabla F(c_k)^T p_k$ , будем полагать  $g_k = b g_k$  для некоторого  $b \in [l, u]$ . После нахождения приемлемого  $g_k$  положим окончательно  $c_{k+1} = c_k + g_k p_k$ .

Квазиньютоновский метод, описанный выше, показывает достаточно хорошие свойства сходимости и может быть использован для аппроксимации функции  $REALX(Y)$  выражением вида (1).

### 3. Реализация метода

Предлагаемый метод программно реализован в приложении **PROFILE**. Исходными данными для работы приложения являются результаты измерения величин  $DY(Y_i)$ ,  $i=1, \dots, m$ . Допускается представление функции  $DY(Y)$  в графической или табличной формах. Контактные профилометры часто представляют данные только в графической форме. В таком случае в приложении предусмотрена возможность выбора значимого для аппроксимации участка кривой  $DY(Y)$  и перевод графических данных в табличную форму.

Результатами работы приложения являются значения величин  $R, K, A, B, C, D, E$ , а также средняя  $\delta_{\text{mean}}$  и максимальная  $\delta_{\text{max}}$  ошибки аппроксимации.

Исходные данные для аппроксимации и результаты работы приложения **PROFILE** показаны на рис. 2 и 3 соответственно.

Аппроксимация профиля асферической поверхности выражением вида (1) и оценка ошибок контролируемой поверхности в практике производителей оптических систем обычно выполняется с помощью трудоемких неавтоматизированных вычислений. Предлагаемая в настоящей работе технология позволяет автоматизировать этот процесс, что многократно сокращает время технологического этапа и является серьезным конкурентным преимуществом по сравнению с традиционно применяемыми технологиями.

Приложение **PROFILE**, реализующее описанную технологию, выполняется в течение нескольких минут и не требует высокой квалификации инженера. Результаты работы приложения далее могут быть использованы для анализа допустимости измеренных отклонений с помощью одной из программ автоматизированного проектирования оптических систем (CODE V, ZEMAX).

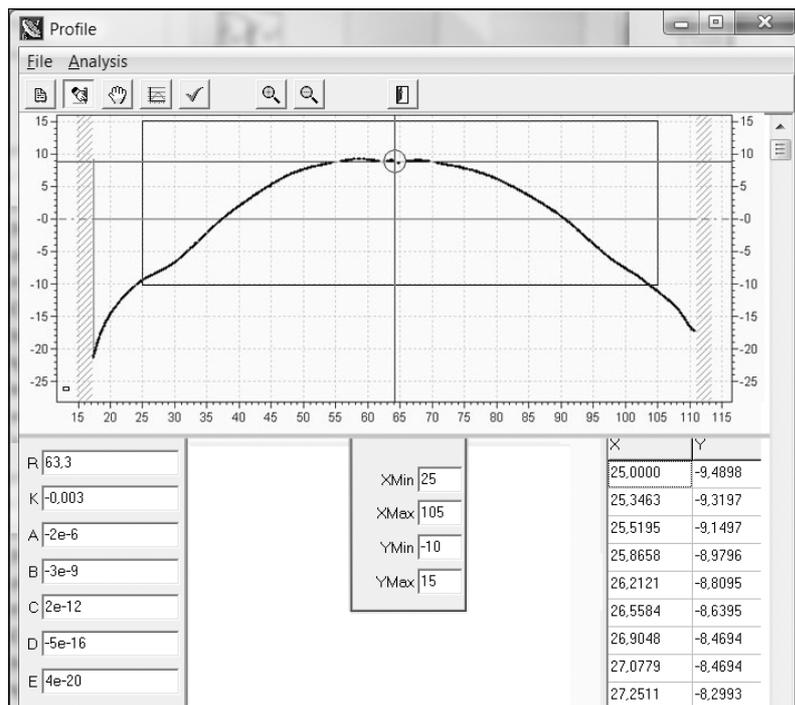


Рис. 2. Исходные данные для аппроксимации

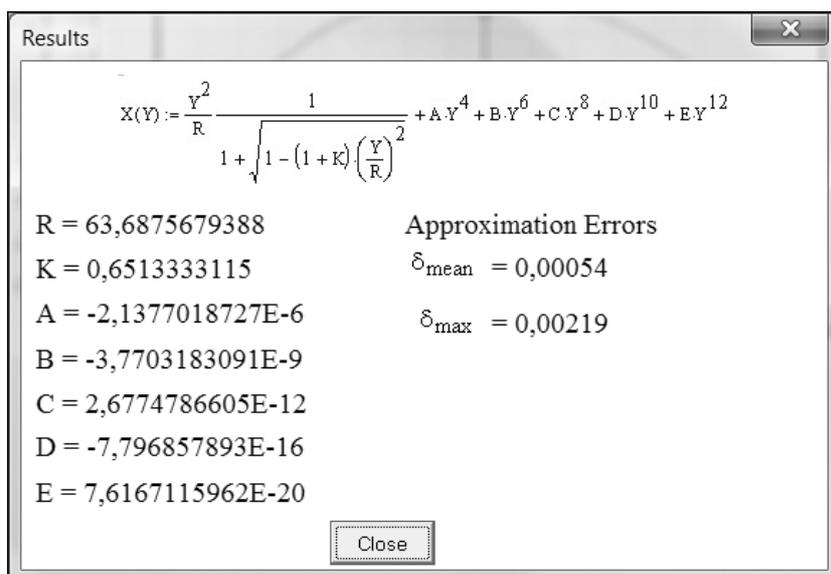


Рис. 3. Результаты работы приложения PROFILE

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марчук С.М. Широкоугольный проекционный объектив для системы отображения информации // Оптический журнал. – 2006. – Т. 73. – № 12. – С. 27–29.
2. Оптический производственный контроль / Под ред. Д. Малакары. Пер. с англ. Е.В. Мазуровой и др. Под ред. А.Н. Соснова. – М.: Машиностроение, 1985. – 400 с.
3. Dennis J.E., Jr., Gay D.M., Welsh R.E. An adaptive nonlinear least-squares algorithm // The Transactions on Mathematical Software. – 1981. – № 7. – P. 348–368.

4. Dennis J.E., Schnabel R.B. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. – New Jersey: Prentice-Hall, Inc., 1983. – 440 p.

Поступила 27.02.2008 г.

#### Ключевые слова:

Методика аппроксимации, асферическая оптическая поверхность, профиль поверхности, уравнение профиля.