УДК 681.51.013

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С ПИД-РЕГУЛЯТОРОМ

О.С. Вадутов

Томский политехнический университет
E-mail: vos@ido.tpu.ru

Предлагается алгоритм синтеза дискретных систем с ПИД-регулятором, основанный на сочетании модальных и частотных методов. На первом этапе с помощью модифицированной версии D-разбиения определяется интервал изменения одного из трех параметров регулятора, для всех точек которого гарантируется желаемое размещение полюсов системы. На втором этапе реализуется поиск значений параметров регулятора, обеспечивающих минимум квадратичного критерия сближения процессов в эталонной и синтезируемой системах. Приведены примеры.

1. Введение

Непрерывные и дискретные пропорционально-интегрально-дифференциальные регуляторы (ПИД-регуляторы) получили широкое применение в промышленности. При правильной настройке эти регуляторы обеспечивают хорошее качество управления для большинства промышленных объектов. Поэтому эти регуляторы остаются объектом многочисленных исследований.

В последние годы большое внимание уделено проблеме построения множества всех ПИД-регуляторов, стабилизирующих заданный объект. Проблема рассматривалась как для непрерывных [1, 2], так и для дискретных [3–5] ПИД-регуляторов. Как справедливо отмечено в [6], знание этого множества «предоставляет разработчику исчерпывающую информацию о том, в какой области пространства настраиваемых параметров регулятора ему можно маневрировать».

Построение области устойчивости, оставаясь важным этапом, не исчерпывает задачу синтеза регулятора. Представляют интерес методы построения в области устойчивости подмножеств параметров регулятора, для всех точек которого удовлетворяются заданные требования к качеству управления. В работе [6], например, при построении такого подмножества параметров непрерывного ПИД-регулятора используются частотные запасы устойчивости по усилению и по фазе. Для дискретного ПИД-регулятора в [7] приведены результаты решения подобной задачи для конкретного примера. Однако метод построения такого подмножества не описан.

В данной статье, в отличие от указанных выше работ, требования к качеству управления в дискретной системе формируются непосредственно во временной области и реализуются путем соответствующего размещения доминирующих и недоминирующих полюсов замкнутой системы. Для выделения подмножества параметров, удовлетворяющих заданным требованиям к размещению полюсов замкнутой системы, используется модифицированный метод D-разбиения [8, 9]. Далее формируется интегральный критерий сближения временных характеристик [10], и с помощью численных методов поиска в найденном подмножестве определяются оптимальные значения параметров регулятора.

2. Постановка задачи

Рассматривается линейная дискретная система автоматического управления, состоящая из одномерного по входу и выходу объекта управления и дискретного ПИД-регулятора. Передаточная функция дискретного ПИД-регулятора, полученная после замены операций интегрирования и дифференцирования их дискретными аналогами, имеет вид

$$W_p(z)=\frac{k_0+k_1z+k_2z^2}{z(z-1)}.$$

Соотношения между коэффициентами передаточных функций непрерывного и дискретного регуляторов зависят от используемого способа дискретного интегрирования [11]. Необходимо отметить, что идеальное дифференцирование, предполагаемое при реализации непрерывного регулятора, в дискретном регуляторе заменяется реализуемой операцией взятия разности.

Будем полагать, что объект управления описывается передаточной функцией

$$W_{\text{o}}(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_rz^r+\ldots+b_1z+b_0}{a_mz^m+\ldots+a_1z+a_0},\quad m\ge r.$$

Тогда замкнутая система имеет передаточную функцию

$$W_{\text{з}}(z)=\frac{D(z)}{C(z)}=\frac{(k_0+k_1z+k_2z^2)B(z)}{z(z-1)A(z)+(k_0+k_1z+k_2z^2)B(z)}.$$

Значения параметров k_0, k_1 и k_2 регулятора определяют значения нулей и полюсов замкнутой дискретной системы, а следовательно, и её свойства. Из общего числа m+2 полюсов при помощи параметров регулятора можно желаемым образом разместить три полюса замкнутой системы. Однако очевидный способ синтеза параметров регулятора, обеспечивающего желаемое размещение всех трех полюсов системы, малопригоден для решения практических задач, поскольку только удачное задание этих трех полюсов гарантирует быстрое и приемлемое решение задачи.

Задачу данной работы сформулируем следующим образом. Необходимо найти значения коэффициентов k_0, k_1 и k_2 регулятора, при которых два доминирующих полюса замкнутой системы принимают предписанные значения z_1 и z_2, а остальные m

недоминирующих полюсов произвольным образом располагаются в заданной области, охватывающей начало координат. Доминирующими полюсами будем называть корни алгебраического уравнения

$$z(z-1)A(z)+(k_0+k_1 z+k_2 z^2)B(z)=0, \qquad (1)$$

для которых выполняются условия

$$|\ln|z_i|| \gg |\ln|z_j||; \quad i=1,2; \quad j=3,...,m+2. \qquad (2)$$

В этом случае задача синтеза параметров регулятора распадается на два этапа. На первом этапе выделяется подмножество параметров регулятора, для всех точек которого выполняются условия, наложенные на расположение доминирующих и недоминирующих полюсов системы. На втором этапе в найденном подмножестве осуществляется поиск оптимальных значений параметров регулятора. В качестве критерия оптимальности предлагается использовать квадратичный критерий сближения [10].

3. Алгоритм синтеза дискретного ПИД-регулятора

Для начала синтеза параметров ПИД-регулятора согласно предлагаемому алгоритму необходимо сформировать требования к размещению полюсов замкнутой системы. Рекомендации по выбору доминирующих полюсов, оказывающих решающее влияние на поведение системы в переходных режимах, приведены в [11–13]. В случае двух доминирующих полюсов рекомендуется выбирать их комплексно-сопряженными. В частности, в [13] имеются соотношения, непосредственно связывающие значения доминирующих полюсов с прямыми показателями переходной функции системы. Недоминирующие полюсы системы рекомендуется располагать достаточно близко к началу координат комплексной z-плоскости [13]. На рис. 1 показаны варианты областей локализации недоминирующих полюсов.

Параметрическое уравнение их границы имеет вид

$$u(\theta)=\rho e^{-\xi\cdot\theta}(\cos\theta+j\sqrt{1-\cos^2\theta}),$$
$$0<\rho\le 1, \quad \xi>0, \qquad (3)$$

при изменении θ от 0 до π. В простейшем случае граница размещения недоминирующих полюсов системы может быть определена в виде окружности с центром в начале координат и радиусом ρ<1 (рис. 1, *а*). Варианты размещения, представленные на рис. 1, *б* и *в*, учитывают ограничения на колебательность.

Синтез параметров ПИД-регулятора проводится в два этапа.

Этап 1. Определение интервалов изменения параметров регулятора

Параметры регулятора входят в характеристическое уравнение замкнутой системы линейно, поэтому его можно записать в следующем виде:

$$k_0 G_0(z)+k_1 G_1(z)+k_2 G_2(z)+G(z)=0. \qquad (4)$$

Для определения интервала изменения свободного параметра используем метод D-разбиения, модифицированный условиями на размещение полюсов системы [8, 9]. Подставив в характеристическое уравнение поочередно значения двух доминирующих полюсов z_1, z_2 системы и третьего полюса, дрейфующего по границе локализации недоминирующих полюсов при изменении θ от $-\pi$ до π, составим систему уравнений:

$$G_0(z_1)k_0+G_1(z_1)k_1+G_2(z_1)k_2=-G(z_1),$$
$$G_0(z_2)k_0+G_1(z_2)k_1+G_2(z_{21})k_2=-G(z_2),$$
$$G_0(\rho,\xi,\theta)k_0+G_1(\rho,\xi,\theta)k_1+G_2(\rho,\xi,\theta)k_2=$$
$$=-G(\rho,\xi,\theta). \qquad (5)$$

Разрешив данную систему уравнений относительно одного из параметров, который назовем свободным, получим параметрическое уравнение кривой, являющейся отображением границы размещения недоминирующих полюсов на плоскость свободного параметра. По своему смыслу эта кривая представляет собой границу D-разбиения. Если в качестве свободного параметра выбран коэффициент передачи k_0, то из системы (5) найдем

$$k_0(\rho,\xi,\theta)=\frac{\Delta_0(\rho,\xi,\theta)}{\Delta(\rho,\xi,\theta)}, \qquad (6)$$

где $\Delta(\rho,\xi,\theta)$ – главный определитель системы уравнений (5), $\Delta_0(\rho,\xi,\theta)$ – определитель, полученный заменой столбца коэффициентов при k_0 столбцом $[-G(z_1),\ -G(z_2),\ -G(\rho,\xi,\theta)]^T$. Полученное выражение является параметрическим уравнением границы локализации недоминирующих полюсов системы на комплексной плоскости параметра k_0.

Порядок определения интервала изменения коэффициента k_0 такой же, как при построении с помощью метода D-разбиения области устойчивости в плоскости одного (комплексного) параметра. Сначала по выражению (6) на плоскости параметра k_0 строится кривая при изменении θ от 0 до π. Затем с помощью штриховки этой границы определяется область-претендент и осуществляется проверка выполнения условий задачи.

Рис. 1. *Области расположения недоминирующих полюсов системы при: а) $\rho=\rho_0$, $\xi=0$; б) $\rho=1$, $\xi=\xi_0$; в) $\rho=\rho_0$, $\xi=\xi_0$*

С математической точки зрения все параметры регулятора равноценны, и при выборе того или другого параметра в качестве свободного можно руководствоваться только особенностями объекта управления. Если в качестве свободных параметров выбраны параметры k_1 или k_2 регулятора, параметрические уравнения границы недоминирующих полюсов на плоскости этих параметров соответственно записывается в виде

$$k_1(\rho,\xi,\theta)=\frac{\Delta_1(\rho,\xi,\theta)}{\Delta(\rho,\xi,\theta)};$$

$$k_2(\rho,\xi,\theta)=\frac{\Delta_2(\rho,\xi,\theta)}{\Delta(\rho,\xi,\theta)}.$$

При всех значениях свободного параметра, лежащих на вещественной оси выделенной области, выполняются заданные условия на размещение полюсов замкнутой системы.

Значения двух других параметров регулятора при выбранном значении свободного параметра являются решением системы уравнений

$$k_1G_1(z_1)+k_2G_2(z_1)+k_0G_0(z_1)=-G(z_1),$$
$$k_1G_1(z_2)+k_2G_2(z_2)+k_0G_0(z_2)=-G(z_2). \qquad (7)$$

Этап 2. Определение оптимальных значений параметров регулятора

Для того чтобы оценить, как влияют недоминирующие полюсы на процессы в синтезируемой системе, и выбрать значения параметров регулятора, при которых это влияние будет минимальным, целесообразно использовать интегральный квадратичный критерий сближения временных характеристик [10] синтезируемой системы и эталонной модели. В качестве эталонной модели будем использовать систему второго порядка, полюсы которой равны доминирующим полюсам синтезируемой системы. Для дискретных систем этот критерий принимает вид

$$J=\sum_{n=0}^{\infty}[w(n)-w_э(n)]^2,$$

где $w(n)$ и $w_э(n)$ – соответственно временные характеристик (например, импульсные переходные или переходные) характеристики синтезируемой системы и эталонной модели.

Определение параметров регулятора, таким образом, сводится к решению следующей задачи оптимизации:

$$J=J(k_0,k_1,k_2)\to\min$$

при ограничениях, заданных в виде системы уравнений (7).

Поиск оптимальных значений параметров регулятора, при которых критерий сближения принимает минимальное значение, может быть выполнен с помощью численных процедур одномерной оптимизации, относящихся к методам нулевого порядка (перебора, дихотомии, золотого сечения, Фибоначчи и др. [14]). Ограничение методами нулевого порядка объясняется тем, что целевая функция $J=J(k_0,k_1,k_2)$ определена не в виде аналитического выражения, а в виде численного алгоритма.

4. Примеры

Пример 1. Пусть объект управления описывается передаточной функцией

$$W_o(z)=\frac{B_o(z)}{A_o(z)}=\frac{z+1}{z^2-1{,}5z+0{,}5}. \qquad (8)$$

Для системы управления объектом, описываемым передаточной функцией (8), в работе [5] построены области стабилизации (устойчивости) в пространстве трех параметров дискретного ПИД-регулятора.

Найдем значения параметров k_0,k_1,k_2 ПИД-регулятора при условии, что:

1) доминирующие полюсы замкнутой системы равны z_1=0,7+j0,4 и z_2=0,7–j0,4, а остальные полюсы системы расположены в области, ограниченной кривой

$$z=0{,}8\,e^{-0{,}6\theta}(\cos\theta+j\sqrt{1-\cos^2\theta}),\quad 0\le\theta\le\pi;$$

2) квадратичный критерий сближения импульсных переходных характеристик синтезируемой системы и эталонной модели с полюсами z_1 и z_2 при изменении свободного параметра регулятора принимает минимальное значение.

Для рассматриваемой системы полиномы, входящие в характеристическое уравнение (4), имеют вид:

$$G_0(z)=z+1;$$
$$G_1(z)=z^2+z;$$
$$G_2(z)=z^3+z^2;$$
$$G(z)=z^4-2{,}5z^3+2z^2-0{,}5z.$$

С помощью полученных выше соотношений отобразим границу локализации недоминирующих полюсов системы на плоскость параметра k_0 регулятора, считая его комплексным и свободным. На рис. 2, *а*, представлена граница, полученная в результате отображения. После нанесения штриховки определим искомый интервал изменения параметра:

$$k_0\in[0{,}04831;\,0{,}16368].$$

Параметр k_0 может выбираться из этого интервала, а два других параметра регулятора необходимо найти, решив систему уравнений (7), которая принимает вид:

$$(1{,}03+j0{,}96)k_1+(0{,}337+j1{,}084)k_2=$$
$$=-0{,}0878+j0{,}0204-(1{,}7+j0{,}4)k_0,$$
$$(1{,}03-j0{,}96)k_1+(0{,}337-j1{,}084)k_2=$$
$$=-0{,}0878-j0{,}0204-(1{,}7-j0{,}4)k_0.$$

Считая параметры регулятора k_1 и k_2, в свою очередь, свободными, можно построить аналогичные области и для этих параметров (рис. 2, *б* и *в*). Условия задачи выполняются, если:

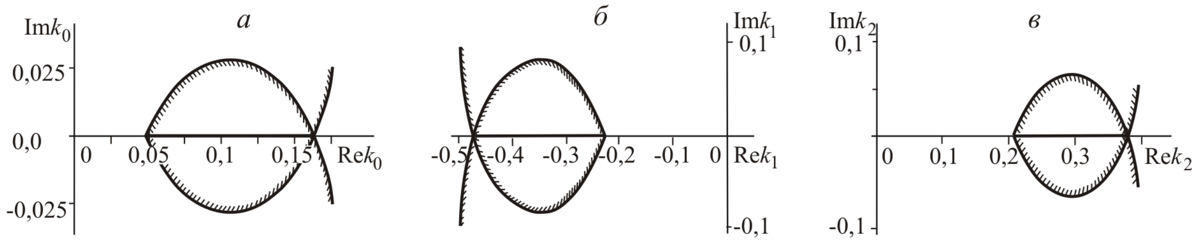

Рис. 2. *Области допустимых изменений параметров регулятора для: а) k_0, б) k_1, в) k_2*

$$k_1 \in [-0,48123; -0,23274];$$
$$k_2 \in [0,20711; 0,3846].$$

На рис. 3 показано расположение доминирующих полюсов z_1, z_2 и траектория недоминирующих полюсов z_3, z_4 при изменении свободного параметра k_0 в найденном интервале.

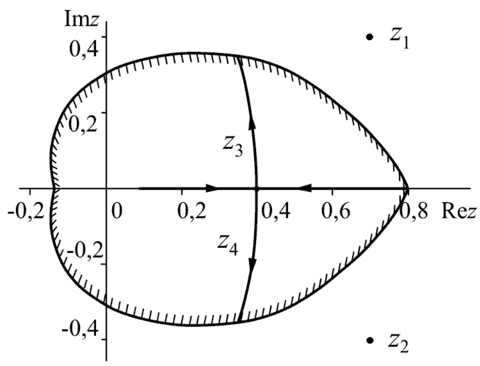

Рис. 3. *Расположение полюсов замкнутой системы, рассматриваемой в Примере 1*

Поиск оптимальных значений параметров регулятора, при которых критерий сближения принимает минимальное значение, выполнен с помощью алгоритма дихотомии. Найдены следующие оптимальные значения параметров регулятора: k_0=0,0942; k_1=–0,33158 и k_2=0,27771. Полюсы замкнутой системы при этом принимают значения: z_1=0,7+j0,4; z_2=0,7–j0,4; z_3=0,25585; z_4=0,56644.

Пример 2. Рассмотрим микропроцессорную систему управления промышленным объектом, который описывается передаточной функцией

$$W_o(s) = \frac{B_o(s)}{A_o(s)} = \frac{K_0}{(1+T_1 s)(1+T_2)^2},$$

где K_0=1; T_1=25 с; T_2=5 с. Пусть период дискретизации равен T=1 с. Дискретная передаточная функция объекта управления, полученная с помощью стандартных правил [11], имеет вид

$$W_o(z) = \frac{B_o(z)}{A_o(z)} = \frac{0,0093026z^2 - 0,01691z + 0,0088999}{(z-0,96079)(z-0,81873)^2}.$$

С учетом расположения нулей и полюсов объекта управления потребуем, чтобы доминирующие полюсы замкнутой системы располагались в точках z_1=0,95+j0,1 и z_2=0,95–j0,1 комплексной плоскости, а остальные полюсы системы – в области, граница которой определяется выражением

$$z = 0,9e^{-0,8\theta}(\cos\theta + j\sqrt{1-\cos^2\theta}), \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

При помощи описанного выше метода были определены интервалы изменения параметров регулятора:

$$k_0 \in [10,558;\ 13,9996];$$
$$k_1 \in [-31,7015;\ -24,536\ ];$$
$$k_2 \in [14,1904;\ 17,9619].$$

Оптимальные значения параметров k_0,k_1,k_2 ПИД-регулятора найдем, используя квадратичный критерий сближения переходных характеристик эталонной и синтезируемой систем. Квадратичный критерий сближения этих характеристик принимает минимальное значение при следующих значениях параметров регулятора: k_0=10,558; k_1=–24,536 и k_2=14,19. Полюсы замкнутой системы принимают значения z_1=0,95+j0,1; z_2=0,95–j0,1; z_3=0,80787; z_4=0,9, z_5=–0,14163.

Легко заметить, что условия доминирования (2) для полученных значений полюсов в рассматриваемом примере не выполняются. Однако огибающая переходной характеристики синтезированной системы с ПИД-регулятором, имеющим рассчитанные оптимальные значения параметров, отличается от соответствующей характеристики эталонной модели незначительно, рис. 4.

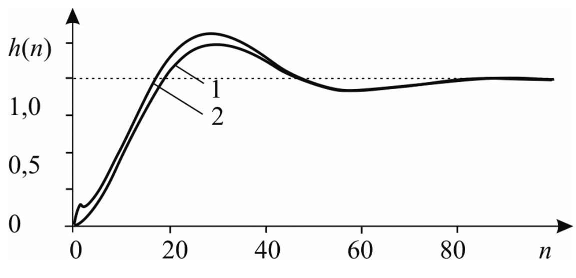

Рис. 4. *Огибающие переходных характеристик: 1) эталонной; 2) синтезированной системы*

Данный пример подтверждает возможность использования предлагаемого алгоритма синтеза ПИД-регулятора и в том случае, когда условия доминирования для полюсов системы выполнить не удается.

Заключение

Предложен алгоритм синтеза дискретных систем с ПИД-регулятором. Требуемое качество процесса обеспечивается размещением доминирующих и недоминирующих полюсов замкнутой системы. В основу алгоритма положен метод построения границ D-разбиения с учетом ограничений на расположение доминирующих полюсов системы в заданных точках комплексной плоскости.

Достоинством метода является возможность организации диалоговых процедур проектирования дискретных систем автоматического управления. Этапы построения подмножеств в плоскости параметров регулятора и последующая их оптимизация могут быть реализованы в системе программирования MathCAD, имеющей в своем составе средства решения систем линейных алгебраических уравнений и процедур оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ackermann J., Kaesbauer D. Stable polyhedra in parameter space // Automatica. – 2003. – V. 39. – № 5. – P. 937–943.
2. Tan N., Atherton D.P. Design of stabilizing PI and PID controllers // International Journal of Systems Science. – 2006. – V. 37. – № 8. – P. 543–554.
3. Keel L.H., Rego J.I., Bhattacharyya S.P. A new approach to digital PID controller design // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2003. – V. 48. – № 4. – P. 687–692.
4. Kiani F., Bozorg M. Design of digital PID controllers using the parameter space approach // International Journal of Control. – 2006. – V. 79. – № 6. – P. 624–629.
5. Xu H., Datta A., Bhattacharyya S.P. Computation of all stabilizing PID gains for digital control systems // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2001. – V. 46. – № 4. – P. 647–652.
6. Николаев Ю.П. Построение и стратификация областей устойчивости линейных динамических систем с ПИД-регуляторами // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 7. – С. 180–190.
7. Mitra S., Keel L.H., Bhattacharyya S.P. Data based design of digital PID controller // Proc. of the 2007 American Control Conf., July 11–13, 2007. – N.Y., USA, 2007. – P. 226–230.
8. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Решение задачи размещения полюсов системы методом D-разбиения // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 24–28.
9. Вадутов О.С. Синтез регуляторов пониженного порядка по заданному расположению полюсов замкнутой системы // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. – № 7. – С. 14–19.
10. Барковский В.В., Захаров В.Н., Шаталов А.С. Методы синтеза систем управления. – М.: Машиностроение, 1981. – 277 с.
11. Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
12. Земсков А.В. Оптимизация переходной функции дискретной системы по прямым показателям качества огибающей // Известия вузов. Приборостроение. – 2000. – Т. 43. – № 3. – С. 16–21.
13. Солдатов В.В., Жиров М.В., Шаховской А.В. Многопараметрические цифровые регуляторы и методы их настройки // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2002. – № 6. – С. 19–24.
14. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

Поступила 12.05.2008 г.

Ключевые слова:

Дискретные системы, ПИД-регулятор, назначение полюсов, D-разбиение.

УДК 681.511.4

АДАПТИВНОЕ ДВУХКАНАЛЬНОЕ КОРРЕКТИРУЮЩЕЕ УСТРОЙСТВО ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

М.В. Скороспешкин

Томский политехнический университет
E-mail: smax@aics.ru

Предложено адаптивное псевдолинейное двухканальное корректирующее устройство динамических свойств систем автоматического регулирования. Проведено исследование свойств систем автоматического регулирования с адаптивным псевдолинейным двухканальным корректирующим устройством. Показана эффективность предложенного корректора в системах автоматического регулирования с нестационарными параметрами.

Одной из разновидностей адаптивных систем регулирования являются системы со стабилизацией частотных характеристик. Наиболее простой в реализации является система автоматического регулирования со стабилизацией значений амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) на определенных частотах.

При создании таких систем возникают две проблемы, одна из которых связана с трудностью измерения фазы, особенно в присутствии помех, а вторая с тем, что изменение параметров линейных управляющих устройств, приводит к одновременному изменению как АЧХ, так и фазочастотной характеристики (ФЧХ). Поэтому обеспечить в линейных системах одновременно требуемые значения данных характеристик не представляется возможным.

Самым распространенным методом целенаправленного изменения частотных характеристик регулирующего устройства является метод на основе из-