

Рис. 7. Многопараметрический интервальный корневой годограф

разработанные авторами методики, позволяющие гарантировать заданную робастную устойчивость при любых изменениях объекта управления в заданных интервалах. Описанные методики основа-

ны на робастном расширении теории корневого годографа. Алгоритмы реализованы в программном пакете MatLab и представляют простой и удобный интерфейс для решения поставленных задач.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Римский Г.В. Корневой метод решения задач устойчивости интервальных систем // Вестн АН Беларуси. Сер. физ.-техн. наук. – 1994. – № 4. – С. 80–85.
2. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г., Рутковский В.Ю. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1991. – № 1. – С. 3–23.
3. Суходоев М.С., Гайворонский С.А. Интервально-параметрический синтез робастной системы с гарантированными корневыми показателями качества // Современная техника и техно-

логии: Труды XIII Междунар. научно-практ. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. – Томск, 26–30 марта 2007. – Томск: ТПУ, 2007. – С. 447–449.

Поступила 16.04.2008 г.

#### КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:

Система автоматического управления, корневой метод, интервальная система, гарантированные корневые показатели качества.

УДК 681.3

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ВЕЩЕСТВЕННОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МЕТОДА

С.В. Замятин, Д.А. Плотников, В.И. Гончаров

Томский политехнический университет  
E-mail: zamsv@tpu.ru

Рассматривается применение вещественного интерполяционного метода для получения аналитического описания статических характеристик нелинейных звеньев. С этой целью привлекается преобразование, которое позволяет перевести основные вычислительные процедуры в область изображений, где сложность операций снижается. В результате данного преобразования аналитическое описание статических характеристик представляется в виде усеченного ряда. Работоспособность предлагаемого подхода подтверждается числовыми примерами.

Одной из актуальных задач теории автоматического управления является повышение функциональных возможностей систем автоматического управления за счет их адаптации к изменяющимся

параметрам объектов управления. Поэтому все более широкое применение получают системы управления, имеющие такие возможности. Их построение связано, как правило, с решением задач иден-

тификации управляемых объектов. Эта непростая задача становится особенно сложной в тех случаях, когда приходится учитывать нелинейность объектов. Существует несколько способов решения таких задач. Наиболее распространен подход, основанный на представлении нелинейной характеристики в виде рядов Вольтерра [1, 2]. Но из-за значительных вычислительных трудностей, возникающих при применении таких рядов, его использование во встроенных вычислительных системах затруднительно. Поэтому актуален поиск более простых алгоритмов, обеспечивающих реализацию идентификационного подхода в адаптивных системах.

В работе предлагается вариант решения задачи, направленный на снижение объема вычислений при идентификации нелинейных объектов. С этой целью привлекается преобразование, которое позволяет перевести основные вычислительные процедуры в область изображений, где сложность операций снижается. Решение задачи с целью упрощения и демонстрации принципиальной стороны получения ее решения будем рассматривать на примере безынерционного звена с нелинейностью типа «насыщение».

#### Получение моделей нелинейных звеньев на основе вещественного интерполяционного метода

В основе вещественного интерполяционного метода (ВИМ) [3] лежит интегральное преобразование

$$F(\delta)\delta = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-\delta t} dt, \quad \delta \in [C, \infty], C \geq 0, \quad (1)$$

которое можно рассматривать как частный случай преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt, \quad p = \delta + j\omega \quad (2)$$

при  $\omega=0$ .

Использование функций-изображений  $F(\delta)$  с вещественным аргументом  $\delta$  как моделей физических элементов предоставляет возможности по снижению числа операций при последующих действиях, дискретизации, привлечению численных методов, а также обладает другими привлекательными особенностями.

Для использования ВИМ в заявленных целях, во-первых, заменим в (2) функцию  $f(t)$  на интересующую нас  $y(x)$ , и, во-вторых, для обеспечения сходимости конечного предела  $\lim F(\delta)$  введем множитель  $\delta$

$$F(\delta) = \delta \int_0^{\infty} y(x) \cdot e^{-\delta x} dx, \quad \delta \in [C, \infty], C \geq 0. \quad (3)$$

Последняя операция является не только математическим приемом, она имеет физический смысл. Действительно, если рассматривать  $F(\delta)$  как модель динамического звена, то  $F(\delta) \cdot \delta$  будет соответствовать изображению реакции этого звена на ступенчатое воздействие.

По сравнению с преобразованиями Фурье и Лапласа вещественное преобразование обладает рядом существенных преимуществ:

1. Функция  $F(\delta)$  не содержит мнимой составляющей, что позволяет сократить объем вычислений при выполнении операций с выражениями такого вида.
2. Для функций  $f(x)$  и  $F(\delta)$ , справедливо так называемое «перекрестное свойство», состоящее в том, что при больших значениях  $\delta$  изображение  $F(\delta)$  характеризует поведение функции-оригинала на начальном участке времени. И, наоборот, при малых значениях  $\delta$  функция  $F(\delta)$  характеризует поведение функции-оригинала  $f(x)$  преимущественно на конечном интервале  $x$ . При решении приближенных задач данное свойство оказывается очень важным, т. к. позволяет перераспределять погрешность в области оригиналов, используя интерполяционный механизм.
3. Функцию  $F(\delta)$  можно получить не только прямым путем, используя формулу (3), но по изображению Лапласа  $F(p)$ . В этом случае функция  $F(\delta)$  находится путем формальной замены переменной  $p$  на  $\delta$ , что позволяет использовать широкий спектр справочных материалов по преобразованию Лапласа, что важно с практической точки зрения.

Разработанная процедура идентификации нелинейного звена включает следующие этапы:

1. Выбор узлов интерполирования и получение модели звена в непараметрической форме.
2. Получение модели звена в области изображений в виде дробно-рациональной функции.
3. Получение модели объекта в области оригиналов и оценивание погрешности.
4. Выполнение при необходимости итеративного улучшения модели путем изменения расположения узлов интерполирования.

Первый этап имеет целью получение математической модели объекта в области изображений в форме численной характеристики [3]. Она представляет собой совокупность значений  $\{F(\delta_i)\}_\eta$ ,  $i=1, \eta$ , которые можно получить по выражению (3).

Решение предлагается искать в форме рациональной дроби

$$F(\delta) = \frac{b_m \delta^m + b_{m-1} \delta^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta^n + a_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + a_1 \delta + 1}, \quad (4)$$

которая обладает высокими аппроксимирующими возможностями и обеспечивает высокую точность приближения.

Существенным элементом рассматриваемого этапа является выбор узлов  $\delta_i$ ,  $i=1, \eta$ , которые определяют процедуру дискретизации на первом этапе интерполяции. Система узлов  $\{\delta_i\}$  во многих случаях определяет точность решения задачи. Рекомендации по их выбору имеются в [3].

Выбор узлов интерполяции осуществим на основе равномерной сетки, вычислив значение первого узла по формуле

$$\delta_1 = \frac{-\ln(\Delta / y(x_n))}{x_n}, \quad (5)$$

где  $x_n$  – значение входной величины, при которой наступает насыщение,  $\Delta$  – параметр, определяющий погрешность отсчета насыщения.

В практических задачах целесообразно переходить от формулы (3) к ее дискретному представлению

$$F(\delta_i) = \delta_i \sum_j^N (y(x_j) e^{-\delta_i x_j} \cdot \Delta x_j). \quad (6)$$

Задача второго этапа состоит в получении модели звена в области изображений в виде дробно-рационального выражения (4). Для ее решения воспользуемся интерполяционным подходом, составив систему линейных алгебраических выражений

$$F(\delta_i) = \frac{b_m \delta_i^m + b_{m-1} \delta_i^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \delta_i^n + a_{n-1} \delta_i^{n-1} + \dots + a_1 \delta_i + 1}, \quad i = \overline{1, \eta}, \quad (7)$$

где  $b_n, b_{n-1}, \dots, b_0$  и  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$  – искомые коэффициенты дробно-рациональной функции,  $\delta_i$  – узлы интерполяции,  $\eta = m + n$ .

Левая часть этой системы известна – ее элементы определены по выражению (6) в рамках предыдущего этапа. Можно показать, что решение системы (7) существует и оно единственно, если число уравнений  $k$  будет равно размерности численной характеристики  $\eta$ , т. е. должно выполняться  $k = \eta$ . В реальных задачах в целях упрощения целесообразно коэффициент  $b_0$  исключить из числа неизвестных, определив его по экспериментальной статической характеристике как предельную выходную величину звена.

Результатом выполнения этапа является модель (6) в виде функции с вещественным аргументом  $\delta$ .

Третий этап связан с получением модели объекта в области оригиналов, оцениванием погрешности и коррекцией результатов, если требуется повышение точности. Для рассмотрения этих вопросов переведем математическое описание (4) в форму изображения по Лапласу, опираясь на взаимосвязь преобразований (1) и (2). Переход можно осуществить формальной заменой переменных  $\delta$  на  $p$ . Полученная форма

$$F(p) = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + 1} \quad (8)$$

позволяет для перехода к модели в области оригиналов воспользоваться формулой Хевисайда

$$y(x) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{i=1}^N \frac{B(p_i)}{p_i A'(p_i)} e^{p_i x},$$

где  $B(s), A(s)$  – полиномы числителя и знаменателя выражения (8),  $p_i$  – корни полинома  $A(s)$ ,  $N$  – их количество.

В результате статическая характеристика нелинейного звена принимает вид

$$y(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i e^{p_i x}. \quad (9)$$

Эту форму можно использовать для представления не только характеристик типа «насыщение», но и других типовых, например, «зона нечувствительности» и главные реальных статических нелинейных характеристик. Высокие аппроксимирующие свойства такого представления позволяют ограничиться незначительным числом членов ряда для достижения приемлемой точности.

На заключительном этапе необходимо оценить точность полученного результата. Для этих целей применяется критерий близости

$$\varepsilon = \max_j |y_s(x_j) - y_m(x_j)|, \quad (10)$$

где  $y_s(x)$  – экспериментальное значение статической характеристики,  $y_m(x)$  – значение, восстановленное по полученной модели.

Выбор критерия (10) продиктован наглядностью оценки, а также тем, что значения  $y_s(x)$  известны. Вместе с тем следует иметь в виду, что это лишь приближенная оценка максимальной погрешности в силу дискретного представления исходной характеристики  $y_s(x)$ . Механизм коррекции базируется на изменении значений узлов интерполирования. Имеется возможность перераспределять погрешность на интервале  $[0, x_{\max}]$ , что позволяет приблизиться к наилучшему решению [4]. В тех случаях, когда величина  $\varepsilon$  превышает допустимое значение, имеется возможность повысить точность решения задачи. Для этого достаточно увеличить значение параметров  $m$  или  $n$  в (4), соблюдая, однако условие  $m < n$ .

Поясним предлагаемый подход расчетными примерами.

### Пример 1

Имеется звено, статическая характеристика которого представлена на рис. 1. Такая статическая характеристика является типичной для многих элементов систем автоматического управления. Найдем математическое описание звена в форме (9). Решение в области изображений будем искать в максимально простой форме

$$F(p) = \frac{b_0}{a_1 p + 1}.$$

Очевидно  $b_0 = 1$ . Определим значение узла интерполирования  $\delta$  и единственное значение численной характеристики:  $\delta_1 = 0,082$ ;  $F(\delta_1) = 0,52$ .

Алгебраическое уравнение для определения коэффициента  $a_1$  имеет вид  $-0,043 a_1 = -0,48$ , а его решение  $a_1 = 11,258$ . Тогда модель в области изображений примет вид

$$F(p) = \frac{1}{11,258 p + 1}.$$

Перейдем в область оригиналов:

$$y(x) = 1,009 - e^{-0,085x}$$

График исходной экспериментальной и полученной зависимостей представлен на рис. 1. Погрешность решения в соответствии с (10) составила  $\varepsilon=0,043$ .

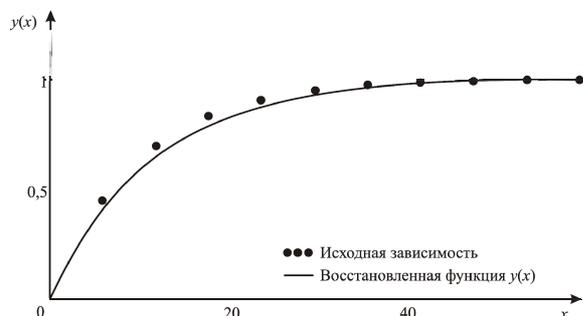


Рис. 1. Исходная зависимость и восстановленная функция  $y(x)$

### Пример 2

Рассмотрим задачу получения математического описания вида (9) нелинейной статической характеристики (рис. 2)

$$y = \begin{cases} \frac{x}{15}, & x \leq 15, \\ 1, & x > 15. \end{cases}$$

Примем математическую модель в области изображения более сложной, учитывая, имеющийся разрыв непрерывности производной рассматриваемой функции:

$$F(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + 1} \quad (11)$$

Искомые параметрами являются коэффициенты  $b_0$  и  $a_2, a_1$ . Значение коэффициента  $b_0$  определяется непосредственно по исходным данным:  $b_0=1$ . Для определения двух оставшихся коэффициентов примем узлы интерполирования  $\delta_1=0,087$ ,  $\delta_2=0,174$  и найдем в соответствии с (6) значения численной характеристики (11)

$$F(\delta_1)=0,535; F(\delta_2)=0,321.$$

Составим и решим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -4,05 \cdot 10^{-3} \cdot a_2 - 0,047 \cdot a_1 = -0,465, \\ -9,713 \cdot 10^{-3} \cdot a_2 - 0,056 \cdot a_1 = -0,679. \end{cases}$$

Ее решение:  $a_1=7,821$ ;  $a_2=24,98$ . Получим модель нелинейного звена в области изображений

$$F(p) = \frac{1}{24,98 p^2 + 7,821 p + 1}$$

Для получения модели в форме (9) найдем корни полинома знаменателя.  $s_1=-0,157+0,125i$ ;  $s_2=-0,157-0,125i$  и получим

$$y(x) = 1 + (-0,5 + 0,628i) \cdot e^{(-0,157+0,125i)x} + (-0,5 - 0,628i) \cdot e^{(-0,157-0,125i)x}$$

Результат решения приведен на рис. 2, где для сравнения показаны исходные данные. Погрешность решения  $\varepsilon=0,022$ , что для сравнительно простой аппроксимирующей функции можно считать вполне удовлетворительным результатом.

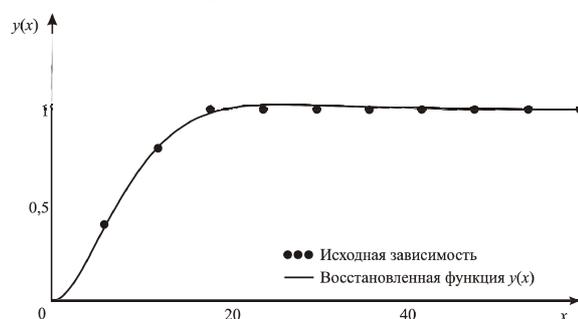


Рис. 2. Исходная зависимость и восстановленная функция  $y(x)$

### Заключение

Предложен подход к получению моделей нелинейных статических характеристик, который характеризуется малым объемом вычислений и ориентирован на встроенные в системы автоматического управления вычислительные структуры для решения задач идентификации в реальном времени. В перспективе возможно его использование в самонастраивающихся системах управления, в которых необходим учет нелинейных статических характеристик, в том числе изменяющихся во времени.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов А.И. Алгоритмы быстрой идентификации нелинейных динамических объектов // Электричество. – 1996. – № 4. – С. 30–38.
2. Nowak R.D. Nonlinear System Identification // Circuits Systems Signal Processing. – 2002. – V. 21. – № 1. – P. 109–122.
3. Гончаров В.И. Вещественный интерполяционный метод синтеза систем автоматического управления. – Томск: Изд-во ТПУ, 1995. – 108 с.

4. Гончаров В.И., Лиепиньш А.В., Рудницкий В.А. Синтез робастных регуляторов низкого порядка // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 4. – С. 36–43.

Поступила 15.04.2008 г.

### Ключевые слова:

Идентификация нелинейных звеньев, вещественный интерполяционный метод.