

## ПОСТРОЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

<sup>1</sup>Мельникова Н.А., <sup>2,3</sup>Немирович-Данченко М.М., <sup>2</sup>Ислямова А.А.

<sup>1</sup>Северский технологический институт НИЯУ МИФИ, Северск, Томская обл.

<sup>2</sup>Томский политехнический университет

<sup>3</sup>Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск

*При интерпретации данных в сейсмологии и сейсморазведке одним из основных параметров является время распространения фронта поперечной (продольной) волны от источника до приемников. Задача построения фронтов является тривиальной лишь для изотропных однородных сред. В случае же реальных геосред (неоднородных, слоистых, первично-анизотропных, блочных и т.п.) построение фронтов сопряжено с рядом вычислительных особенностей. В предлагаемой работе приводятся некоторые способы вычисления фронтов упругих волн для анизотропных сред.*

### Введение

Фундаментальные основы для решения задач кристаллоакустики заложены во второй половине нашего столетия Ф.И. Федоровым [1]. Удаётся получать и исследовать общее решение для широкого класса практических случаев. Эти результаты находят свое применение в физической акустике, дефектоскопии, пьезотехнике, сейсморазведке. При этом для многих задач возможно лишь численное решение, а для правильной интерпретации результатов расчетов необходимо опираться на некие общие аналитические результаты. Поэтому авторы приводят здесь данные теоретико-справочного характера.

### Постановка и общее решение задачи

Будем рассматривать двумерные волновые картины для гексагональных кристаллов для случая, когда ось  $Z$  совмещена с главной осью анизотропии. Приведем формулы, характеризующие упругие волны в плоскости  $XZ$ . Запишем уравнения движения в перемещениях (смещениях)

$$\rho \ddot{u}_i = c_{ijkl} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \quad (1)$$

Решение уравнений (1) будем искать в виде семейств плоских волн

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = A \vec{p} \exp[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)], \quad (2)$$

здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор частицы среды,  $\vec{p}$  – вектор поляризации,  $\vec{k}$  – волновой вектор (вектор пространственных частот),  $\omega$  – круговая частота,  $A$  – амплитуда волн,  $\rho$  – плотность среды.

Следовательно, мы ищем решения в виде волн, распространяющихся в положительном направлении оси времени с частотой  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ). В пространстве эти волны распространяются с частотами  $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ , характеризующими степень наклона фронта волны к соответствующей оси. Например, волновой вектор  $(k, 0, 0)$  соответствует плоскости с нормалью, коллинеарной оси  $X$ . Вводят единичный вектор волновой нормали  $\vec{m}$  так, что  $\vec{k} = (2\pi / \lambda) \vec{m}$ . В оптике этот вектор называется вектором рефракции. Другие встречающиеся названия – медленность (slowness), обратная

скорость. Здесь  $\lambda$  – длина волны. Возмущение данной частоты в среде пробегает путь  $\lambda$  за время  $T = 1/f$ , поэтому величину  $v = \lambda f$  называют *фазовой* скоростью. Учитывая вышесказанное, формулу (2) запишем в виде

$$\bar{u}(\vec{r}, t) = A\bar{p} \exp\left[\frac{2\pi}{\lambda} i(\vec{m}\vec{r} - vt)\right] \quad (3)$$

Подставив (3) в уравнения (1), получим уравнения Кристоффеля  $\rho v^2 p_i = c_{ijkl} m_j m_k p_l$ , где свертка  $c_{ijkl} m_j m_k$  – тензор Кристоффеля  $\Gamma_{il}$ . Так как  $p_i = \delta_{il} p_l$ , то запишем окончательно  $\{\Gamma_{il} - \rho v^2 \delta_{il}\} p_l = 0$ .

При вычислении компонент тензора Кристоффеля нужно учитывать, что, например,  $c_{1313} = c_{1331} = c_{3131} = c_{3113} \equiv c_{13}$ .

В нашем случае матрица тензора  $\Gamma_{il}$  имеет размерность  $2 \times 2$  и составлена из элементов с индексами 1 и 3

$$\Gamma_{il} = \begin{pmatrix} c_{11} m_x^2 + c_{55} m_z^2 & (c_{13} + c_{55}) m_x m_z \\ (c_{13} + c_{55}) m_x m_z & c_{55} m_x^2 + c_{33} m_z^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

(здесь необходимо учесть, что индекс 5 соответствует сочетаниям (13) и (31)).

Корни биквадратного уравнения Кристоффеля

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11} - v^2 & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{33} - v^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

выглядят так:

$$v_{1,2} = \sqrt{\frac{\Gamma_{11} + \Gamma_{33} \pm \sqrt{(\Gamma_{11} - \Gamma_{33})^2 + 4\Gamma_{13}^2}}{2\rho}}. \quad (6)$$

При вычислениях по формуле (6) следует иметь ввиду, что угол  $\theta$  в плоскости  $(x, z)$  отсчитывается от оси  $Z$ , поэтому для вектора волновой нормали имеем  $m_x = \sin(\theta)$ ,  $m_z = \cos(\theta)$ .

Формулы (6) определяют фазовые скорости. В пространстве поверхности фазовых скоростей – это уравнения 12 степени относительно  $v$ . Величины  $1/v_{1,2}$  называются рефракцией (медленностью), поверхности рефракции описываются уравнением 6 степени. Волновая поверхность, или поверхность лучевых скоростей, характеризует перенос энергии в пространстве и описывается уравнением высокой степени (по Фёдорову, [1], предельный порядок уравнения – 150).

Для построения волновых поверхностей нами использован геометрический метод Postma [2].

### Решение задачи для монокристалла графита

В таблице приведены константы для ряда гексагональных кристаллов (компоненты  $c_{ij}$  даны в ГПа, плотность в  $\text{кг/м}^3$ ).

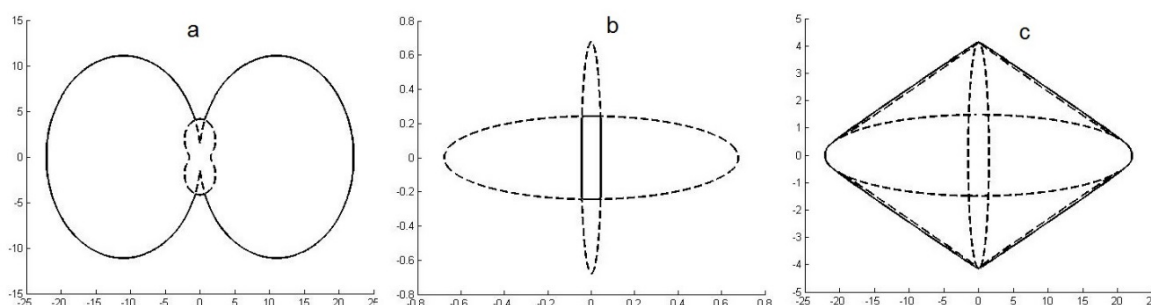
На рисунке построены кривые фазовых скоростей (а), обратных скоростей (б) и лучевых скоростей (с) для одного из предельных случаев анизотропии (монокристалл графита). В изотропной среде все индикатрисы скоростей были бы концен-

трическими окружностями (а поверхности фазовых скоростей, медленностей и лучевых скоростей – сферами).

*Константы для ряда гексагональных кристаллов*

Вещество	C11	C13	C33	C44	$\rho$
Лёд	13,84	5,81	14,99	3,19	919
Цинк	165	50,1	62	39,6	7100
Кобальт	307	103	358	75,5	8900
Апатит	167	66	140	66,3	3200
Графит	1109	0	38,7	4,95	2267

Показанные на рисунках кривые есть сечения поверхностей – поверхности фазовых скоростей (слева), поверхности медленностей (в центре) и поверхности лучевых скоростей (справа). Последние поверхности есть не что иное, как фронты распространяющихся волн, ибо энергия в волне переносится по лучам. Участки вогнутости поверхностей рефракции определяют области рефракции на фронтах.



*Индикатрисы фазовых скоростей (а), медленностей (b) и лучевых скоростей (с) монокристалла графита. Сплошная линия – квазипродольная волна, пунктир – квазипоперечная SV волна*

В *изотропной* среде лучевые и фазовые скорости совпадают – фронты (волновые поверхности) представляют собой сферы, и нормаль в любой точке фронта коллинеарна лучу, проведенному к этой точке из места излучения.

### Заключение

Изложенная методология может быть использована на стадии камеральной обработки временных сейсмических разрезов, при оценке особенностей распространения сейсмических волн в кристаллическом фундаменте.

### Литература

1. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. – М.: Наука, 1965. – 300 с.
2. Postma G. W. Wave propagation in a stratified medium // Geophysics. – 1955. – Vol. 20. – № 4 (October, 1955). – pp. 780–806.