

## ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ВО ФРОНТЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ЧИСЛЕННОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

Ю.В. Данейкин, Р.В. Данилейко, К.В. Юшицин

Томский политехнический университет  
E-mail: ukv@tpu.ru

*Исследована динамика модельного фронта ударной волны с целью отработки методики определения его параметров в рамках численного эксперимента. В частности, установлено, что скорость распространения возмущений на численном фронте проявляет свойства случайной величины. Проведен анализ функции распределения статистической совокупности, полученной при численном дифференцировании характеристик. Получено удовлетворительное согласие с нормальным законом. Определено влияние псевдовязкости разностной схемы на изменение скорости распространения возмущений по высоте численного фронта ударной волны.*

Численный эксперимент является эффективным инструментом исследований в области физики высоких плотностей энергии. Наиболее широкое применение нашли конечно-разностные методы решения дифференциальных уравнений динамики сплошной среды. В их основе лежит аппроксимация непрерывных термодинамических функций сеточными аналогами на дискретных пространственной и временной сетках.

Импульсное внешнее воздействие на среду, например твердотельных ударников, продуктов детонации взрывчатых веществ и потоков плазмы, пучков заряженных частиц, вызывает возбуждение в среде ударных волн. По определению ударная волна – это разрыв термодинамических функций. В общем случае законы сохранения массы, импульса и энергии, которые положены в основы уравнений динамики сплошной среды, не предусматривают обязательную непрерывность полей термодинамических параметров. Эти законы были сформулированы в форме дифференциальных уравнений просто потому, что с самого начала предполагалась непрерывность течения [1].

В практике численного решения задач гидродинамики часто не удается получить приемлемое численное решение при наличии в среде разрывов – ударных волн. Вместо характерного для стационарной ударной волны распределения параметров разностное решение представляет собой пилообразное распределение параметров с резко выраженными минимумами и максимумами, меняющимися местами всего за один шаг по времени. Такой характер разностного решения говорит о появлении неупорядоченного колебательного процесса дискретного аналога сплошной среды и о проявлении некой неустойчивости разностной схемы [2]. Классическим способом решения данной проблемы является использование однородных разностных схем с псевдовязкостью (искусственной вязкостью). Применение искусственной вязкости приводит к «размыванию» фронта ударной волны по аналогии с реальной резкостью и преобразованию кинетической энергии колебательного движения дискретного аналога сплошной среды в его внутреннюю тепловую энергию (рис. 1).

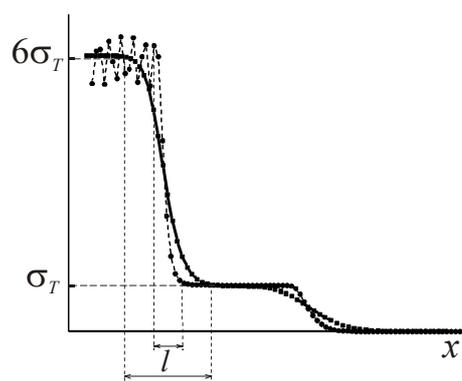


Рис. 1. Численный фронт ударной волны (с псевдовязкостью сплошная линия; без псевдовязкости – пунктир)

Таким образом, численный аналог фронта ударной волны в отличие от теоретического фронта не является разрывом, а имеет конечную ширину, определяемую параметрами расчетной сетки и искусственной вязкостью реализованной в численной схеме. При этом численный фронт должен обладать свойствами теоретического ударного фронта, в частности весь фронт должен распространяться с постоянной скоростью, равной скорости ударного фронта, которая определяется соотношением.

$$D = V_0 \frac{\sigma_0 - \sigma_1}{V_0 - V_1},$$

где  $\sigma$  – полное напряжение, включающее термодинамическое давление;  $V=1/\rho$  – удельный объем;  $\rho$  – плотность вещества; индексы «0» соответствуют параметрам перед фронтом ударной волны; индексы «1» – параметрам за фронтом.

Исследовалось распространение в модельной среде фронта волны относительно небольшой интенсивности, сгенерированной воздействием на металлическую преграду плоского ударника. При таком нагружении мишени в начальных условиях имеем произвольный гидродинамический разрыв, который распадается на две расходящиеся ударные волны [1]. Следовательно, мы имеем дело с численным аналогом разрыва термодинамических параметров во фронте распространяющегося возмуще-

ния. Численные эксперименты выполнялись в рамках модели упругопластической среды, реализующей метод Уилкинса [3, 4].

При движении ударной волны небольшой интенсивности в объеме металлической преграды, вследствие различия скоростей распространения упругого и пластического возмущений (упругая волна распространяется быстрее), происходит расщепление начальной волны на два последовательных фронта (рис. 1). Тогда рассматриваемая ударная волна распространяется по веществу, предварительно сжатому адиабатической звуковой волной до перехода металла в текучее состояние. Хотя степень сжатия во фронте упругой волны (отношение плотности сжатого вещества к плотности в невозмущенном состоянии) относительно мала ( $\sim 1,005$ ), полное напряжение за ее фронтом равняется динамическому пределу упругости  $\sigma_T$ , т. е. порядка  $10^9$  Па. Изменение параметров вещества во фронте ударного возмущения будем измерять относительно параметров металла на переходе в текучее состояние.

При исследовании скорости распространения возмущений в численном фронте использовались прямые измерения координат  $x^\phi$  фиксированных значений полного напряжения  $\sigma^\phi$  в различные моменты времени  $t_n$  (рис. 2, а). Так как численное решение для функции  $\sigma(x)$  является сеточной функцией, то для определения координаты  $x^\phi$  использовалась линейная интерполяция между двумя узлами расчетной сетки. Полученные линии на плоскости  $x, t$  (рис. 2, б) являются фазовыми траекториями (для волны, распространяющейся вправо, линии принадлежат  $C_+$ -семейству). Следовательно, скорость распространения возмущений  $D^\phi$ , соответствующих каждому фиксированному  $\sigma^\phi$ , определится как производная  $dx^\phi/dt$ .

Для однозначности рассмотрим численный ударный фронт с заданной интенсивностью  $\approx 6\sigma_T$ . На рис. 3 представлены участки фазовых траекторий, соответствующие фиксированным значениям полного напряжения  $1,5\sigma_T$  и  $5,5\sigma_T$ . Расчетные значения  $x^\phi$  показаны точками. Так же показаны прямые линии, полученные линейной аппроксимацией численных данных методом наименьших квадратов. Оценка графика показывает, что полученные фазовые траектории можно интерпретировать как параллельные прямые. Это соответствует предположению о равенстве скоростей распространения возмущений на фронте. Однако численный расчет производных от полученных фазовых траекторий проявляет погрешности как численной реализации модели сплошной среды, так и численного определения координат возмущения при интерполяции между узлами расчетной сетки. Вычисленные численных значений производных  $dx^\phi/dt$  дают хаотическое изменение значений скоростей распространения возмущений в каждый момент времени (рис. 4). При этом расчетные значения  $D^\phi$  имеют некоторое неравномерное распределение

относительно среднего значения. Своим поведением зависимость  $D^\phi(t)$  сходна с поведением случайной величины. Отличие заключается в том, что «выбросные» значения скоростей распространения возмущений при повторении вычислений будут теми же самыми, как и в предыдущем расчете. Будем считать  $D^\phi$  для каждого фиксированного  $\sigma^\phi$  непрерывной псевдослучайной величиной, проявляющей свойства физических случайных величин — измеряемых параметров физического эксперимента.

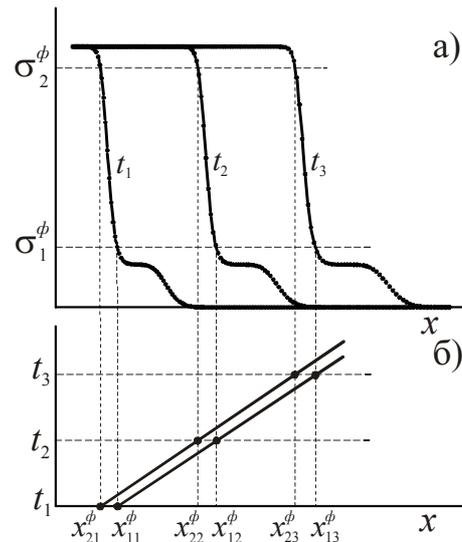


Рис. 2. Численное измерение скорости распространения возмущений

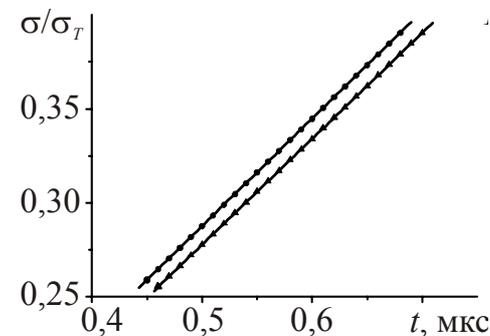


Рис. 3.  $x, t$ -диаграмма, иллюстрирующая численный расчет характеристик фронта ударной волны

Численный эксперимент позволяет получить достаточно большое количество статистического материала для достоверного анализа эмпирического распределения случайной величины и его сравнения с теоретическим. Для нахождения закона распределения  $D^\phi$  использовался метод моментов. По одномерным статистическим совокупностям, найденным для последовательности значений  $\sigma^\phi$  на численном фронте ударной волны, рассчитывались нецентральный момент 1-го порядка (среднее значение совокупности) и центральные моменты 2-го (среднее квадратичное отклонение) и более высоких порядков.

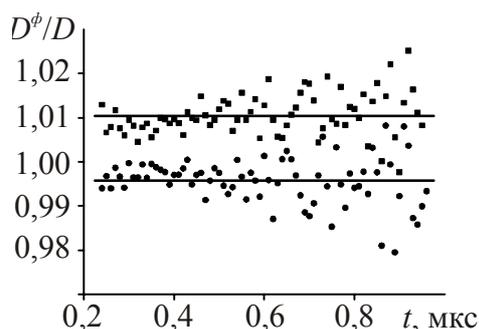


Рис. 4. Распределение расчетных значений скоростей распространения возмущений на фронте волны относительно средних значений

В исследовании использовали методики и рекомендации, предложенные в [5]. В частности, для проверки нулевой гипотезы о том, что закон распределения  $D^\phi$  является нормальным, вычислялись асимметрия  $A$  и эксцесс  $E$  эмпирических распределений по соотношениям

$$A = \frac{\mu_3^*(D^\phi)}{\sigma_3^3}, \quad E = \frac{\mu_4^*(D^\phi)}{\sigma_3^4} - 3,$$

где  $\mu_3^*(D^\phi)$  и  $\mu_4^*(D^\phi)$  – центральные моменты 3-го и 4-го порядка эмпирического распределения;  $\sigma_3$  – дисперсия или среднеквадратичное отклонение эмпирического распределения. Асимметрия и эксцесс нормального распределения равны нулю.

Таблица. Параметры эмпирических распределений  $D^\phi$  для последовательности значений  $\sigma^\phi$

$\sigma^\phi/\sigma_T$	$\bar{D}^\phi$	$\sigma_3$	$A$	$E$	$\lambda$	$P(\lambda)$
1,5	1,0090	0,0046	0,415	0,659	0,188	1,000
2,0	1,0060	0,0034	0,289	0,305	0,562	0,902
2,5	1,0038	0,0025	0,127	-0,090	0,410	0,994
3,0	1,0023	0,0019	-0,201	0,874	0,393	0,997
3,5	1,0009	0,0011	-0,592	1,159	0,613	0,844
4,0	0,9997	0,0009	-0,376	-0,385	0,422	0,990
4,5	0,9983	0,0016	-0,377	-0,644	0,502	0,962
5,0	0,9965	0,0029	-0,337	0,016	0,381	0,998
5,5	0,9943	0,0050	-0,464	1,152	0,524	0,940
6,0	0,9911	0,0094	0,597	1,943	0,181	1,000

В таблице представлены расчетные параметры эмпирических распределений. Величина среднего квадратичного отклонения показывает, что рассеяние значений  $D^\phi$  мало. В интервале от  $\bar{D}^\phi - \sigma_3$  до  $\bar{D}^\phi + \sigma_3$  содержится более 70 % всего статистического материала. Относительно малые значения асимметрии подтверждает предположение о равновероятности отклонения выборочных значений от среднего в ту или другую стороны. Переменность знака асимметрии для различных фиксированных значений  $\sigma^\phi$  дополнительно подтверждает симметричность эмпирического закона распределения скорости распространения возмущений. В ряде случаев эксцесс не может считаться малым. Это означает, что в эмпирическом законе распределения вблизи центра наблюдается тенденция превышения плотности вероятности по сравнению с нормальным.

Проведена проверка нулевой гипотезы о том, что закон распределения скорости распространения возмущений в численном эксперименте является нормальным. Здесь для сравнения наблюдаемого эмпирического распределения с нормальным приравнивались моменты до 2-го порядка включительно. При помощи параметров теоретического распределения вычислялись вероятности того, что случайная величина примет значения, меньше границ интервалов аргумента распределения. Эта вероятность  $P(\lambda)$  определялась по таблице для критерия А.Н. Колмогорова [5]. Аргумент критерия  $\lambda$  определялся по соотношению

$$\lambda = \frac{\max |N_k^{(e)} - N_k|}{\sqrt{n}},$$

где  $N_k^{(e)}$  и  $N_k$  – значения теоретической и эмпирической функции распределения соответственно;  $n$  – общее число элементов статистической совокупности. Для всей последовательности фиксированных значений  $\sigma^\phi$  вероятность  $P(\lambda)$  не ниже 0,84 (таблица). Следовательно, нулевая гипотеза не противоречит эмпирическим данным, а закон распределения скорости распространения возмущений удовлетворительно описывается нормальным распределением.

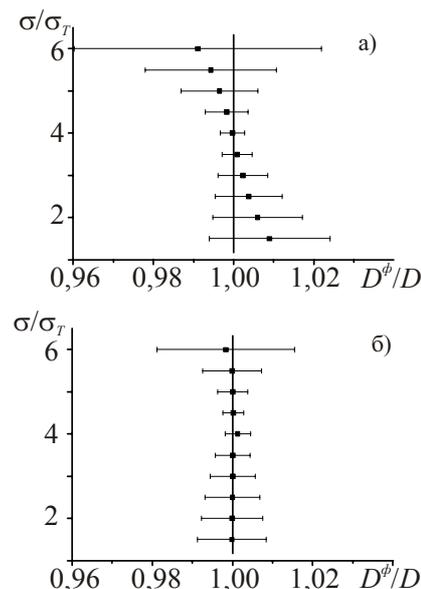


Рис. 5. Изменение наиболее вероятных значений скорости распространения возмущений по высоте фронта: а) с наличием псевдовязкости в разностной схеме; б) без псевдовязкости

Подтвердив нулевую гипотезу, далее принимали, что для сравнения значений скоростей распространения возмущений на численном фронте ударной волны необходимым является выбор доверительной вероятности 0,999, которая обеспечивается доверительным интервалом  $\bar{D}^\phi \pm 3,291\sigma_3$ . На рис. 5, а, показаны изменения значений  $\bar{D}^\phi$  по «высоте» численного фронта ударной волны с границами доверительных интервалов. Очевидно, что возмущения на численном фронте ударной волны распространяются с одинаковой скоростью (дове-

рительные интервалы скоростей всех возмущений пересекаются). При этом наблюдается устойчивая тенденция монотонного уменьшения средних значений скорости распространения возмущений во фронте. Такое поведение не может быть интерпретировано с физической точки зрения (в реальной среде скорость распространения возмущений с ростом напряжения или давления должна возрастать). На рис. 5, б, показано такое же изменение  $D^{\phi}$  по «высоте» фронта, которое получено при анализе возмущения, распространяющегося в модельной среде без псевдовязкости. Здесь хаотическое изменение  $D^{\phi}$  по высоте относительно теоретического значения скорости фронта ударной волны указывает на то, что нефизическое поведение скорости распространения возмущений в первом случае обусловлено проявлением искусственных диссипативных свойств модельной среды. Именно такое поведение скорости распространения возмущений в псевдовязкой среде определяет «размывание» фронта ударной волны, тем самым уменьшая градиент давления во фронте, что положительно влияет на сглаживание термодинамических параметров среды за фронтом возмущения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – М.: Наука, 1966. – 686 с.
2. Численные методы в задачах физики взрыва и удара / А.В. Бабкин, В.И. Колпаков, В.Н. Охитин, В.В. Селиванов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 516 с., (Прикладная механика сплошных сред. В 3 т. / Науч. ред. В.В. Селиванов; Т. 3).
3. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений: Вычислительные методы в гидродинамике / Перевод с англ. В.П. Коробейникова, П.И. Чушкина. Под ред. С.С. Грагоряна, Ю.Д. Шмыглевского. – М.: Мир, 1967. – 384 с.
4. Бойко В.И., Данейкин Ю.В., Юшицин К.В. Описание параметров состояния вещества в задачах моделирования динамики

#### Выводы

1. Показано, что измеряемые в численном эксперименте параметры фронта ударной волны, в частности скорости распространения возмущений, проявляют свойства случайной величины. При этом они являются псевдослучайными, т. е. выборочные значения, составляющие статистическую совокупность, повторяются при повторении расчета.
2. Эмпирическое распределение скорости распространения возмущений удовлетворительно описывается нормальной функцией распределения.
3. Возмущения на численном ударном фронте распространяются в модельной среде с одинаковыми скоростями с точностью в пределах статистического разброса.
4. Введение в модельную среду искусственной псевдовязкости обуславливает уменьшение скорости распространения возмущений (среднего значения статистической совокупности) по «высоте» фронта. Это уменьшение не выходит за пределы доверительного интервала, что определяет рост погрешности численного измерения скорости от середины фронта в направлении увеличения и уменьшения полного напряжения.

системы «концентрированный поток энергии – металл» // Известия Томского политехнического университета. – 2004. – Т. 307. – № 7. – С. 16–21.

5. Щиголов Б.М. Математическая обработка наблюдений. Изд. II. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 476 с.

*Поступила 22.05.2008 г.*

#### Ключевые слова:

Численный эксперимент, обработка результатов, случайные и псевдослучайные величины, моменты функции распределения, метод моментов, ударные волны, скорость распространения возмущений в численном фронте ударной волны.